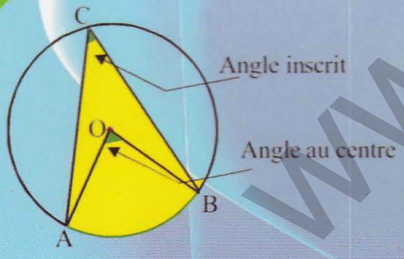
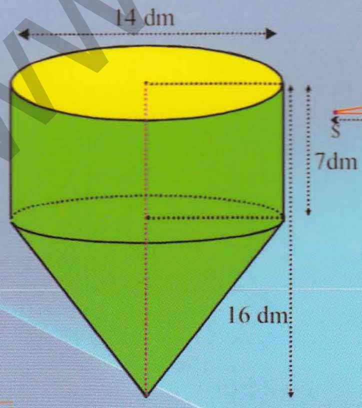
République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Éducation Nationale
Institut Pédagogique National

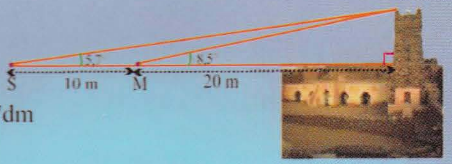
Honneur - Fraternité - Justice

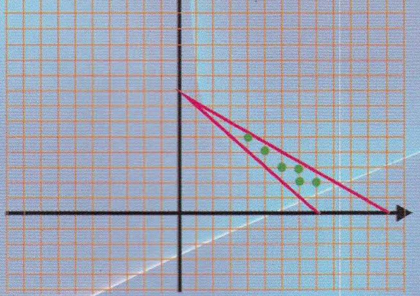
MATHÉMATIQUES

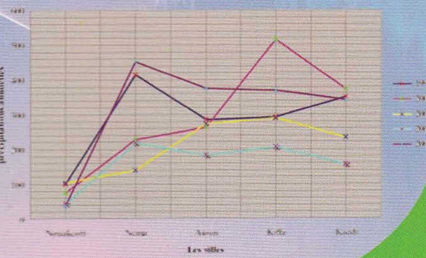
4ème Année Secondaire











Manuel de l'élève

Avant – propos

Chers collègues professeurs,
Chers élèves

Voici le manuel de $4^{ème}$ AS conçu et élaboré selon l'approche par les compétences et en étroite continuation sur le plan pédagogique et didactique avec les manuels des trois années précédentes.
Nous avons cherché à produire un manuel, qui répond à la fois à un double objectif :

- Fournir un support didactique plus efficace pour les élèves et pour les professeurs.
- Traduire davantage les objectifs de la réforme relative à cette discipline.

Nous avons essayé de mettre en exergue les pratiques de classe en choisissant une structure de chapitre permettant à la fois de confronter les élèves à des situations de la vie de tous les jours et de chercher à trouver les solutions adéquates.
C'est, dans cet esprit, que l'élève apprend dans un premier temps à acquérir les capacités nécessaires et dans un deuxième temps à intégrer ses compétences et les mettre à l'épreuve pour résoudre des situations problèmes.

Dans cet esprit, et pour mieux répondre aux orientations des programmes nationaux, le manuel propose des activités documentaires en rapport avec le chapitre des statistiques pour introduire les concepts de l'éducation en matière de population et de faire passer le message qui en découle.
Les activités documentaires dans d'autres chapitres, visent à mettre en exergue la dimension historique d'une notion ou d'un concept étudié, c'est le cas des équations et de la trigonométrie.

Le plan général du manuel est identique aux précédents, comme l'indique la structure d'un chapitre et les choix pédagogiques opérés.
Le manuel comprend 13 chapitres, 5 modules d'intégration dont le dernier est axé sur l'objectif terminal d'intégration (OTI) et deux sujets d'entraînement au BEPC.

Chaque chapitre est ainsi structuré :

- **''Je me souviens''** : permet un bon démarrage de l'apprentissage en vérifiant les pré-recquis de l'élève.
- **''Je vais plus loin''** : 3 à 5 activités représentant l'enjeu de l'apprentissage visé.
- **''Je retiens''** : récapitulatif donnant l'essentiel des connaissances indispensables.
- **''Je sais faire ''** : items de réinvestissement d'application et de contrôle.
- **''Je m'exerce''** : série d'exercices variés permettant de mettre les capacités de l'élève à l'exercice.

Après chaque trois unités, vous trouverez un module d'intégration, qui propose

- quatre situations d'intégration.
- deux situations d'évaluation.

Le dernier de ces modules propose des situations destinées à l'évaluation de l'objectif terminal d'intégration.

Tout en souhaitant, que ce manuel soit un auxiliaire utile et précieux pour les professeurs enseignant en $4^{ème}$ AS et aux élèves de cette classe, la section mathématique de l'IPN reste ouverte à toutes remarques ou suggestions de nature à améliorer les prochaines éditions.

Les auteurs

SOMMAIRE

1 Nombres réels1

Je me souviens

1. On donne les nombres suivants : - 4 ; 0 ; 0,0067 ; -3 ; $\frac{2}{3}$; -83,5 ; $\frac{1,1}{0,2}$; π ; $\frac{4}{7}$; 3^2 ; 5

Parmi les nombres ci-dessus donne ceux qui sont :
- des entiers naturels.
- des entiers relatifs.
- des nombres rationnels.

en justifiant vos réponses.

2. Place dans un repère (O ; I) d'unité 1 cm, les points suivants : A(-4) ; B(-2) ; C(-,5) ; D(3) ; E(3,7)

3. Donne des encadrements de $\frac{11}{12}$ au dixième près, au centième près et au millième près.

Je vais plus loin

Activité 1 :

Découverte de nouveaux nombres

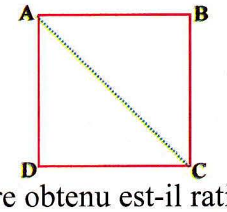
A- Au cours d'une séance de révision, deux élèves de la 4ème AS donnent les affirmations suivantes :

Saïdou : les nombres entiers sont des décimaux ?

Fatimata : dit que les nombres décimaux sont des nombres rationnels ?

Ces affirmations sont-elles correctes ? si oui justifie-les ?

B- La discussion semble intéressée tous les élèves lorsqu'il s'agit de trouver la diagonale d'un carré de côté 1 (carré ABCD).



1) Calcule l'aire du carré de deux manières :
- utilise l'aire des triangles
- utilise l'aire d'un carré

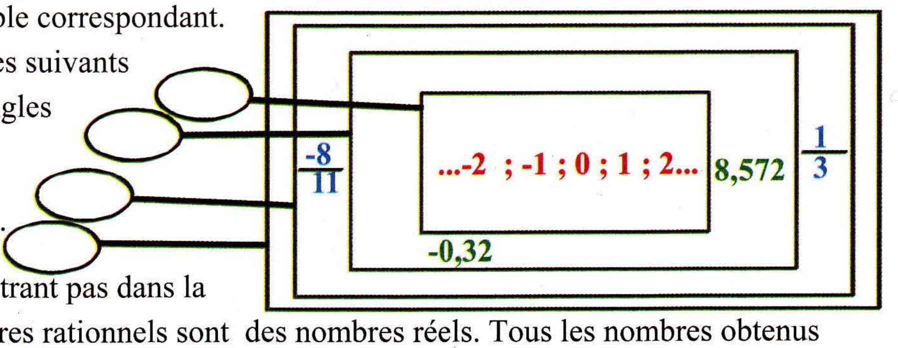
2.) En déduis la longueur de la diagonale. Le nombre obtenu est-il rationnel ?

''le nombre dont le carré est A (A > 0) est appelé racine carrée de A, noté $\sqrt{A}$ ''

3) Reproduis et complète le schéma ci-dessous, en donnant pour chaque rectangle le nom de l'ensemble correspondant.

4) Place les nombres suivants dans leurs rectangles convenables :

$\frac{-18}{375}$; $\sqrt{2}$; π ; $\frac{25}{5}$.



Les nombres ne rentrant pas dans la catégorie des nombres rationnels sont des nombres réels. Tous les nombres obtenus dans ce schéma sont appelés des nombres réels notés IR.

5) Range dans l'ordre croissant les nombres suivants : $\frac{-18}{375}$; $\sqrt{2}$; π ; $\frac{25}{5}$

Activité 2 :

Encadrement

1) Trouve le côté d'un carré d'aire 9. ce nombre est-il un réel ?

2) Trouve la valeur exacte de $\frac{7}{5}$ sous forme décimal

3) Peut-on trouver des valeurs exactes des nombres : $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$, si non donne un encadrement de chacun deux par des entiers consécutifs.

4) a) Donne un encadrement de $\frac{4}{7}$ et de $\sqrt{2}$; au dixième près, au centième près et au millième près.

b) Comment appelle-t-on la valeur située à gauche de l'encadrement et celle située à droite de l'encadrement ?

c) Fais dans chacun des cas la différence entre les valeurs trouvées en a).

d) Parmi les valeurs trouvées, laquelle est la plus proche de $\frac{4}{7}$?

Activité 3 :

Intervalles

Lors d'une compétition sportive de saut en longueur, deux élèves sont appelés à vérifier les longueurs de sauts.

Pour que le public puisse voir, ils mettent une planche où sont marquées des distances. 

1. Au premiers essais, voici les résultats obtenus en m : 2,85 ; 2,5 ; 2,7 ; 2,9 ; 3 ; 3,4 ; 3,20 ; 3,5 ; 3,8 ; 3,9.

a. Sans utiliser le décamètre, uniquement la planche, donne les résultats des élèves qui ont dépassé 2m sans atteindre 3m.

y a-t-il d'autres possibilités, si oui peut-on les dénombrer ?

b. Trace une droite graduée sur ton cahier, puis colorie en bleu cette partie.

(on prendra] ; [crochets ouverts ou o,) pour indiquer que le nombre n'est pas coloré. On notera les valeurs possibles les réels dépassant 2 sans atteindre 3.

Pour un intervalle noté] 2 ; 3 [(les deux nombres aux bornes sont exclus).

c. Donne les résultats des élèves qui ont sauté 3 m sans atteindre 4 m.

Représente sur un repère d'unité 1 cm pour un mètre, avec une couleur rouge, puis donne l'intervalle correspondant.

(on prendra [ou]) pour indiquer que la partie est colorée ou non.)

d. Que représente les réels x tels que : $x \in]2 ; 3]$; $x \in [2 ; 3]$ sous forme d'un encadrement.

2. Trouve la représentation sur une droite en la coloriant en orange, un réel $x \geqslant 4$, qui correspond à un saut supérieur ou égal à 4.

Colorie en vert l'ensemble des points d'abscisse inférieur à 2.

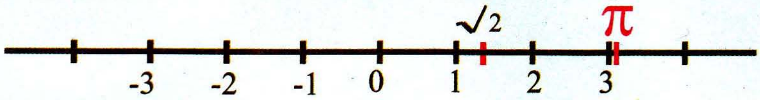
Je retiens

1. Nombre réel

Les entiers naturels, les entiers relatifs, les décimaux et les fractions sont des nombres réels.

En plus de ces nombres, il existe d'autres nombres du type: π ; $\sqrt{2}$ …
L'ensemble de tous ces nombres est noté IR.

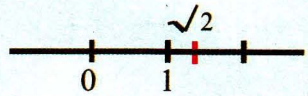
L'ensemble des réels nous permet de nous repérer sur toute une droite graduée.



2. Ordre dans IR.

Ordonner deux nombres réels peut se faire soit :

- en les repérant sur une droite graduée.
  par exemple : $\sqrt{2} > 1$



- en déterminant le signe de leur différence.
  Exemple : 2,74 et 2,23 on a $2{,}74 - 2{,}23 = 0{,}51$ (positif), donc $2{,}74 > 2{,}23$.
- en observant leurs écritures décimales approchées ou non.
  Exemple : $\frac{4}{7}$ et $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{7} \approx 0{,}57$ et $\frac{2}{3} \approx 0{,}66$; donc $\frac{4}{7} < \frac{2}{3}$

3. Encadrement d'un nombre réel

On peut encadrer un nombre réel par :

- **des entiers** :

Exemple : $\frac{4}{7}$ est comprise entre 0 et 1 ; donc $0 < \frac{4}{7} < 1$

$-\frac{4}{7}$ est comprise entre 0 et -1 ; donc $-1 < -\frac{4}{7} < 0$

- **des décimaux**

d'ordre 1 : **Exemple :** $3{,}1 < \pi < 3{,}2$.

valeur approchée d'ordre 1 de π par défaut

valeur approchée d'ordre 1 de π par excès

d'ordre 2 **Exemple :** $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

valeur approchée d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ par défaut

valeur approchée d'ordre 2 de $\sqrt{2}$ par excès

d'ordre 3 **Exemple :** $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$;

donc les deux valeurs donnent un encadrement au millième près de $\sqrt{5}$

4. Arrondi d'un réel

Au lieu d'encadrer un nombre par deux décimaux d'ordre n, on peut seulement écrire une des deux bornes de l'encadrement comme valeur approchée- on dit qu'on a arrondi.
Pour arrondir à l'ordre n, on calcule le $(n + 1)^{ème}$ chiffre après la virgule

- Si ce chiffre est supérieur ou égal à 5, on arrondit en prenant la borne par excès,
- S'il est inférieur à 5, on arrondit en prenant la borne par défaut.

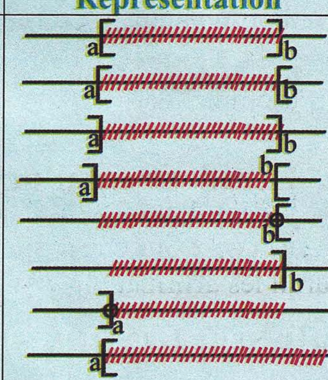
Exemple : $\frac{4}{7}$ a pour arrondi d'ordre 2 le nombre 0,57.

$\frac{4}{7}$ a pour arrondi d'ordre 1 le nombre 0,6

5. Intervalles et encadrement

a , b sont deux nombres réels tels que a < b.

- Les nombres a et b sont les bornes de chacun des intervalles suivants :
  [a ; b] ; [a ; b[;]a ; b[;]a ; b].
- La différence entre a et b est l'amplitude de ces intervalles.
- A un élément x de ces intervalles, on peut associer un encadrement (voir le tableau) :

Ecriture	Lecture	Encadrement	Représentation
[a ; b]	Intervalle fermé a, b	$a \leq x \leq b$	
[a ; b [	Intervalle fermé en a et ouvert en b.	$a \leq x < b$	
] a ; b]	Intervalle ouvert en a et fermé en b	$a < x \leq b$	
] a ; b [	Intervalle ouvert en a et en b.	$a < x < b$	
] ← ; b [	Intervalle des nombres inférieur strictement à b.	$x < b$	
] ← ; b]	Intervalle des nombres plus petit ou égal à b.	$x \leq b$	
] a ; → [	Intervalle des nombres plus grand que a.	$x > a$	
[a ; → [	Intervalle des nombres plus grand ou égal à a.	$x \geqslant a$	

Je sais faire

1. Identifier un nombre réel

Exercice 1: Parmi les nombres π ; $\frac{10}{3}$; $\frac{12}{14}$; $\frac{22}{7}$; $\sqrt{3}$; 4 ; $-\pi$; $\frac{-5}{2}$; $\frac{-8}{4}$; 0 ; -4.

- Quels sont ceux qui sont des entiers naturels, des entiers relatifs, des décimaux, des rationnels, des réels.
- Range-les dans l'ordre croissant

2. Encadrer un réel par deux décimaux d'ordre 1 ; 2 ; 3

Exercice 2: Donne un encadrement des nombres réels : $\frac{22}{7}$; $\sqrt{3}$ par deux décimaux d'ordre 1, 2 et 3

a) Donne dans chacun des cas les valeurs approchées.
b) Donne l'arrondi

- d'ordre 3 de $\frac{19}{7}$
- d'ordre 4 de $\frac{3}{11}$
- d'ordre 2 de $\frac{1}{3}$

3. Utiliser des intervalles

Exercice 3 : Sur une droite graduée, colorie les intervalles [-1 ; 2] ; [5 ; →[;]← ; -4]
Parmi les affirmations ci-dessous, quelles sont celles qui sont vraies ?

$4 \in [3 ;5]$; $\frac{2}{3} \in [2 ;3]$; $\pi \in [3,14 ;3,15]$; $\frac{3}{10} \in]0,1 ;0,3[$; $\frac{3}{2} \in]-\frac{2}{3} ; 2[$; $-3,05 \in [-3,005 ; 0]$

Associe à chaque élément x d'un intervalle un encadrement :
$x \in [-3 ; -2[$; $x \in]2 ; 3]$; $x \in]\leftarrow; 5]$; $x \in]0,35 ; 0,37]$.

CORRECTION

1. $4 ; 0$ sont des entiers naturels

$-4 ; \frac{-8}{4} ; 0 ; 4$ sont des entiers relatifs

$-4 ; \frac{-8}{4} ; 0 ; 4 ; \frac{-5}{2}$ sont des décimaux

$\frac{10}{3} ; \frac{22}{7} \; -4 ; \frac{-5}{2} ; \frac{-8}{4} ; 0 ; \frac{12}{14} ; 4$ sont des nombres rationnels

L'ensemble des nombres donnés sont tous des réels.

Ils sont ordonnés comme suit :

$-4 ; -\pi ; \frac{-5}{2} ; \frac{-8}{4} ; 0 ; \frac{12}{14} ; \sqrt{3} ; \frac{22}{7} ; \pi ; \frac{10}{3} ; 4$

2. Encadrement de $\frac{22}{7}$

$3,1 < \frac{22}{7} < 3,2$ ordre 1

$3,14 < \frac{22}{7} < 3,15$ ordre 2

$3,142 < \frac{22}{7} < 3,143$ ordre 3

Valeur approchée :

$\frac{22}{7}$ a pour valeur approchée par défaut 3,1 et par excès 3,2.

$\frac{22}{7}$ a pour valeur approchée par défaut 3,14 et par excès 3,15 au centième près.

$\frac{22}{7}$ a pour valeur approchée par défaut 3,142 et par excès 3, 143 au millième près.

''**Les arrondis**'' d'ordre 3 de $\frac{19}{7}$ est 2,714 ; d'ordre 4 de $\frac{3}{11}$ est 0,2727 ; d'ordre 2 de $\frac{1}{3}$ est 0,33

3. 1) voici la représentation demandée :

$4 \in [3 ; 5]$ vraie ; $\frac{2}{3} \in [2 ; 3]$ faux ;

$\pi \in [3,14 ; 3,15]$ vraie ; $\frac{3}{10} \in]0,1 ; 0,3[$ faux ;

$\frac{3}{2} \in]\frac{-2}{3} ; 2[$ vraie ; $-3,05 \in [-3,005 ; 0]$ faux.

$x \in [-3 ; -2[$ correspond à $-3 \leq x < -2$,
$x \in]2 ; 3]$ correspond à $2 < x \leq 3$,
$x \in]0,35 ; 0,37]$ correspond à $0,35 < x \leq 0,37$,
$x \in]\leftarrow ; 5]$; correspond à $x \leq 5$

Je m'exerce

1. Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes en justifiant si possible.

a) $\frac{-3}{11} = -0,27$

b) 0,27 est l'arrondi d'ordre 2 de $\frac{3}{11}$

c) 0,27 est une valeur approchée par défaut de $\frac{3}{2}$

d) 0,272 est l'arrondi d'ordre 3 de $\frac{3}{11}$

e) 0,273 est une valeur approchée par excès de $\frac{3}{11}$.

f) $\pi = \frac{22}{7}$.

g) $]\leftarrow ; 7[$ est l'ensemble des réels strictement inférieur à 7.

2. Range dans l'ordre décroissant

π ; $\frac{10}{3}$; $\frac{22}{7}$; $\frac{13}{4}$; $1-\pi$; $\frac{-5}{2}$; $\frac{-7}{3}$

3. Compare au nombre $\frac{7}{16}$ chacun des nombres ci-contre : 1 ; $\frac{7}{12}$; $\frac{17}{32}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{17}$.

4. Donne l'arrondi

d'ordre 2 de $\frac{17}{9}$; d'ordre 4 de $\frac{11}{3}$;

d'ordre 1 de $\frac{10}{3}$.

5. a) Cite deux nombres compris entre π et $\frac{22}{7}$.

b) Cite deux nombres compris entre $\frac{-13}{3}$ et $\frac{-108}{25}$.

c) Cite deux nombres compris entre 1 et 2.

6. Donne un encadrement par deux décimaux de $-\frac{21}{13}$ d'amplitude 10^{-2} ; 10^{-1} ; 10^{-3}.

Donne la valeur approchée de $\frac{13}{21}$ par excès au 10^{-2} près.

Donne la valeur approchée de $\frac{13}{7}$ par défaut à 10^{-3} près.

7. Donne l'amplitude dans chacun des intervalles :

$[-3 ; -2]$; $[-31,75 ; -30,92]$; $[2,05 ; 2,5[$; $]-\frac{2}{3} ; 2[$; $]0,2 ; 0,21]$;

8. Trace la droite graduée ci-dessous dans ton cahier.

Place les points suivants A(0,07) ; B(-0,18) ; C(0,13) ; D(-0,05) ; E(0,165) ; F(-0,035)

9. a) Trace une droite d graduée en cm.
b) Hachure l'intervalle $[-2 ; 1]$; l'intervalle $[5 ; \rightarrow[$; l'intervalle $]\leftarrow ; -3]$

10. Sur une droite graduée, hachure ce qui n'est pas l'intervalle $]\leftarrow ; 3]$ et ce qui n'est pas $[-2 ; \rightarrow[$.
Quel intervalle représente la partie non hachurée de la droite ?

11. Donne l'ensemble des nombres réels qui vérifient en même temps
$x \in [-4 ; \rightarrow[$; $x \in]\leftarrow ; 3[$; $x \in [2 ; 5]$.
Donne la solution sous forme d'intervalle puis d'encadrement.

12. On donne $A =]\leftarrow ; -1]$ et $B =]0 ; \rightarrow[$
Ecris deux intervalles dont aucun élément n'appartient ni à A ni à B.
Un élève à trouvé l'intervalle $]-1 ; 0]$ est-ce exact ?

13. Représente sur une droite graduée les intervalles suivants :
$]-3 ; 1[$; $[-2,5 ; 4[$; $[5 ; \rightarrow[$; $]\leftarrow ; -2[$; $[-4 ; -1[$.

14. Ecris sous forme d'intervalle chacun des ensembles de nombres définis ci-dessous :
$x \leq -2$; $x > 3,5$; $-4 < x < 6$; $-2 < x < 2$; $5,1 \leq x$.
$x > 1$; $x < \frac{1}{2}$ et $x \geq -2$. $x < -1$; $-7 < x \leq 5$.

15. Traduis à l'aide d'inégalité :
$x \in]0 ; \rightarrow [$; $x \in]-4 ; 5 [$; $x \in]-3,5 ; \rightarrow [$;
$x \in [-10 ; 10]$; $x \in]-2 ; 4 [$; $x \in]3,4 ; 7]$;
$x \in]\leftarrow ; -9]$; $x \in]\leftarrow ; 4,1]$; $x \in]80 ; \rightarrow [$.

16. Donne six nombres de chacun des intervalles :
]-1 ; 2[;] 4,28 ; 4,3] ;]-5,1 ;-5[;]-0,5 ; 0,5[.

17. Encadre $\sqrt{143}$ par deux nombres entiers consécutifs.

18. Donne cinq nombres réels de chacun des intervalles :
[-2 ; 2] ; [1,7 ; -1,2] ;]-3,13 ; 3,17[;
]-2,134 ; -2,128[.

18. Donne cinq nombres réels de chacun des intervalles :
[-2 ; 2] ; [1,7 ; -1,2] ;]-3,13 ; 3,17[;
]-2,134 ; -2,128[.

19. Compare les nombres réels suivants :

a) $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{30}$ et $\frac{1}{41}$; $\frac{-1}{51}$ et $\frac{-1}{60}$; $\frac{-6,31}{22}$ et $\frac{17}{13}$

b) $\frac{18}{21}$ et $\frac{21}{20}$; $\frac{1993}{1994}$ et $\frac{2001}{2000}$; $\frac{-19}{20}$ et $\frac{-31}{30}$; $\frac{-205}{206}$ et $-\frac{1307}{1306}$.

20. En utilisant la calculatrice, trouve l'encadrement des nombres ci-dessous par deux nombres décimaux d'ordre 2, consécutifs.
$\sqrt{14}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{21}$; $\sqrt{24}$.

- Donne des valeurs approchée par excès au centième près de $\sqrt{14}$; $\sqrt{17}$.
- Donne des valeurs approchées par défaut au millième près de $\sqrt{19}$; $\sqrt{21}$; $\sqrt{24}$.

2 Nombres réels 2

Je me souviens

1. Encadre un réel par deux décimaux :

- Encadre les réels suivants par deux entiers consécutifs :

$1+\sqrt{3}$; $\pi-\sqrt{2}$; $2\pi-\sqrt{5}$.

- Encadre les réels donnés ci-dessus par deux décimaux d'ordre 2 ; d'ordre 3 ; d'ordre 4.

2. Reconnaître la valeur absolue d'un décimal.

a) Parmi les nombres décimaux relatifs suivants quels sont les nombres opposés :

-0,4 ; 3,1 ; $\frac{20}{5}$; -3,1 ; 2,4 ; 4,2 ; -0,5 ; 5,0.

Ces nombres ont même ....

b) Complète : $|-3,2| = \ldots$; $|3,2| = \ldots$

$\left|\frac{-22}{7}\right| = \ldots$; $\left|\frac{9}{5}\right| =$

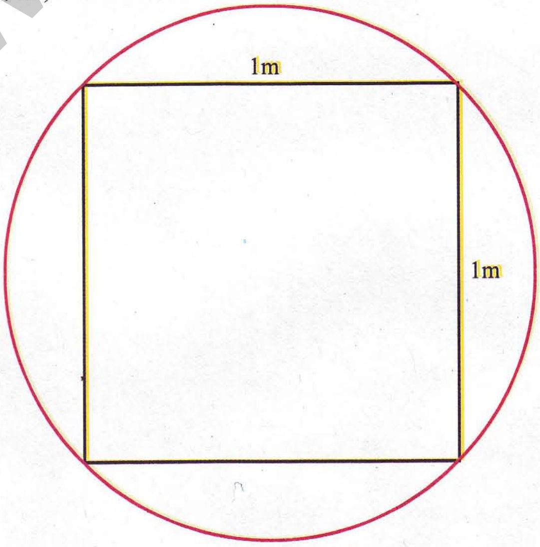
Je vais plus loin

Activité 1 :

Sidi un menuisier métallique prépare deux sortes de grilles pour deux fenêtres différentes. La première a pour dimension 1 m × 1 m ; la deuxième 2 m × 1 m.
Il charge son fils Ali élève de 4ème AS de lui estimer la longueur du métal nécessaire pour construire les diagonales de chacune des deux grilles.
Aide Ali à accomplir cette tâche.
(On donne $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$; $2,23 < \sqrt{5} < 2,42$)

Activité 2 :

Donne un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la longueur d'un cercle circonscrit à un carré de côté 1m.
(On donne $3,14 < \pi < 3,15$).



Activité 3 :

7 petits cubes juxtaposés occupent une longueur de 4m.
a) Calcule le volume d'un petit cube.
b) Calcule sa surface latérale et sa surface totale.

Activité 4 : Lors d'une séance de mathématiques en 4[ème] AS, le professeur a donné l'expression $|2x+3|$; il a chargé un groupe d'élèves de calculer cette expression pour des réels inférieurs à -1,5 ; un autre groupe de calculer la même expression pour des réels supérieurs à -1,5.

Les travaux des deux groupes sont consignés dans le tableau suivant :

	Groupe 1					Groupe 2				
x	-3	-2,5	-2	-1,7	-1,6	-1,4	-1,2	-1	0	1
2x + 3										
$\|2x+3\|$	3					0,2				

a) Complète les calculs

b) Compare les résultats du 1[er] groupe avec 2x + 3, que remarques-tu ?

c) Compare les résultats du 2[ème] groupe avec 2x + 3, que remarques-tu ?

Je retiens

1. Opérations sur des réels définis par des encadrements

Règles : a, b et x étant des nombres quelconques :

Si $a < x < b$ alors $-b < -x < -a$

a, b et x étant des nombres strictement positifs :

Si $a < x < b$ alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$.

Calcul d'un encadrement

• **d'une somme** $a < x < b$ $c < y < d$ $a + c < x + y < b + d$ • **d'une différence** $a < x < b$ $c < y < d$ d'où $a < x < b$ $-d < -y < -c$ $a - d < x - y < b - c$	• **d'un produit** $a < x < b$ $c < y < d$ $a c < x . y < bd$ • **d'un quotient** a, b positifs ; c et d strictement positifs $a < x < b$ $c < y < d$ d'où $a < x < b$ $\frac{1}{d} < \frac{1}{y} < \frac{1}{c}$ ----------------- $\frac{a}{d} < \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$

2. Puissance relative d'un réel.

Exemples :

- $(\frac{4}{7})^3 = \frac{64}{343}$
- $(\frac{2}{3})^{-4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$
- $(\sqrt{5})^4 = \sqrt{625} = 25$
- $(\pi)^{-5} = \frac{1}{\pi^5}$ (on utilise la touche x^y de la calculatrice)

3. Ecrire une expression sans valeur absolue :

L'expression $|ax + b|$ s'écrit

- $ax + b$; pour $x > \frac{-b}{a}$; $a > 0$
- $-(ax + b)$; pour $x < \frac{-b}{a}$; $a > 0$
- $(ax + b)$; pour $x < \frac{-b}{a}$; $a < 0$
- $-(ax + b)$; pour $x > \frac{-b}{a}$; $a < 0$

Je sais faire

1. Trouver un encadrement d'une somme, d'un produit et d'un quotient

Exercice 1: x et y sont des réels tels que : $-0,2 < x < 1,3$; $-2,1 < y < 2,5$

Donne un encadrement des nombres suivants :

1) $x + y$ 2) $x - y$ 3) $x.y$ 4) $\frac{x}{y}$

5) $3x - 2y$ 6) $2x + 3y$ 7) $6xy$ 8) $\frac{2x}{3y}$

2. Calculer la puissance entière relative d'un réel

Exercice 2: Calcule :

a) $(\sqrt{2})^9 =$

b) $(\sqrt{7})^{-3} =$

c) $(\frac{\pi}{5})^4 =$

d) $(\sqrt{11}\pi)^{-5}$

3. Ecrire sans valeur absolue des expressions

Exercice 3 : Ecris sans valeur absolue les expressions :

a) $|5x - 2|$

b) $|-3x + 7|$

c) $|-2x - 5|$

d) $|7x + 3|$

Table des carrés des nombres de 0 à 100

nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré
1	1	11	121	21	441	31	961	41	1681
2	4	12	144	22	484	32	1024	42	1764
3	9	13	169	23	529	33	1089	43	1849
4	16	14	196	24	576	34	1156	44	1936
5	25	15	225	25	625	35	1225	45	2025
6	36	16	256	26	676	36	1296	46	2116
7	49	17	289	27	729	37	1369	47	2209
8	64	18	324	28	784	38	1444	48	2304
9	81	19	361	29	841	39	1521	49	2401
10	100	20	400	30	900	40	1600	50	2500

nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré	nombre	carré
51	2601	61	3721	71	5041	81	6561	91	8281
52	2704	62	3844	72	5184	82	6724	92	8464
53	2809	63	3969	73	5329	83	6889	93	8649
54	2916	64	4096	74	5476	84	7056	94	8836
55	3025	65	4225	75	5625	85	7225	95	9025
56	3136	66	4356	76	5776	86	7396	96	9216
57	3249	67	4489	77	5929	87	7569	97	9409
58	3364	68	4624	78	6084	88	7744	98	9604
59	3481	69	4761	79	6241	89	7921	99	9801
60	3600	70	4900	80	6400	90	8100	100	10000

CORRECTION

1. 1) $-2,3 < x + y < 3,8$; 2) $-2,7 < x - y < 0,8$; 3) $4,2 < xy < 3,25$; 4) $\frac{2}{25} < \frac{x}{y} < \frac{13}{21}$;

5) $-4,4 < 3x - 2y < 8,1$; 6) $-5,9 < 2x + 3y < 10,1$; 7) $2,52 < 6xy < 19,5$;

8) on distingue deux cas :

- $-0,2 < x < 1,3$ et $-2,1 < y < 0$

$\Rightarrow -0,4 < 2x < 2,6$ et $-6,3 < 3y < 0$, d'où $\frac{1}{3y} < \frac{-1}{6,3}$, d'où $\frac{2x}{3y} < \frac{-2,6}{6,3}$; $\frac{-0,4}{6,3} < \frac{2x}{3y}$

donc $\frac{-0,4}{6,3} < \frac{2x}{3y} < \frac{-2,6}{6,3} \to 1$

- $-0,2 < x < 1,3$ et $0 < y < 2,5$

$\Rightarrow -0,4 < 2x < 2,6$ et $0 < 3y < 7,5$; d'où $\frac{1}{7,5} < \frac{1}{3y}$; $\frac{-0,4}{7,5} < \frac{2x}{3y}$; $\frac{2x}{3y} < \frac{2,6}{7,5}$

donc $\frac{-0,4}{7,5} < \frac{2x}{3y} < \frac{2,6}{7,5} \to 2.$

De 1 et 2 $\frac{-4}{75} < \frac{2x}{3y} < \frac{4}{63}$

2. a) $(\sqrt{2})^9 = \sqrt{512} = 16\sqrt{2}$; b) $(\sqrt{7})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt{7})^3} = \frac{1}{\sqrt{343}}$; c) $(\frac{\pi}{\sqrt{5}})^4 = \frac{\pi^4}{(\sqrt{5})^4} = \frac{\pi^4}{5^2}$

d) $(\sqrt{11}\pi)^{-5} = \frac{1}{(\sqrt{11}\,\pi)^5} = \frac{1}{\pi^5\sqrt{161051}}$

3.

$$|5x-2| \begin{cases} \nearrow \; 5x - 2 \quad \text{pour } x > \frac{2}{5} \\ \searrow \; 2 - 5x \quad \text{pour } x < \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$|-3x+7| \begin{cases} \nearrow \; -3x + 7 \text{ pour } x < \frac{7}{3} \\ \searrow \; 3x - 7 \text{ pour } x > \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$|-2-5x| \begin{cases} \nearrow \; -2 - 5x \quad \text{pour } x < \frac{-2}{5} \\ \searrow \; 2 + 5x \quad \text{pour } x > \frac{-2}{5} \end{cases}$$

$$|7x+3| \begin{cases} \nearrow \; 7x + 3 \quad \text{pour } x > \frac{-3}{7} \\ \searrow \; -7x - 3 \quad \text{pour } x < \frac{-3}{7} \end{cases}$$

Je m'exerce

Intervalles

1. Représente sur un même axe les intervalles $[-4 ; -2]$, $[-3 ; 0]$ et $[-\sqrt{8};\sqrt{5}]$.
Hachure la partie commune à ces trois intervalles.

2. Ecris sou forme d'intervalles les ensembles de nombres qui vérifient les inégalités suivantes :
$-7 \leq x \leq \sqrt{5}$; $-2 < x \leq \sqrt{8}$; $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}$, $0 < x < 3$.
Donne les amplitudes de ces intervalles.

3. Traduis par une double inégalité chacune des relations d'appartenance suivantes :
$x \in [-4 ; -1]$, $[\sqrt{3} ; 2[$, $x \in]-3 ; \frac{5}{\sqrt{2}} - 2]$,
$x \in [0 ; 1[$, $x \in [-3 ; 0[$.

4. Détermine le milieu des intervalles :
$[-5 ; 1]$, $[-\frac{3}{2} ; \frac{7}{2}[$, $]\sqrt{2} ; \sqrt{5}]$; $]\frac{1}{\sqrt{3}} ; \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

Comparer des inverses, des carrés et des racines carrés.

5. Calcule $(5\sqrt{3})^2$ et 10^2. Compare ensuite $5\sqrt{3}$ et 10, puis $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{5\sqrt{3}}$.

6. Compare $(2\sqrt{3})^2$ et $(3\sqrt{2})^2$. Compare ensuite $2\sqrt{3}$ et $3\sqrt{2}$, puis $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{3\sqrt{2}}$.

7. On a $2 < \sqrt{5} < 3$. Montre que $1 < \sqrt{5} - 1 < 2$.
Trouve deux entiers consécutifs a et b tels que :
$a < \frac{1}{\sqrt{5} - 1} < b$.

Encadrer une somme et une différence

8. $\sqrt{80} + \sqrt{30}$; $\sqrt{80} - \sqrt{30}$.

Encadrer un produit et un quotient

9. $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{35} \times \sqrt{82}$; $(2+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})$.

10. Valeur absolue d'un nombre réel.
Quels sont les nombres qui ont respectivement 2 ; 5 ; $\frac{5}{2}$ et $\sqrt{8}$ pour valeur absolue?

11. Calcule $1 + |-3|$; $5 - |-4|$; $|-3| - |-2|$;
$3 - \frac{1}{|-5|}$; $\left|-\frac{\sqrt{3} - \sqrt{12}}{\sqrt{3}} + 3\right|$.

12. Trouve un nombre x tel que : $|x| - 3 = 5$.

Exercices de recherches et problèmes

13. L'aire d'un disque de rayon R est égale à $32{,}36\ m^2$. On donne $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.
Donne un encadrement de R avec 4 chiffres décimaux, en utilisant la table des carrés.
Déduis-en un encadrement de R avec deux chiffres décimaux.

14. On veut construire un réservoir cylindrique de 2 250 litres de capacité et de 75 cm de hauteur. On appelle r le rayon du réservoir.
Donne un encadrement de r^2.
A l'aide de la table des carrés, déduis-en la valeur de r à 1 cm près. On donne $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

15. Donne un encadrement de $x = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + 5\sqrt{2}$

Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

16. Soit $x = \sqrt{37 + 12\sqrt{7}}$ et $y = \sqrt{37 - 12\sqrt{7}}$.
Calcule $(3 + 2\sqrt{7})^2$ et $(3 - 2\sqrt{7})^2$, puis simplifie x et y. Calcule x + y et x - y.
Calcule des valeurs approchées de x + y et de x – y avec deux décimales sachant que :
$2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$.

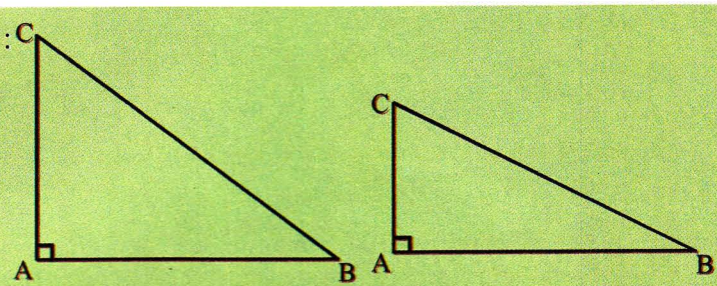
3 Radicaux

Je me souviens

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que : AB = 4cm ; AC = 3 cm.

- Calcule l'aire de ce triangle.
- Trouve la mesure du côté BC.

- Reprends le même travail avec les mesures : AB = 8 cm et AC = 6 cm.

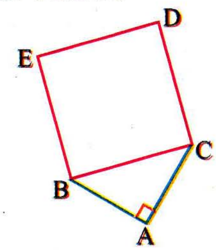


Je vais plus loin

Activité 1 :

Je sais construire un carré dont l'aire est 4 cm ; 9 cm ; 25 cm …
Mon frère étant élève en 5ème année sait construire un carré dont l'aire est n'importe quel nombre réel positif.
A titre d'exemple il m'a proposé la démarche suivante afin de construire un carré dont l'aire est 2 cm^2 :

- Construis un triangle ABC rectangle isocèle en A, de côté 1 cm, puis le carré BCDE de côté [BC] extérieur au triangle ABC.
- Démontre que l'aire du carré BCDE est égale à 2 cm^2. Tire une conclusion.



Activité 2 :

Lors d'un exercice fait en classe, trois élèves cherchent à déterminer le côté d'un carré dont l'aire est donnée. A la place de ces élèves fais le travail.

Diallo	Sidi	Aicha
$x^2 = 16$ • Complète : $4^2 = \dots$ et $(-4)^2 = \dots$ • Combien de nombres positifs ont 16 pour carré ? • Combien de nombres négatifs ont 16 pour carré ? • Quels sont les nombres dont le carré est égal à 16? • En déduis le côté du carré d'aire 16 cm^2.	$x^2 = 3$ • Complète : $(\sqrt{3})^2 = \dots$ et $(-\sqrt{3})^2 = \dots$ • Combien de nombres positifs ont 3 pour carré ? • Combien de nombres négatifs ont 3 pour carré ? • Quels sont les nombres dont le carré est égal à 3? • En déduis le côté du carré d'aire 3 cm^2.	$x^2 = -3$ Existe-t-il des nombres dont le carré est -3 ? y a-t-il des solutions de l'équation $x^2 = -3$ Résous l'équation $x^2 = 0$.
On écrit $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$		

Activité 3 :

Produit de racines carrées

Sans calculatrice, calcule :

- $\sqrt{9\times 4}$ et $\sqrt{9}\times\sqrt{4}$
- $\sqrt{25\times 4}$ et $\sqrt{25}\times\sqrt{4}$
- $\sqrt{16\times 9}$ et $\sqrt{16}\times\sqrt{9}$
- Quel résultat peux-tu en déduire ?
- Un élève a calculé l'expression
  $\sqrt{6}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}$, trouve le résultat attendu ?
- Recopie et complète le calcul suivant : $(\sqrt{2}\times\sqrt{3})^2 = \ldots^2 \times \ldots^2 = \ldots\times\ldots =$
  Ce calcul permet- il d'affirmer que $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}$?
- On veut démontrer que l'égalité $\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est vraie pour tous les nombres réels positifs a et b.
  Recopie la démonstration en la complétant ?
  Calculons le carré de $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$:
  $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2$
  D'après la définition de la racine carrée :
  $(\sqrt{a})^2 = \ldots$ et $(\sqrt{b})^2 = \ldots$
  On reporte ces valeurs dans l'égalité précédente :
  $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2 = \ldots$
  Ainsi, le nombre $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ est le produit de deux nombres positifs ; il est donc, … et son carré est égal à ….On en déduit que : ….= ….

Activité 4 :

Propriétés

Quotient de racines carrées

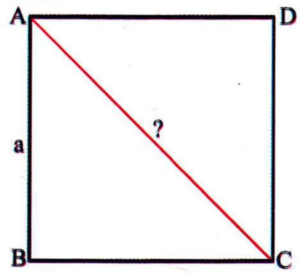
Démontre que : $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a>;\ b>0$

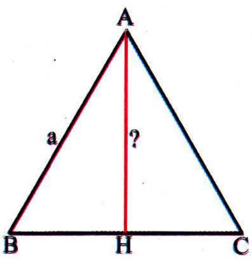
Somme et différence

Compare $\sqrt{16+9}$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; $\sqrt{169-25}$ et $\sqrt{169}$ - $\sqrt{25}$

Application des règles de calcul en géométrie

a) Diagonale d'un carré





ABCD étant un carré de côté a,

exprime AC^2 en fonction de a,

en déduis AC en fonction de a.

b) Hauteur d'un triangle équilatéral

ABC étant un triangle équilatéral de côté a, on appelle H le pied de la hauteur issue de A.

- Quelle est la nature du triangle AHB ? Que représente H pour le segment [BC] ?
- En appliquant la propriété de Pythagore, exprime AH^2 en fonction de a.
- En déduis l'expression de AH en fonction de a.

Je retiens

1. Racine carrée d'un nombre positif

a étant un nombre positif ($a \geq 0$), la racine carrée de a est le nombre positif dont le carré est égal à a.

La racine carrée de a se note $\sqrt{a}$ (se lit racine carrée de a ou radical de a).

Résultat : D'après la définition :

- La racine carrée de a est le nombre positif $\sqrt{a} \geq 0$
- Le carré de $\sqrt{a}$ est égal à : a ; $(\sqrt{a})^2 = a$, si $a > 0$
- $\sqrt{a}$ n'a pas de sens si a est strictement négatif.

Attention : *Il ne faut pas confondre les deux questions suivantes :*

- *Quelle est la racine carrée de 9 ? (ou $\sqrt{9}$?)*

  Réponse $\sqrt{9} = 3$
- *Trouve les réels dont le carré est égal à 9 ?*

  (ou résoudre dans IR l'équation $x^2 = 9$)

  Réponse il y a deux nombres réels dont le carré est égal à 9, c'est 3 et -3

Remarque : $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$.

❖ Tout nombre réel positif a un radical, ce radical peut prendre l'une des formes suivantes :

▪ Un décimal ▪ Un rationnel ▪ Ni décimal, ni rationnel, la calculatrice donne une valeur approchée comme dans l'exemple ci-contre.	**Exemples**	▪ $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{0,64} = 0,8$ ▪ $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3}$ ▪ $\sqrt{2} \approx 1,414213562$

2. Equation $x^2 = a$

a) Cas où $a > 0$

Cherchons les solutions de l'équation $x^2 = 2$.

Comme $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les deux nombres dont le carrée est égal à 2, donc l'équation $x^2 = 2$ admet deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

b) Cas où $a = 0$

Recherchons les solutions de l'équation $x^2 = 0$.

Comme 0 est le seul nombre dont le carré est 0, donc l'équation $x^2 = 0$ a une seule solution qui est 0.

c) Cas où $a < 0$

Recherchons les solutions de l'équation $x^2 = -5$.

Comme le carré d'un nombre x est un nombre positif, donc l'équation $x^2 = -5$ n'a pas de solutions.

3. Calcul avec les radicaux

Produit	Quotient
La racine carrée du produit de deux nombres positif est égale au produit des racines carrées de ces deux nombres. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; pour tout $a \geq 0$ et $b \geq 0$ **Exemple :** $\sqrt{9 \times 36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$ $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5 \times \sqrt{2}$	La racine carrée du quotient de deux nombres positif est égale au quotient des racines carrées de ces deux nombres : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pour tout $a \geq 0$ et $b > 0$ **Exemple :** $\sqrt{\dfrac{1}{81}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{81}} = \dfrac{1}{9}$

Remarque : on peut aussi appliquer des égalités pour:

- Transformer un produit de racines carrées en racine carrée d'un produit.
- Transformer un quotient de racines carrées en racine carrée d'un quotient.
- Rendre rationnel le dénominateur d'un nombre.

Exemples : $\sqrt{2}\times\sqrt{50}=\sqrt{2\times 50}=\sqrt{100}=10$; $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$;

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Attention : pour tous les nombres a et b non nuls : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$; $\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Exemples :
$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}\approx 3{,}065$; $\sqrt{9}+\sqrt{4}=3+2=5$ donc $\sqrt{9+4}\neq\sqrt{9}+\sqrt{4}$

$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}\approx 2{,}231$; $\sqrt{9}-\sqrt{4}=3-2=1$ donc $\sqrt{9-4}\neq\sqrt{9}-\sqrt{4}$

Je sais faire

1. Trouver le radical d'un carré parfait

Exercice 1: donne le radical de chacun des nombres suivants : 16 ; 49 ; 64 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{9}{81}$; 100 ; 0,25 ; 3^{2006}

2. Appliquer les propriétés des radicaux

Exercice 2: Ecris le plus simplement possible les expressions suivantes :
$\sqrt{6^2}$; $\sqrt{(-7)^4}$; $\sqrt{16\times 25}$; $\sqrt{36\times 64}$

Exercice 3: Ecris plus simplement : $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$; $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$; $\sqrt{7}\times\sqrt{7}$; $\sqrt{2}\times\sqrt{12{,}5}$; $\sqrt{7{,}2}\times\sqrt{5}$

Exercice 4 : Ecris plus simplement chacune des écritures : $\sqrt{\frac{9}{100}}$; $\sqrt{\frac{81}{36}}$; $\sqrt{\frac{144}{625}}$; $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$

3. Ecrire un radical sous la forme $b\sqrt{a}$

Exercice 5 : a) Ecris les nombres $\sqrt{18}$ et $\sqrt{8}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers.

b) Simplifie l'écriture de l'expression : $5\sqrt{18}-7\sqrt{8}-3\sqrt{2}$

4. Trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$ où a n'est pas un carré parfait

Exercice 6 : Donne une valeur approchée de $\sqrt{3}$, puis calcule une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Rendre un dénominateur rationnel

Exercice 7 : Ecris le quotient $\frac{7}{\sqrt{5}}$ sans radical au dénominateur.

6. Calculer et simplifier des expressions contenant des radicaux

Exercice 8 : a) Donne l'écriture la plus simple possible du nombre $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

b) Développe l'expression $\sqrt{3}(5\sqrt{2}-\sqrt{3})$, puis écris-le résultat sous la forme la plus simple possible.

CORRECTION

1. le tableau suivant donne les radicaux des nombres donnés :

Nombre	16	49	64	100	0,25	3^{2006}	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{81}$
Radical	4	7	8	10	0,50	3^{1003}	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{9}$

2. Ecriture simplifiée demandée:

$\sqrt{6^2} = 6$; $\sqrt{(-7)^4} = |-7|^2 = 7^2$;

$\sqrt{16 \times 25} = \sqrt{16} \times \sqrt{25} = 4 \times 5 = 20$;

$\sqrt{36 \times 64} = \sqrt{36} \times \sqrt{64} = 6 \times 8 = 48$

3. Ecriture simplifiée demandée:

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$; $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$;

$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = \sqrt{7 \times 7} = \sqrt{49} = 7$; $\sqrt{2} \times \sqrt{12{,}5} = \sqrt{2 \times 12{,}5} = \sqrt{25} = 5$;

$\sqrt{7{,}2} \times \sqrt{5} = \sqrt{7{,}2 \times 5} = \sqrt{36} = 6$

4. Ecriture simplifiée demandée:

$\sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{3}{10}$; $\sqrt{\frac{81}{36}} = \frac{\sqrt{9^2}}{\sqrt{6^2}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$;

$\sqrt{\frac{144}{625}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{625}} = \frac{12}{25}$; $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{25}{5}} = \sqrt{5}$;

$\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{147}{3}} = \sqrt{49} = 7$; $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$

5. a) Ecriture demandée:

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$;

$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b) On simplifie l'expression en utilisant les écritures précédentes :

$5\sqrt{18} - 7\sqrt{8} - 3\sqrt{2} = 5 \times 3\sqrt{2} - 7 \times 2 \times \sqrt{2} - 3\sqrt{2} =$

$15\sqrt{2} - 14\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (15 - 14 - 3)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

6. Je sais que : $(1{,}7)^2 = 2{,}89$ et que $(1{,}8)^2 = 3{,}24$.

C'est- à- dire que : $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$

Donc, je peux prendre 1,7 comme valeur approchée par défaut de $\sqrt{3}$. J'écris donc, $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.

- $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{1}{1{,}7}$; $\frac{1}{1{,}7} = \frac{10}{17}$.

$\frac{10}{17} \approx 0{,}6$. On peut remarquer que : $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; comme $\sqrt{3} \approx 1{,}7$; donc $\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \frac{1{,}7}{3} \approx 0{,}6$

7. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{5}$, on a : $\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

8. a)L'écriture simplifiée :

$$(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2=(\frac{2\sqrt{3}}{3})(\frac{2\sqrt{3}}{3})=\frac{4\times(\sqrt{3})^2}{3\times3}=\frac{4\times3}{3\times3}=\frac{4}{3}$$

b) L'expression simplifiée : $\sqrt{3}(5\sqrt{2}-\sqrt{3})=5\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=5\sqrt{6}-3$

Je m'exerce

Définition de la racine carrée

1. Réponds par vrai ou faux en justifiant :

a) $\sqrt{36}$ peut être égal à -6

b) $\sqrt{(-5)^2} = -5$

c) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

d) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = 6$

e) $\sqrt{2006}$ est compris entre 44 et 45

f) $\sqrt{(\pi - 4)^2} = \pi - 4$

g) Il existe un nombre réel a tel que $\sqrt{a} = a$

h) La moitié de $\sqrt{18}$ est $\sqrt{9}$

i) Le triple de $\sqrt{5}$ est $\sqrt{15}$

j) Le produit de 7 par $\sqrt{3}$ est $\sqrt{147}$

k) La somme de $\sqrt{7}$ et de $\sqrt{9}$ est $\sqrt{16}$

l) 5 est le carré de ($\sqrt{2} + \sqrt{3}$)

m) L'inverse de $2\sqrt{3}$ est $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

2. Quelle est la racine carrée de chacun nombres suivants :
49 ; 64 ; 25 ; 9 ; 144 ; 100 ; 121 ; 81 ; 10 000 ; 10^{16}

3. Recopie et complète :

$4^2 = \ldots$	$(-4)^2 = \ldots$	$\sqrt{16} = \ldots$
$2,3^2 = \ldots$	$(-2,3)^2 = \ldots$	$\sqrt{5,29} = \ldots$
$0,5^2 = \ldots$	$(-0,5)^2 = \ldots$	$\sqrt{0,25} = \ldots$
$90^2 = \ldots$	$(-90)^2 = \ldots$	$\sqrt{8100} = \ldots$

4. Recopie et complète :

a. $12^2 = \ldots$ $\qquad \sqrt{\ldots} = 12$

b. $13^2 = \ldots$ $\qquad \sqrt{\ldots} = 13$

c. $0,6^2 = \ldots$ $\qquad \sqrt{\ldots} = 0,6$

d. $1,3^2 = \ldots$ $\qquad \sqrt{\ldots} = 1,3$

5. Recopie et complète :

a. $(\frac{2}{3})^2 = \ldots$ $\qquad \sqrt{\frac{4}{9}} = \ldots$

b. $(\frac{5}{7})^2 = \ldots$ $\qquad \sqrt{} = \frac{5}{7}$

6. Recopie et complète :

a. $(10^3)^2 = \ldots$ $\qquad \sqrt{10^6} = \ldots$

b. $(10^4)^2 = \ldots$ $\qquad \sqrt{10^8} = \ldots$

7. Recopie et complète :

a. $10^4 = (10^{\cdots})^2$ $\qquad \sqrt{10^4} = \ldots$

b. $10^6 = (10^{\cdots})^2$ $\qquad \sqrt{10^6} = \ldots$

c. $10^{14} = (10^{\cdots})^2$ $\qquad \sqrt{10^{14}} = \ldots$

8. Calcule : $\sqrt{10^8}$; $\sqrt{10^{12}}$; $\sqrt{10^{22}}$; $\sqrt{10^{38}}$

9. Calcule : $\sqrt{10^{-20}}$; $\sqrt{10^{-12}}$; $\sqrt{10^{-8}}$; $\sqrt{10^{-14}}$.

10. Calcule :

a. $\sqrt{0,49}$; $\sqrt{2500}$; $\sqrt{0,81}$

b. $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt{\frac{9}{49}}$

c. $\sqrt{10^{12}}$; $\sqrt{10^{-32}}$; $\sqrt{10^{10}}$

11. Compare $\sqrt{(-5)^2}$ et $\sqrt{5^2}$; $\sqrt{7^2}$ et $-\sqrt{7^2}$

12. Comment choisir x pour que $\sqrt{x-3}$ ait du sens.

13. Parmi les écritures suivantes, quelles sont celles qui ont du sens ?
$\sqrt{-16}; \sqrt{(-4)^2}; -\sqrt{-100}; -\sqrt{16}; (\sqrt{-3})^2; -(\sqrt{3})^2;$
$\sqrt{(-3)^2}; \sqrt{-(3)^2};$

Opérations et racines carrées

14. Ecris plus simplement :

a. $\sqrt{4 \times 64}; \sqrt{9 \times 16}; \sqrt{16 \times 49}; \sqrt{25 \times 121}; \sqrt{2} \times \sqrt{32}$;
$\sqrt{2} \times \sqrt{72}; \sqrt{3} \times \sqrt{27}; \sqrt{23} \times \sqrt{23}; \sqrt{4} \times \sqrt{6,25}$

b. $2\sqrt{7} \times 5\sqrt{28}; \sqrt{7} \times \sqrt{\frac{81}{7}}$

c. $\sqrt{80} \times \sqrt{20}; \sqrt{45} \times \sqrt{60} \times \sqrt{12}$

15. a et b sont des nombres entiers naturels.
Ecris plus simplement.

a. $\sqrt{\frac{1}{9}}$; $\sqrt{\frac{16}{25}}$; $\sqrt{\frac{49}{81}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{\frac{32}{50}}$

b. $\sqrt{\frac{12}{27}}$; $\sqrt{\frac{5}{36}}$; $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}}$; $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{45}}$; $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{80}}$

c. $5\times\sqrt{\frac{5}{49}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}\times\sqrt{\frac{100}{147}}$; $\sqrt{\frac{49\times16}{25}}$

16. Donne l'écriture la plus simple possible des nombres suivants :
$A = 4(\sqrt{5})^2 - 8$; $B = 1{,}5(\sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{3})^2 + 7$.

17. Calcule la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent :
a) 7 cm et 3 cm ; b) 5,7 cm et 2,5 cm.
On donnera la valeur exacte puis l'arrondi au centième de centimètre.

18. Calcule l'aire d'un disque dont l'aire est égale à celle d'un triangle de base 2,6 cm de hauteur associée 5,2 cm.

Calcul avec les radicaux

19. a) Mets les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un nombre décimal.
$A = 3\sqrt{2} - 1{,}5\sqrt{2}$; $B = 0{,}7\sqrt{2} + 1{,}8\sqrt{2} - \sqrt{2}$
$C = 8 \times 4{,}5\sqrt{2}$; $D = 7\sqrt{2}\times1{,}2 - 4\sqrt{2}$
b) avec la calculatrice, trouve les arrondis au millième des nombres A, B, C et D.

20. a) Développe les expressions suivantes en écrivant le résultat le plus simplement possible.
$A = \frac{1}{3}(4{,}5 - 18\sqrt{3})$; $B = 2\sqrt{3}(5 - 4\sqrt{3})$
b) Avec la calculatrice, trouve les arrondis au dix millième (10^{-4}) des nombres A et B.

21. ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. Le point I est le milieu de la base [BC].
AI = 5 cm ; BC = 4 cm.
Calcule le périmètre P de ce triangle. On donnera la valeur exacte, puis son arrondi à 10^{-2} centimètre.

22. L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle tel que $AB = 7 - \sqrt{5}$;
$BC = 7 + \sqrt{5}$ et $AC = 6\sqrt{3}$
Le triangle ABC est-il rectangle ?

23. Développe les expressions suivantes et écris les résultats sous la forme la plus simple possible.

a. $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$; $\sqrt{5}(2-\sqrt{5})$.
b. $2\sqrt{3}(\sqrt{3}-5)$; $3\sqrt{2}(\sqrt{2}+4)$
c. $7\sqrt{5}(2\sqrt{5}+1)$; $\sqrt{3}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$

Ecriture d'un quotient sans radical au dénominateur

24. Ecris les nombres suivant sans le symbole $\sqrt{\ }$ au dénominateur :

$\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$; $\frac{-2}{-1-\sqrt{5}}$

$\frac{3}{\sqrt{7}}$; $\frac{1}{5-\sqrt{3}}$; $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$; $\frac{-3}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

$\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}-\sqrt{11}}$; $\frac{\sqrt{2}-5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

25. Rends rationnel le dénominateur des rapports suivants :

a. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{3}{\sqrt{3}-2}$; $\frac{1}{2\sqrt{5}-5\sqrt{2}}$

b. $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$; $\frac{7\sqrt{2}-3}{4-\sqrt{2}} + \frac{3-7\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$

26. Prouve que : $\frac{3\sqrt{2}+12}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

Equation $x^2 = a$

27. Résous les équations suivantes :
a) $x^2 = 4$; b) $x^2 = 0$
c) $x^2 = 1$; d) $x^2 = 16$
e) $x^2 = 10$; f) $x^2 = 0{,}7$
g) $x^2 = -3$; h) $x^2 = 1{,}5$

28. Vrai ou faux?
a. L'équation $x^2 = \pi - 3$ a deux solutions
b. L'équation $x^2 = 3 - \pi$ a deux solutions
c. L'équation $x^2 + 25 = 0$ a deux solutions
d. L'équation $x^2 - 25 = 0$ a deux solutions
e. L'équation $x^2 + \sqrt{36} = 6$ n'a pas de solutions

29. En géométrie
L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la perpendiculaire en O à l'axe x'Ox, on a placé un point A tel que OA = 2.
Le cercle de centre A de rayon 3 coupe l'axe en

deux points B et B'.
Montre que les abscisses des points B et B' sont les solutions de l'équation $x^2 = 5$.

Approfondissement

30. On note a le nombre réel $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Montre que $a^2 = a + 1$ et $\dfrac{1}{a} = a - 1$

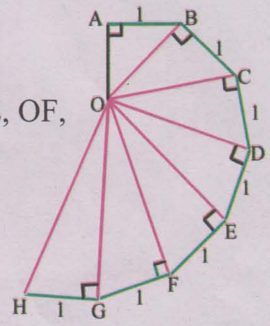
31. Montre qu'un rectangle MNOP tel que :
$MN = \sqrt{63} - \sqrt{28}$ et $NO = \sqrt{252} - \sqrt{175}$ est un carré et que son aire est un entier.
Calcule son périmètre.

32. Deux cercles concentriques ont pour rayons $r = 1$ et $r' = 8$.
Calcule l'aire de la couronne formée par ces deux cercles. Mets le résultat sous la forme $a\sqrt{b}\,\pi$ avec a et b entiers.

33. Sans calculatrice, calcule :

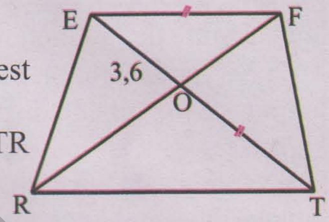
$$\sqrt{43+\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}}}$$

34. Reproduis la figure ci-contre à l'échelle 5.



a. Calcule les valeurs exactes de OB, OC, OD, OE, OF, OG et OH.
b. Mesure ces longueurs sur la figure et en déduis des valeurs approchées de $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{6}; \sqrt{7}$.
c. Compare les résultats du b. aux résultats fournis par une calculatrice.

35. Avec Thalès
La figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur représente un trapèze EFTR de bases [EF] et [TR].



EO = 3,6 cm ; RT = 10 cm. EF = OT = a ;
Calcule a.

Module d'intégration 1

Chapitres 1 2 3

Chapitres / Compétences : 1.1 ; 2.1 ; 3 .1

Avec tout ce que tu as appris, et en particulier dans les trois premiers chapitres, tu peux résoudre des problèmes de la vie de tous les jours, dont voici quelques situations problèmes.

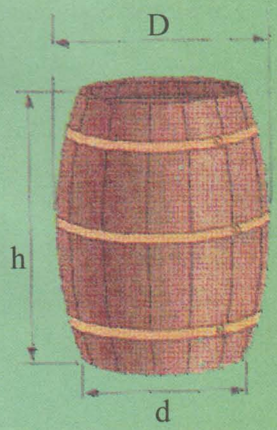
Situation 1

Lecture de l'énoncé

Une unité de production laitière fait la collecte journalière de 1800 ℓ de lait en collaboration avec des fournisseurs différents.
Pour ce travail elle dispose de tonneaux dont la forme est donnée par le dessin ci-contre.
Le responsable technique de l'unité dispose de deux formules théoriques pour calculer approximativement le volume d'un tonneau.

$\mathscr{V} = \frac{\pi h}{16}(2D + d)^2$; $\mathscr{V} = \frac{\pi h}{12}(2D^2 + d^2)$

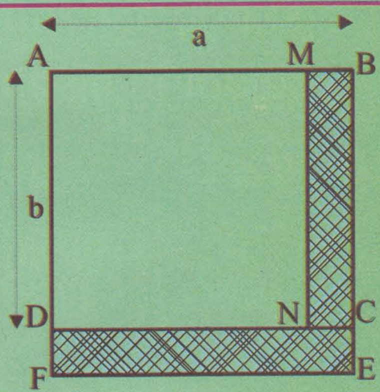
Il affirme que 8 tonneaux suffisent pour faire cette opération et que ces tonneaux peuvent être transporté dans un camion à benne dont les dimensions sont :
$\ell = 1{,}95$ m ; $\mathscr{L} = 2{,}6$ m .
Justifie les propos du responsable en utilisant les deux formules proposées
On donne d = 50 cm ; D = 65 cm ; h = 80 cm.



situation2

Vraisemblance des résultats

Sur la figure ci-contre, ABEF et AMND sont des carrés.
On pose : AB = a et AD = b.



1. Exprime en fonction de a et b :
- la longueur MB,
- le périmètre du rectangle ABCD,
- l'aire du carré ABEF,
- l'aire de la surface hachurée,
- le périmètre de la surface hachurée,

2. Calcule les valeurs numériques des expressions $a - b$; $2(a + b)$; a^2 ; b^2 ; $(a + b)(a - b)$ dans chacun des cas suivants :
- $a = \frac{5}{4}$; $b = \frac{7}{10}$;
- $a = \sqrt{45}\ \frac{5}{4}$; $b = 2\sqrt{5} - 1$;

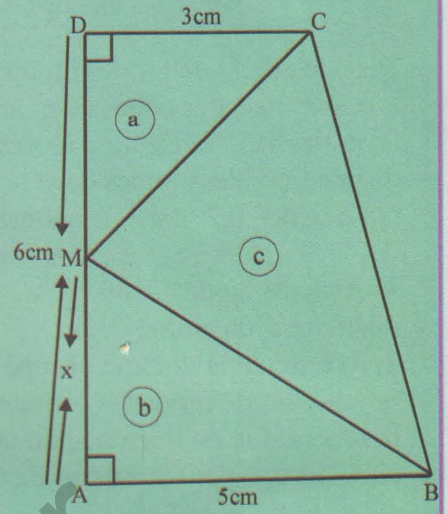
3. Sachant que $b = 12\sqrt{2}$, déterminer la valeur de a pour que l'aire du carré AMND soit égale à la moitié de l'aire du carré ABEF.

Situation3 — Choix des outils

Problème de partage :

Un père a décidé de partager son terrain pour en donner deux parcelles à ces deux enfants.

(Voir dessin fait à l'échelle $\frac{1}{1000}$ sur la figure ci-contre)



Pour ce faire, il a trois choix.

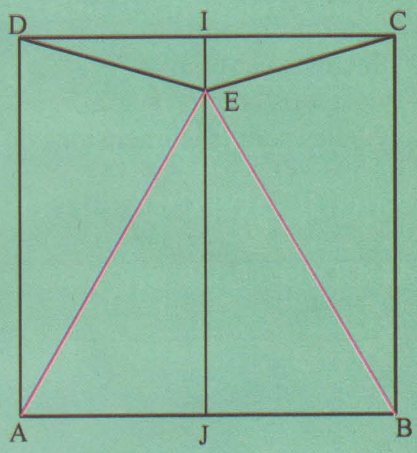
- Premier choix donner la parcelle ⓐ au premier, la parcelle ⓑ au second en gardant pour lui la parcelle ⓒ ;
- Deuxième choix distribuer tout son terrain en donnant les parcelles ⓐ et ⓑ au premier ; la parcelle ⓒ au second,
- Troisième choix garder pour lui la parcelle ⓒ de façon à ce que le triangle MBC soit rectangle en C ; donner la parcelle ⓐ au premier et la parcelle ⓑ au second.

❖ Trouve la valeur de x pour laquelle le partage est équitable pour chaque choix.
❖ Trouve la valeur approchée de l'aire et du périmètre dans chacuns des choix.

Situation4 — Apprentissage du raisonnement

Lors d'une séance sur le calcul des radicaux, le professeur a voulu calculer la valeur exacte de tan(15°).

(Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle = $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$).



Pour ce faire, il a proposé le carré ci-contre, avec les données suivantes :
AB = 10cm ; ABE est équilatéral ; I milieu de [CD] ;
J milieu de [AB].

Il a demandé de répondre aux questions suivantes :

1) Calcule les longueurs exactes de EI et EJ.
2) Détermine les mesures exactes des angles : $\widehat{DAE}; \widehat{ADE}$ puis $\widehat{EDI}$.
3) En déduis la valeur exacte de tan(15°)
(Compare avec la valeur approchée donnée par les tableaux ou la calculatrice.).

Entraînement à l'évaluation

Situation a

Dans le cristal de fer les atomes se trouvent aux sommets des cubes et en leur centre (voir dessin). La figure 2 représente la disposition des atomes dans le plan ABCD.
On a AB = 0,29nm (nanomètre)
BC = 0,41nm (nanomètre)
1) Avec ce modèle calcule AC puis le diamètre d'un atome de fer.
2) a) Calcule le volume occupé par les atomes de fer dans chaque cube.
b) Quel est le pourcentage du volume du cube occupé par les atomes de fer.

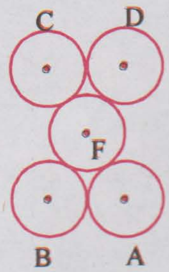


Fig.2

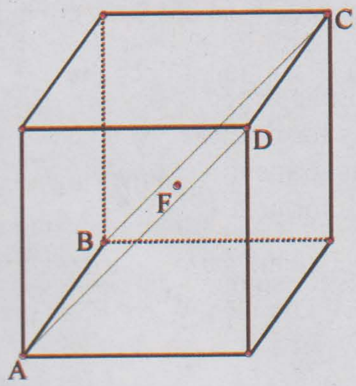
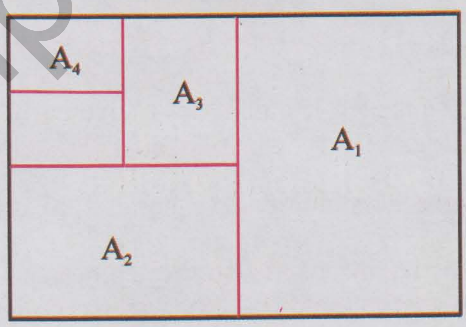


Fig.1

Situation b

La grande feuille ci-contre A_0 a pour aire $1m^2$.
A_1 est la moitié de A_0.
- A_2 est la moitié de A_1.
- A_3 est la moitié de A_2.
- A_4 est la moitié de A_3.

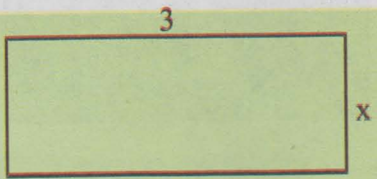
(ces feuilles ont été obtenues par pliages successifs comme sur la figure)
Quelles sont les dimensions de la feuille A_4 ?



5 Calcul littéral

Je me souviens

1.) Exprime le périmètre du rectangle ci-contre :
a) Sous forme d'une somme de quatre termes.
b) Sous forme d'une somme de deux termes.
c) Sous forme d'un produit.



2.) Ecris les sommes algébriques suivantes sans parenthèse.
a) $3 + (x + 2) - (3x - 4)$
b) $-4 - (-2x + 3) + (2x - 1)$.

3.) Développe les produits suivants
a) $2(x - 3)$
b) $5(-2x + 4)$
c) $-3(2x - 5)$
d) $(x - 2)(x - 4)$
e) $(x + 3)(x + 5)$
f) $(x - 4)(x + 7)$

4.) Factorise les expressions suivantes en produits de sommes algébriques:
a) $3x + 27$
b) $x^2 - 5$
c) $4x^2 - 4x$

5.) Réduis les sommes algébriques (en effectuant les calculs possibles et en regroupant les termes en x)
a) $2 - 5x + 8 + 3x$
b) $-x + 3 - 4x + 5$
c) $\frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{3}x + 3$
d) $12{,}5x - 3 - 8x - 7{,}2$

Je vais plus loin

Activité 1 :

Carré d'une somme

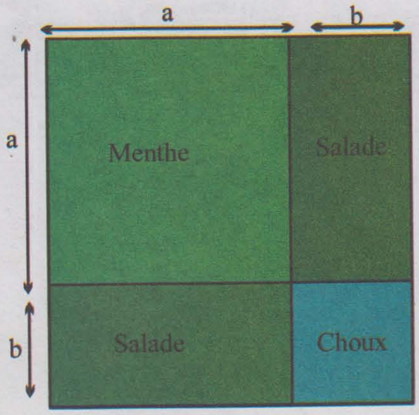
Pour comprendre un phénomène curieux qu'Issa et Moustapha ont constaté :

1. Calcule les expressions suivantes :
- $(3 + 5)^2 - (3^2 + 5^2)$
- $(2 + 4)^2 - (2^2 + 4^2)$
- $[4 + (-3)]^2 - [4^2 + (-3)^2]$

Puis compare les résultats au produit respectif 3×5 ; 2×4 et $(4 \times (-3))$.

2. Développe le carré de la somme de deux nombres a , b puis réduis l'expression obtenue :
$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$.
Trouve le lien entre le résultat obtenu et le résultat observé plus haut.

3. Un jardinier a sa pépinière sous forme d'un carré de côté a + b qu'il divise sous la forme ci-dessous pour y cultiver quatre variétés.
- Aide le jardinier à calculer l'aire de sa pépinière de deux façons différentes.

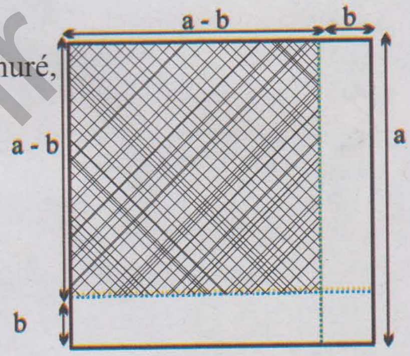


4. En te basant sur la formule ainsi obtenue, calcule à la main les carrés suivants : 11^2 ; 13^2 ; 22^2 (pour cela écris d'abord 11 ; 13 ; 22 sous la forme a + b.

5. Développe le carré de (5x + 3) en utilisant la formule directement.

Activité 2 :

Carré d'une différence



1) Calcule de deux façons différentes l'aire du carré hachuré, en déduis le développement de $(a - b)^2$

2) Utilise l'identité trouvée, et développe le carré de (5x – 3).

3) Développe les expressions suivantes $(x - 5)^2$; $(2x - 5)^2$

Activité 3 :

Produit de (a + b)(a – b)

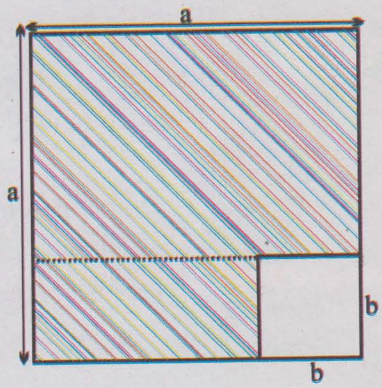
a) Calcule :

- $(5 + 2)(5 - 2)$ et $5^2 - 2^2$
- $(7 + 4)(7 - 4)$ et $7^2 - 4^2$

Qu'observes-tu ?

b) Démontre les égalités observées en a) qui peuvent se généraliser.

c) Un éleveur a un terrain carré de côté a, sur ce terrain il doit construire un grand hangard de forme carré de côté b. Retrouve l'identité trouvée en b) en ressemblant les deux parties de la figure hachurée (correspondant à la culture de forages).



d) Calcule à la main les produits 21×19 ; 32×28 ; (utilise l'identité trouvée en b), (décompose $21 \times 19 = (20 + 1)(20 - 1)$).

e) Développe les produits suivants : $(5x + 3)(5x - 3)$; $(x + 3)(x - 3)$; $(2x - 5)(2x + 5)$.

Activité 4 :

Factorisation

1) Les expressions suivantes sont des sommes ou des différences de produits qui ont des facteurs communs.

Retrouve le facteur commun, dans chaque expression, puis factorise.

$A = 5x(3x + 1) + 5x(x - 1)$; $B = (x - 3)(2x + 1) + (x - 3)(4x)$;

$C = (x - 2)(3x + 4) + (x - 5)(x - 2)$

2) Dans un cube de bois d'arête a, on a découpé un cylindre de rayon $\frac{a}{3}$, d'axe parallèle à une arête.

- Détermine le volume du solide obtenu.
- Ecris ce volume sous la forme factorisée.

3) Factorisation avec les identités remarquables :

- En appliquant les identités remarquables, transforme les expressions suivantes de façon à calculer mentalement :

$2000^2 - 1999^2$; $9992 + 2 \times 999 + 1$; $501^2 - 2(501) + 1$

- Parmi les expressions suivantes laquelle est l'expression factorisée de $9x^2 - 25$

$(9x - 5)(x + 5)$	$(9x - 5)(9x + 5)$	$(4{,}5x - 5)(4{,}5x + 5)$
$(3x - 5)(3x + 5)$	$(3x - 25)(3x + 1)$	$(9x - 25)(x - 1)$

Complète les égalités

$x^2 - 4x + 4 = (x - \ldots)^2$	$x^2 + 2x + 1 = (x + \ldots)^2$
$x^2 + 6x + \ldots = (x + 3)^2$	$x^2 - 2x + \ldots = (x - 1)2$
$4x^2 + 20x + \ldots = (2x + \ldots)^2$	$x^2 - 12x + \ldots = (x - \ldots)^2$

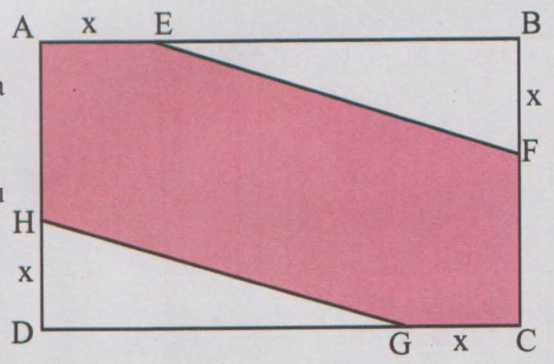
Activité 5 :

Polynômes et rationnels

Un maçon veut faire un devis pour embellir de la face principale d'une maison.

Pour cela l'architecte lui présente le plan suivant dont les dimensions rectangulaire ABCD, sont : AB = 10 cm, BC = 6 cm.

Pour mieux évaluer, il place les points EFGH sur ces côtés comme le montre la figure ci-contre.



a) Exprime en fonction de x, l'aire $\mathcal{A}$ du triangle EBF, puis l'aire $\mathcal{B}$ de la surface colorée.

b) Donne l'expression de $\mathcal{B}$ sous la forme développée et réduite. Calcule $\mathcal{B}$ pour $x = \frac{3}{2}$.

c) Pour quelle valeur de x a-t-on $\mathcal{B} = 35\text{cm}^2$?

Je retiens

1. Calcul littéral

Pour transformer des expressions littérales on peut utiliser les règles suivantes :
Suppressions de parenthèses dans une somme algébrique :

$a + (b + c) = a + b + c$ $\quad$ $a - (b + c) = a - b - c$

$a + (b - c) = a + b - c$ $\quad$ $a - (b - c) = a - b + c$

Exemples : $4 + (2x - 3) = 4 + 2x - 3$; $5 - (2x^2 - 6) = 5 - 2x^2 + 6$

2. Développement

a) Transformation de produit en somme

$k(a + b) = ka + kb.$ $\quad$ $(a + b)k = ak + bk.$

$k(a - b) = ka - kb.$ $\quad$ $(a - b)k = ak - bk.$

b) Développement du produit de deux sommes algébriques

$(a + b)(c + d) = a \times (c + d) + b \times (c + d)$
$= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$

c) Factorisation

$ka + kb = k(a + b)$ $\quad$ $ak + bk = (a + b)k$

$ka - kb = k(a - b)$ $\quad$ $ak - bk = (a - b)k$

3. Identités remarquables

Les égalités ci-dessous sont vraies pour tous nombres réels a, b on les appelle les identités remarquables.

Carré d'une somme $\Longrightarrow$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Carré d'une différence $\Longrightarrow$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Produit (a + b)(a - b) $\Longrightarrow$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

La dernière identité est aussi appelée différence de deux carrés.

Applications

On peut utiliser les identités remarquables pour factoriser ou développer.

Développement	Exemples
▪ du carré d'une somme : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(x + 3)^2 = x^2 + 2x3 + 3^2$ $= x^2 + 6x + 9$ $(4x + 1)^2 = (4x)^2 + 2 \times 4x \times 1 + 1^2$ $= 16x^2 + 8x + 1$	▪ $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$ $= x^2 - 6x + 9$ ▪ $(4x - 1)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2$ $= 16x^2 - 8x + 1$
▪ du carré d'une différence $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ▪ du produit $(a + b)(a - b)$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	▪ $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$ ▪ $(4x + 5)(4x - 5) = (4x)^2 - 5^2$ $= 16x^2 - 25$

4. Factorisation

a) Une expression de la forme $a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2.(2x) \times 3 + 3^2$
$= (2x + 3)^2$

b) Une expression de la forme $a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2.(2x) \times 3 + 3^2$

$= (2x - 3)^2$

c) Différence de deux carrés $a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3)(2x - 3)$.

5. Polynôme

Exemples de polynômes

$P(x) = 3x + 5$ est un polynôme de degré 1 (car l'exposant de x est 1)

$P(x) = 7x^2 + 3x + 5$ est un polynôme de degré 2 (car l'exposant de x le plus grand est 2)

$P(x) = (4x - 3)(x + 7)$ est un polynôme de degré 2 (après le développement)

6. Développement et factorisation de polynômes

a) Développement de polynôme Q(x)

$Q(x) = 3x(x + 3) - (x + 3)^2$

$Q(x) = 3x^2 + 9x - (x^2 + 6x + 9) = 3x^2 + 9x - x^2 - 6x - 9 = 3x^2 - x^2 + 9x - 6x - 9 = 2x^2 + 3x - 9$.

b) **Factorisation du polynôme Q(x)**

On remarque que $(x + 3)$ est un facteur commun.

$3x(x + 3) - (x + 3)^2 = (x + 3)[3x - (x + 3)] = (x + 3)(2x - 3)$.

7. Exemples de fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes :

$K(x) = \dfrac{x - 3}{x + 4}$ cette fraction existe si le dénominateur est différent de 0 ($x \neq -4$).

K(x) existe pour tous les réels sauf -4.

$L(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2 - 9}$; L(x) existe si $x^2 - 9 \neq 0$.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \; ; \; x = 3 \text{ ou } x = -3$$

L(x) existe pour tous réels sauf -3 et 3.

Je sais faire

1. Développer et réduire une expression

Exercice 1: Développe et réduis les expressions suivantes :

$A = (x-4)(3x+2)$; $B = (2x-3)^2$; $C = (4x+5)^2$; $D = (4x-3)^2 - (2x+3)(x-2)$

2. Factoriser des expressions

Exercice 2: Factorise les expressions suivantes :

$A = 25x^2 + 15x$; $B = (3x+5)(2x+1) - (3x+5)(5x+3)$; $C = (x-3)^2 + (2x-1)(x-3)$

$D = (2x-3)^2 - 16$; $E = 16x^2 - 24x + 9$

3. Développer, ordonner et réduire des polynômes

Exercice 4: On donne un polynôme $P(x) = (3x-5)^2 - (x+2)^2$.

a) Développe, réduis et ordonne $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

b) Mets $P(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

c) Calcule $P(-\frac{1}{2})$; $P(0)$.