Je sais faire

1. Identifier une fonction affine

Exercice 1 : Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions affines ?

a) $x \longmapsto -2x + 1$ b) $x \longmapsto x$ c) $x \longmapsto 3 - \frac{1}{2}x$

d) $x \longmapsto 12$ e) $x \longmapsto \frac{x+1}{3}$ f) $x \longmapsto 5x^2 - 1$

2. Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine

Exercice 2 : une fonction affine f est telle que : $f(2) = 5$; $f(-4) = -1$.
Exprime $f(x)$ en fonction de x.

3. Déterminer le sens de variation d'une fonction affine

Exercice 3 : Soit la fonction affine $f(x)$ telle que $f(x) = -2,5x + 4$.
Pour $x_2 = 6$ et $x_1 = -4$, calcule $f(x_2)$; $f(x_1)$ et $f(x_2) - f(x_1)$

a) Sur l'exemple précédent, vérifie que : $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -2,5$; puis démontre ce résultat.

b) Que peut-on dire de la différence $f(x_2) - f(x_1)$ lorsque $x_2 - x_1 = 1$.

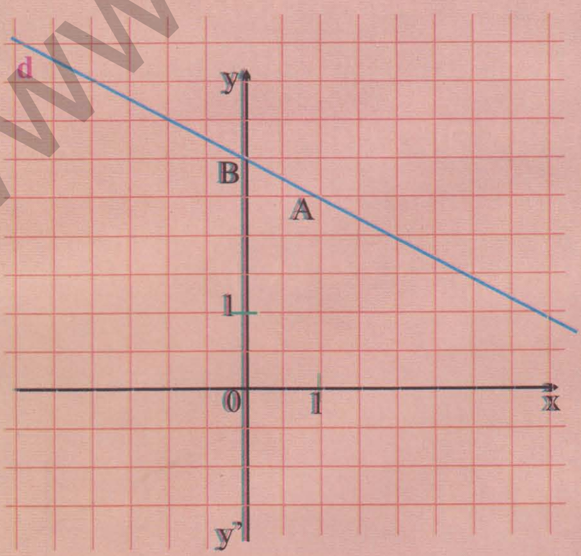
c) Quel est le sens de variation de cette fonction.

4. Représenter graphiquement une fonction affine.

Dans un repère orthonormé représente graphiquement la fonction affine définie par :
$x \longmapsto -0,5x + 3$.

5. Interpréter une représentation graphique.

Sur la figure ci-contre, la droite (d) est la représentation graphique d'une fonction affine f dans un repère orthonormé.
Détermine cette fonction.



CORRECTION

1. les fonctions : $x \longmapsto -2x + 1$; $x \longmapsto x$; $x \longmapsto 12$; $x \longmapsto \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$; $x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 3$

sont des fonctions affines.

2. $f(2) = 5$; $f(-4) = -1$, comme f est une fonction affine, il existe a et b tels que : pour tout x de IR, on a : $f(x) = ax + b$, donc

$$\begin{cases} 2a + b = 5 & (1) \\ -4a + b = -1 & (2) \end{cases}$$

On résous donc, ce système, en multipliant les deux membres de l'équation 2 par -1 et en additionnant les deux équations membre à membre.

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ & \rightarrow 6a = 6 \rightarrow a = 1 \\ 4a - b = 1 \end{cases}$$

En remplaçant la valeur de a dans l'équation 1, on trouve :
$b = 5 - 2$,
$b = 3$.
La fonction f est donc définie par l'expression $f(x) = x + 3$.

3. $f(x) = -2{,}5x + 4$, d'où
$f(x_2) = f(6) = -2{,}5 \times 6 + 4 = -11$.
$f(x_1) = f(-4) = -2{,}5 \times (-4) + 4 = 14$.
Le calcul de $f(x_2) - f(x_1)$ donne,
$-11 - 14 = -25$.

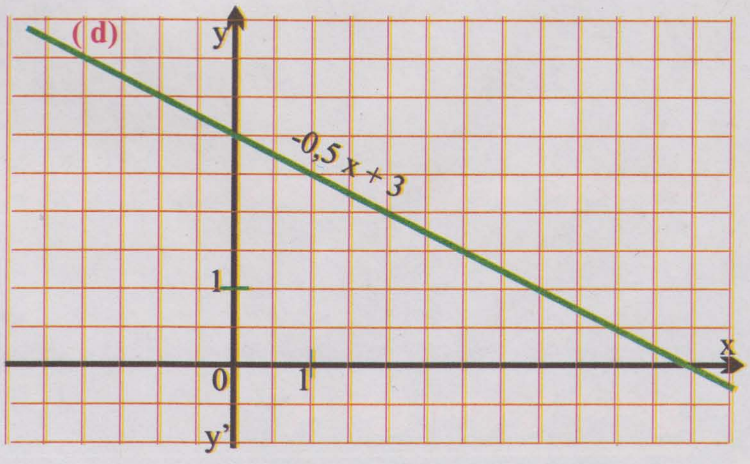
a) $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{-25}{6-(-4)} = \dfrac{-25}{10} = \dfrac{-5}{2} = -2{,}5$.

On peut généraliser ce résultat, pour tout x_1 et x_2 ($x_2 \neq x_1$) de IR.
$f(x_2) = -2{,}5x_2 + 4$, $f(x_1) = -2{,}5x_1 + 4$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-2{,}5x_2 + 4) - (-2{,}5x_1 + 4)}{x_2 - x_1} = \frac{-2{,}5x_2 + 4 + 2{,}5x_1 - 4}{x_2 - x_1} = \frac{-2{,}5(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = -2{,}5.$$

Lorsque $x_2 - x_1 = 1$, $f(x_2) - f(x_1)$ devient le coefficient directeur de la droite représentant cette fonction affine.
Comme le coefficient $a = -2{,}5$,
Donc la fonction f est décroissante.

4. Représentation graphique de la fonction définie par : $x \longmapsto -0{,}5x + 3$.



5. Soit f la fonction représentée, sur cette représentation on peut lire $f(0) = 3$ et $f(1) = 2,5$.
donc f est la fonction affine déterminée par l'image de 0 et 1.
On peut aussi, donner l'expression de f, en déterminant les coefficient a et b dans le système suivant :

$$\begin{cases} a \times 0 + b = 3 & (1) \\ a \times 1 + b = 2,5 & (2) \end{cases}$$

de l'équation 1, $b = 3$.
En remplaçant dans 2, on trouve $a = 2,5 - 3 = -0,5$.
Donc l'expression de f est la suivante : $x \longmapsto -0,5x + 3$.

Je m'exerce

Reconnaître et déterminer des fonctions affines

1. ***Réponds par vraie ou faux en justifiant***

a) Toute fonction affine est une fonction linéaire
b) Toute fonction linéaire est une fonction affine
c) L'image de zéro par une fonction linéaire est zéro.
d) L'image de zéro par une fonction affine est toujours égale à zéro.
e) Si l'image de zéro par une fonction f est zéro, alors f est une fonction linéaire.

2. Parmi les procédés suivants, précise ceux qui correspondent à une fonction affine.

$f(x) = 2 - 3x$; $f(x) = 3x^2 + 1$; $f(t) = 5 - (t + 2)$

$f(x) = \frac{4x - 3}{2}$; $f(x) = \frac{2}{5}(x - 1)$; $f(t) = \frac{2}{t}$;

$f(x) = (x - 1)2 - x(x - 3)$; $f(x) = 4$; $f(t) = 1 - t$

3. Donne l'image des nombres : -20 ; $-\frac{1}{2}$; 0 ; $\frac{4}{5}$; 1 ; 2 par chacune des fonctions suivantes :

$y = 5x - 2$; $y = \frac{1}{4}x + 1$; $y = -x + \frac{1}{2}$;

On pourra noter, dans chaque cas, les résultats dans un tableau de type ci-dessous :

Nombre x	-20	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{5}$	1	2
Images y						

4. Complète le tableau de valeurs associées à la fonction affine $y = -2x + 3$:

x	-3	-1	0	…	3	…
y	…	…	…	-1	…	-7

5. Recopie et complète le texte suivant :

a) La fonction $f : x \longmapsto 0{,}5x$ est une fonction … de coefficient …. ; sa représentation graphique est ….. d'équation ….
b) La fonction $g : x \longmapsto \ldots x + \ldots$ est une fonction ….. ; sa représentation graphique est la droite d_2 ….$y = 0{,}5x + 3$.
c) Les droites d_1 et d_2 sont parallèles, leur … est 0,5.
d) La droite d_2 coupe l'axe des ordonnées au points B(…. ; …..) ; 3 est ….. de d_2

6. En physique et en chimie, on utilise indifféremment deux échelles de température : le degré Celsius (°C) et le degré Kelvin (°K).

1) On donne les informations suivantes :

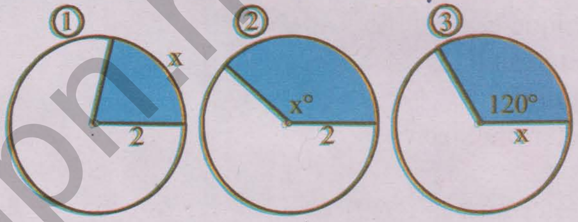
- 0 °K(le zéro absolu) est égal à – 273°C ;
 273 °K est égal à 0 °C ;
- Il existe une fonction affine *f* telle que si T_C exprime une température (en degré Celsius), alors $T_K = f(T_C)$ exprime la même température (en degré kelvin).

Calcule T_K en fonction de T_C.

2) Complète le tableau suivant :

T_K	0	100					456
T_C			-155	-70	0	100	

7. Dans chacun des cas suivant, on appelle $p(x)$ le périmètre et $a(x)$ l'aire de la surface bleue. p et a sont-elles : linéaires ? affine ? autres ?

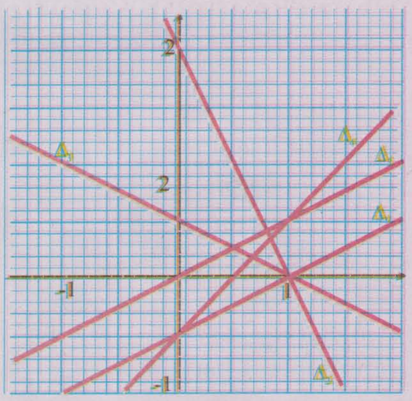


8. Montre que les fonctions suivantes sont des fonctions affines.

$f : x \longmapsto 2(x + 3) - 4(x - 2)$.
$g : x \longmapsto (x + 1)^2 - (x + 5)x$.

9. Retrouve, pour chacune des fonctions affines, la représentation graphique correspondante :

a) $y = 2x - \frac{1}{2}$;
b) $y = 2x$;
c) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$;
d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;
e) $y = -2x + 2$.



Deux nombres et leurs images

10. Détermine la fonction affine *f* sachant que 1 a pour image 2, et -3 a pour image 10.
La représenter ensuite

11. Détermine la fonction affine f sachant que

$f(3) = \frac{1}{2}$ et $f(-1) = -\frac{1}{2}$

La représenter ensuite.

12. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 1$.

Calcule les images des nombres -2 ; 1 ; 0 ; $\frac{5}{3}$

Trouve le nombre qui a pour image 5.
Trouve le nombre qui a pour image 0.

13. Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). L'unité de longueur est le centimètre.
On considère les points A(3; 1), B(2; -2) et C(-6; 4).
1. Place les points A, B et C dans le repère.

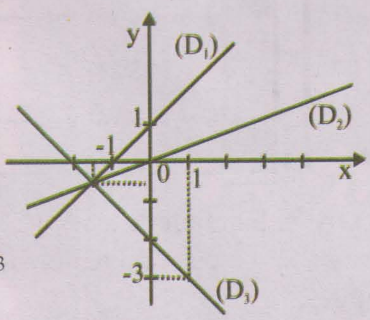
2. On considère la fonction affine
f : $x \longmapsto mx + p$ dont la représentation graphique est la droite (AB).
a) Détermine les images de 2 et de 3 par la fonction f.
b) Détermine les valeurs de m et p de la fonction f.

14. Détermine la fonction affine f telle que $f(-1) = 5$ et $f(1) = 1$.

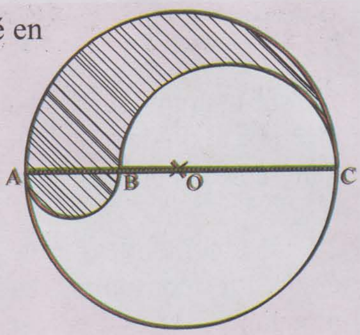
15. Soit f la fonction affine définie sur IR par $f(x) = 5x + b$.
1. Calcule l'accroissement de $f(x)$ lorsque l'accroissement de x est 30.
2. Calcule l'accroissement de x lorsque l'accroissement de $f(x)$ est 45.
3. Calcule $f(x_2)$ sachant que $f(x_1) = -10$ et que l'accroissement de x_1 à x_2 est 2.

Fonction et géométrie

16. En utilisant les indications portées sur le graphique ci-contre, détermine les fonctions affines f_1 ; f_2 ; f_3 représentées par les droites d_1 ; d_2 ; d_3



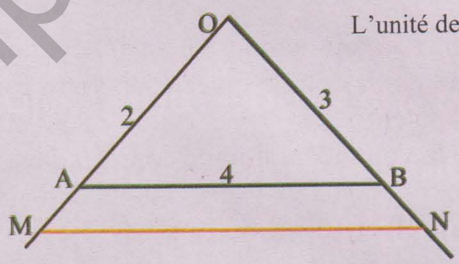
17. O est le centre du cercle de diamètre [AC].
On donne : OA = 10, et on pose : OB = x.
Exprime en fonction de x la longueur $p(x)$ de l'arc ABC passé en trait gras.



La fonction p est-elle affine ? linéaire ?
Exprime en fonction de x l'aire hachurée $\mathscr{A}(x)$.
La fonction $\mathscr{A}$ est-elle affine ? linéaire ?

18. OAB étant un triangle tel que OA = 2, OB = 3, AB = 4, on place un point M sur la demi-droite [OA) à l'extérieur du segment [OA].
La parallèle à (AB) passant par M coupe [OB] en N. On pose OM = x (x > 2).
Exprime ON et MN en fonction de x.
On appelle $p_1(x)$ le périmètre du triangle OMN et $p_2(x)$ le périmètre du quadrilatère ABMN.
Détermine
$p_1(x)$ et $p_2(x)$.
La fonction p_1 est-elle linéaire ? est-elle affine ?
Reprends la question c. avec la fonction p_2.

L'unité de longueur est le centimètre



Représentation graphique et étude de situation

19. ABC est un triangle tel que AB = 6 cm ; BC = 5 cm ; AC = 4 cm.
M est un point du segment [AB] ; la parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.
On pose AM = x.
a) Précise les valeurs possibles de x.
b) Exprime AN ; MN ; MB et NC en fonction de x.
c) Exprime le périmètre du triangle AMN et le périmètre du trapèze MNCB en fonction de x.
d) Détermine la valeur de x pour laquelle ces périmètres sont égaux et calcule ce périmètre.
e) Dans un même repère, trace les droites d_1 et d_2 qui représentent les fonctions :

$f_1 : x \longmapsto 2{,}5x$; $f_2 : x \longmapsto -\dfrac{5}{6}x + 15.$

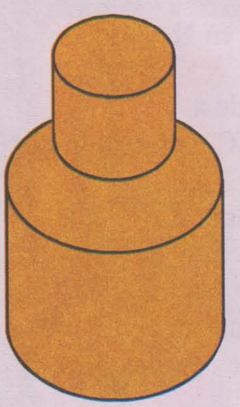
Lis sur le graphique les coordonnées du point d'intersection de d_1 et d_2.
Que représentent ces coordonnées ?

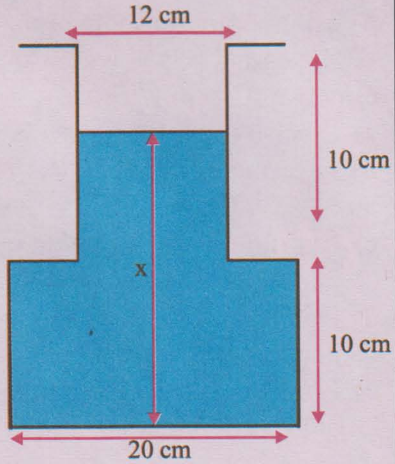
20. Un automobile dont le réservoir a une capacité de 64 litres consomme, habituellement en moyenne, 7 litres d'essences au 100 km. Par suite d'une avarie, sa consommation moyenne est passée à 12 litres aux 100 km. et l'automobile tombe en panne sèche au bout de 800 km, alors que son réservoir était plein au départ.
La distance y (exprimée en km), parcourue par l'automobile depuis le départ est une fonction affine de la quantité x d'essence consommée depuis le départ (exprimée en litres).

a) Détermine les deux fonctions ***f*** et ***g*** donnant y en fonction de x avant et après l'avarie.
b) Choisis un repère et représente graphiquement ***f*** et ***g***. Détermine graphiquement à quelle distance du point de départ a eu lieu l'avarie.
c) Retrouve par le calcul la distance au point de départ à laquelle a eu lieu l'avarie?

21. Dans un réservoir composé de deux cylindres, on verse un liquide dont le niveau supérieur est égal à une hauteur x.
1) Exprime le volume du liquide contenu dans le réservoir en fonction de x.(on distinguera deux cas : $0 \leqslant x \leqslant 10$ et $10 < x \leqslant 20$.)
2) Représente graphiquement ce volume avec :
- En abscisse : 1 cm pour 2 cm
- En ordonnée : 1 cm pour 500 cm^3

Lorsque x = 10, peut-on dire que le récipient est plein aux trois quarts ?

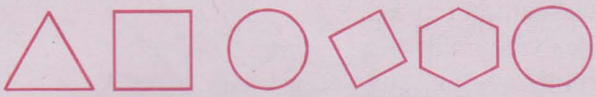




Enigme

22. Il s'agit de trouver un mot composé de six lettres. Les lettres de l'alphabet ont été codées suivant le principe ci-contre.
Les six lettres du mot (dans le désordre!) :

A ⟶ 1
B ⟶ 1/2
C ⟶ 3
D ⟶ 1/4
E ⟶ 5
F ⟶ 1/6
G ⟶ 7
etc



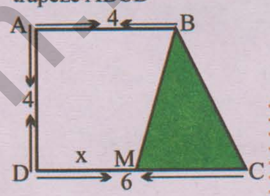
Pour trouver ces lettres, on dispose des renseignements ci-après.

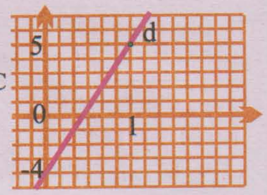
 Solution de l'équation $f(x) = g(x)$, avec $f(x) = 5x + 7$ et $g(x) = -9x + 8$

 Image de zéro par l'application affine f sachant que f(4) = 3 et f(-2) = 6.

 Est la durée (en heure) mise par un athlète pour parcourir 3 000 m à la vitesse de 18 km/h.

 Est la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle BCM est égale à la moitié de l'aire du trapèze ABCD

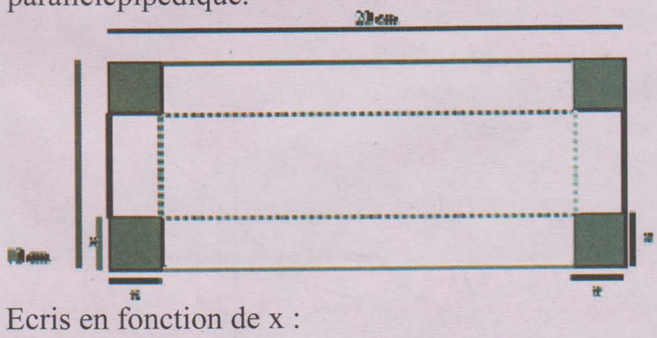




 Coefficient directeur de la droite d.

23. La boîte à malices

Dans chacun des angles d'une feuille rectangulaire de 20 cm sur 10 cm, on découpe un carré de x cm de côté (grisé sur le dessin). En pliant suivant les pointillés on fabrique alors une boîte parallélépipédique.



Ecris en fonction de x :
l'aire $\mathscr{A}$ de cette boîte, le volume $\mathscr{V}$ de cette boîte.

2. Recopie et complète les tableaux ci dessous qui donne le volume de la boîte V(x) en fonction de x.

x	2,1	2,2
V(x)		

x	2,11	2,12
V(x)		

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
V(x)											

3. Représente graphiquement V en fonction de x. En utilisant la représentation graphique, dis pour quelles valeurs de x le volume V(x) est il égal à 100 cm^3 ?

24. Sur une année, on propose au public deux types de tarifs pour l'emprunt de livres dans une bibliothèque :
le tarif plein : 900 UM par livre emprunté.
le tarif « abonné » : cotisation annuelle de 1000 UM à laquelle s'ajoute 50 UM par livre emprunté.
1. Reproduis et complète le tableau suivant :

Nombre de livres empruntés pendant l'année	10	20	50	100
Prix payé au plein tarif (en UM)		18000		
Prix payé au tarif ''abonné'' (en UM)	1500			

2 . Quel est le prix payé, en UM, pour l'emprunt de 35 livres :
a) Avec le tarif plein ? Justifie ta réponse.
b) Avec le tarif « abonné » ? Justifie ta réponse.
On note :

- x le nombre de livres empruntés sur l'année ;
- P(x) le prix payé pour l'emprunt de x livres au tarif plein ;
- A(x) le prix payé pour l'emprunt de x livres au tarif « abonné ».

Exprime P(x) et A(x) en fonction de x.
4. a) Résous l'équation : $900x = 50x + 1000$.
b) Que représente la solution trouvée pour une personne empruntant des livres à la bibliothèque ?.

25. a) On considère le mois d'août 2005.
Soit x le nombre de jours écoulés depuis le début du mois. On admet que le volume d'eau restant dans la cuve pour x jours écoulés est donné par $y = 4,8 - 0,3x$.
Calcule le volume restant dans la cuve à la fin du 7e jour.
b) Soit ***g*** la fonction affine définie par ***g***(x)= 4,8 - 0,3x.
Construis la représentation graphique de la fonction g sur une feuille millimétré (prendre 1 cm pour 2 jours en abscisse et 1 cm pour 0,4 m^3 en ordonnée).
c) Cet habitant a continué à consommer 300 litres d'eau par jour en août.
Détermine par lecture graphique le volume d'eau (en m^3) qui reste dans la cuve au bout du 10^e jour. (Fais apparaître la réponse sur le graphique).

11 Fonctions affines 2

Je me souviens

I. Soit $f(x) = 2x + 3$

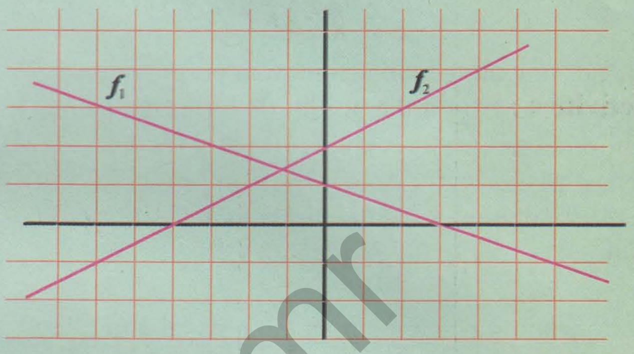
1) Complète le tableau :

x	-3	-2	0	1	2	3
$f(x)$						

2) Construis le graphique de f
3) Quel est le sens de variation de f.

II. g est une fonction affine telle que :
$g(-2) = -1$; $g(3) = 20$
1) Donne l'expression de $g(x)$.
2) Représente graphiquement $g(x)$.

III. Reconnaître les fonctions affines représentées ; donne les expressions.



IV. Ecris sans valeur absolue :

$|3x - 5| =$ …… ; $x >$…
$|3x - 5| =$ …… ; $x <$…

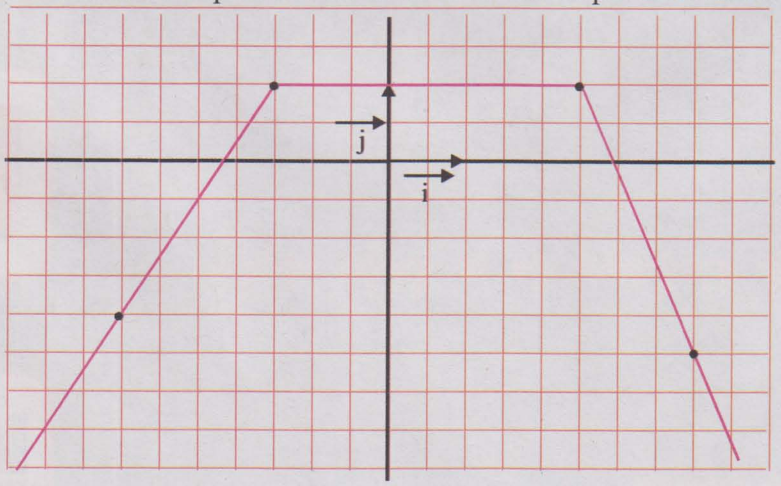
Je vais plus loin

Activité 1 :

Soit la fonction $f : x \longmapsto |2x - 5|$
a) f est elle une fonction affine ?
b) Ecris f sans valeur absolue.
c) Représente graphiquement f dans un repère orthonormé.
d) f est elle affine sur : $]-\infty ; 2,5]$; pourquoi ?
e) f est elle affine sur : $]2,5 ; +\infty[$; pourquoi ?
$f(x)$ ***est appelée fonction affine par morceaux ou affine par intervalles.***

Activité 2 :

Reconnaître l'expression de la fonction affine par intervalles représentée ci-dessous :



Activité 3 :

L'ITS

L'impôt sur les salaires s'applique de la manière suivante :

- Salaire < 21 000UM 0%
- 21 000 < salaire < 61 000 15%
- 61 000 < Salaire 35%

a) Calcule l'impôt sur les salaires bruts suivants :
14 000 ; 45 000 ; 120 000.

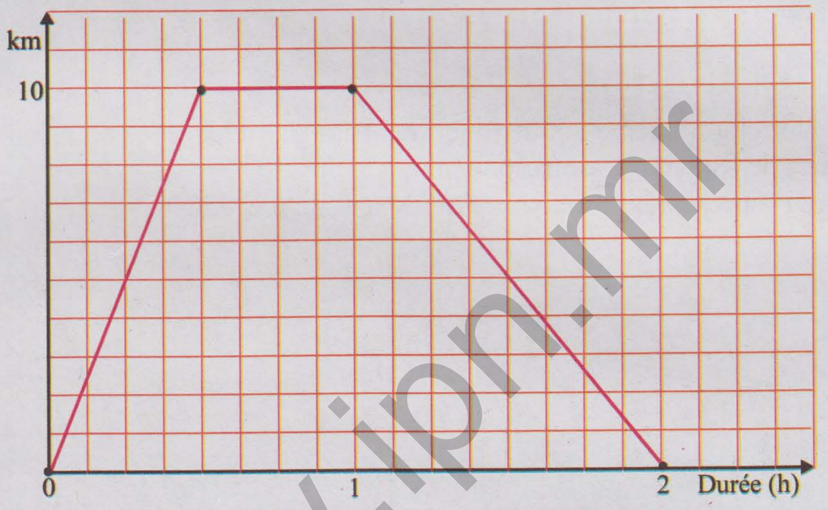
b) En déduis les salaires nets

c) Un employé reçoit un salaire net de 45 000 ; Calcule son salaire brut.

d) On note (I) impôt et (S) salaire, représente I = *f*(S) en prenant 1 cm pour 2 000 ouguiyas.

Activité 4 :

Le graphique suivant représente le mouvement de Diallo pendant son footing.



a) Recopie et complète le texte suivant :

Au départ, Diallo court pendant …. minutes (ce qui correspond à une vitesse moyenne de …..km /h).

b) Donne l'expression de la fonction qui relie la distance et la durée sur chaque intervalle.

Je retiens

Fonctions affines par morceaux

Une fonction affine par morceaux ou par intervalles est une fonction qui a diverses expressions selon les intervalles :

Exemples :

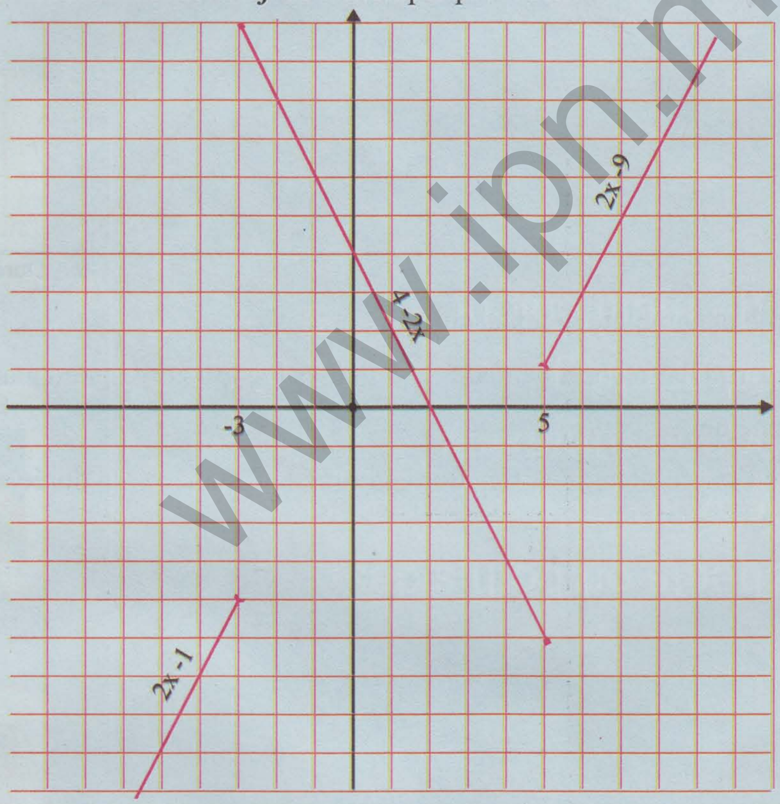
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \quad x < -3 \\ 4-2x & ; -3 \le x \le 5 \\ 2x-9 & ; \quad 5 < x \end{cases}$$

La valeur absolue d'une expression de la forme ax + b est une fonction affine par intervalles:

$$f(x) = |ax+b| = \begin{cases} ax+b & ; \ x > \dfrac{-b}{a} \ ; a \neq 0 \\ -ax - b & ; \ x < \dfrac{-b}{a} \ ; a \neq 0 \end{cases}$$

Pour représenter graphiquement une fonction affine par intervalles on calcule chaque expression pour les bornes de l'intervalle correspondant.

Exemple : pour représenter la fonction ***f*** de l'exemple précédent



Je sais faire

1. Donner l'expression d'une fonction affine par morceaux

Exercice 1: Soit la fonction $f(x) = |2x+3| + |4x-5|$

Donne l'expression de f sur les intervalles suivants :

a) $]-\infty\,;\,\frac{-3}{2}[$

b) $[\frac{-3}{2}\,;\,\frac{5}{4}]$

c) $]\frac{5}{4}\,;\,+\infty[$

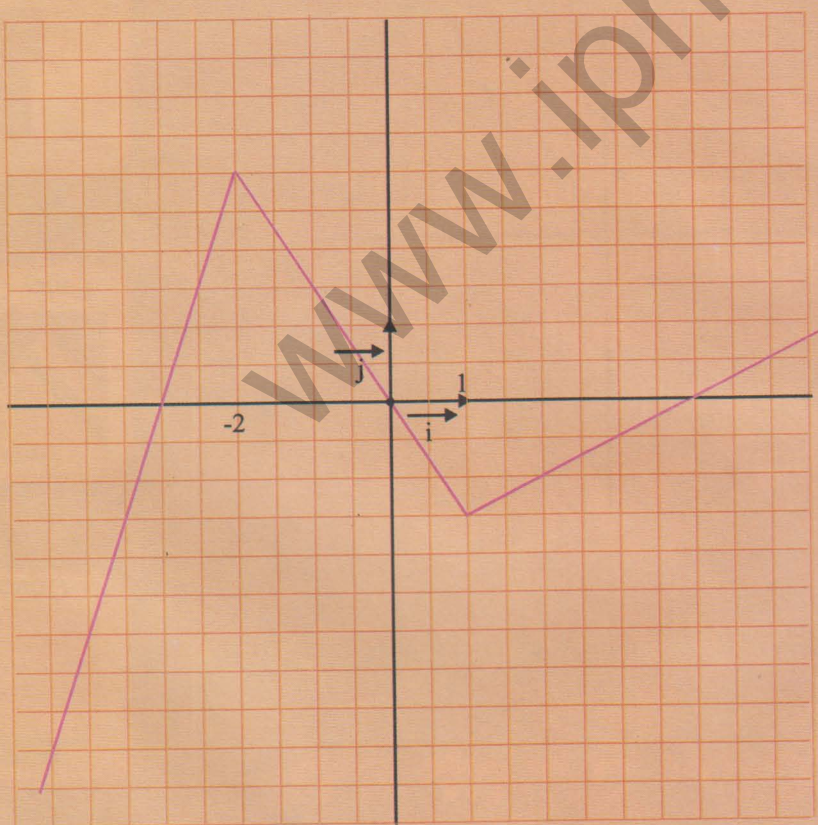
d) Ecris f comme fonction affine par intervalles.

2. Représenter graphiquement une fonction affine par morceaux

Exercice 2: Représente graphiquement la fonction $g(x)$ définie comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} 3x-2 & ;\ x < -2 \\ 4 & ;\ -2 \leq x \leq 2 \\ 4x-4 & ;\ x > 2 \end{cases}$$

Exercice 3: a) Donne l'expression de la fonction h représentée ci-dessous



b) Résous graphiquement les équations :

- $h(x) = 1{,}5$
- $h(x) = -1$

CORRECTION

1. a) Sur l'intervalle$]-\infty ; \frac{-3}{2}[$, les deux expressions dans la valeur absolue sont négatives, donc $f(x) = -2x - 3 + (-4x + 5) = -6x + 2$.

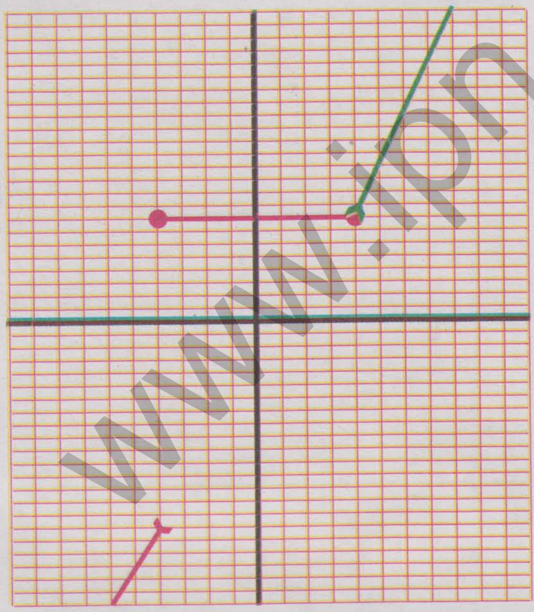
b) Sur l'intervalle $[\frac{-3}{2} ; \frac{5}{4}]$, la première expression $(2x + 3)$ est positive, la seconde $(4x - 5)$ est négative, donc $f(x) = 2x + 3 + (-4x + 5) = -2x + 8$.

c) Sur l'intervalle$]\frac{5}{4} ; +\infty[$ les deux expressions sont positives, donc

d) $f(x) = 2x + 3 + (4x - 5) = 6x - 2$. Enfin l'expression de $f(x)$ est la suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -6x+2 & ; \ x < \frac{-3}{2} \\ -2x+8 & ; \ \frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{5}{4} \\ 6x-2 & ; \ x > \frac{5}{4} \end{cases}$$

2. Voici les différentes représentations cherchées.



3. a) **Pour $x < -2$**, prenons $h(-2,5) = 1,5$; $h(-3,5) = -2$;

$$\begin{cases} -2,5a + b = 1,5 \\ -3,5a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 3,5 \Rightarrow b = 10,25 \ ; \text{ d'ou } h(x) = 3,5x + 10,25$$

Pour $x > 1$, prenons $h(1) = -1,5$; $h(3) = -0,5$;

$$\begin{cases} a + b = -1,5 \\ 3a + b = -0,5 \end{cases} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -2 \ ; \text{ d'ou } h(x) = 0,5x - 2$$

Pour $-2 < x < 1$, il s'agit d'une fonction linéaire $h(x) = -1,5x$.

b) Sur le graphique $h(x) = 1,5 \rightarrow x = -1$ ou $x = -2,5$; $h(x) = -1 \rightarrow x = 2$ ou $x = -3,5$ ou $x \approx 0,75$.

a) Etudie le signe de $\frac{a+1}{a-1}$ et le sens de variation de *f* sur IR.

b) Construis les représentations graphiques de f pour a = -1 ; a = 2 et a = $\frac{1}{3}$.

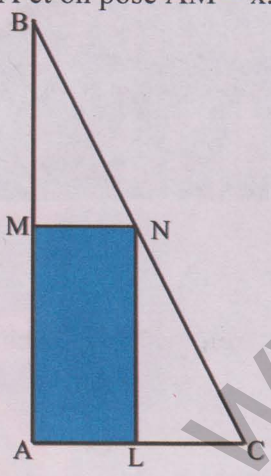
c) Détermine a pour que la représentation graphique de *f* passe par le point A(1 ; $\sqrt{2}$)

11. Soit *f* et *g* deux fonctions affines définies par $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \frac{1}{2}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{8}$.

a) Représente graphiquement ces deux fonctions. Utilise cette construction pour résoudre graphiquement l'équation *f*(x) = *g*(x).

b) Résous exactement cette équation.

12. ABC est un triangle rectangle en A.
On a AC = 4 cm et AB = 8 cm.
M est un point variable de [AB]. On construit le rectangle MNLA et on pose AM = x.



a) Démontre que MN = $\frac{8-x}{2}$ et démontre que l'aire y du rectangle MNLA est égale à $\frac{x(8-x)}{2}$.

b) Recopie et complète le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y									

Utilise ce tableau pour représenter graphiquement les variations de y en fonction de celles de x.

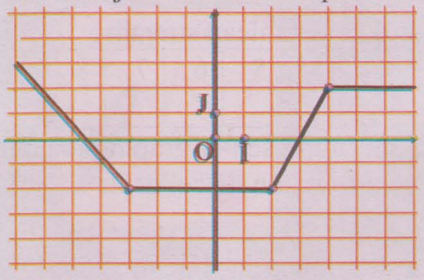
13. *f*, *g*, *h* et ℓ sont des fonctions linéaires de IR dans IR de coefficient respectifs a, b, a + b et ab. Démontre que, pour tout nombre réel x,
h(x) = *f*(x) + *g*(x) et ℓ (x) = *g*[*f*(x)].

14. Deux villes A et B sont distantes de 70 km.
Un premier cycliste part de A et se dirige vers B A la vitesse constante de 15 km/h. Au même instant, un autre cycliste part de B et se dirige vers A à la vitesse constante de 20 km/h.
Exprime en fonction du temps la distance qui sépare chaque cycliste de A.
Représente graphiquement les fonctions obtenues.
Que représentent les coordonnées du point commun aux deux droites ?

Je m'exerce

Fonctions affines par morceaux

1. La représentation ci-dessous est celle d'une fonction f de IR dans IR par morceaux.



Reproduis cette représentation puis détermine les quatre expressions qui donnent $f(x)$ pour $x \in$ IR.

2. Représente graphiquement les fonctions f et g définies respectivement, pour $x \in$ IR, par $f(x) = x - |x - 2|$ et $g(x) = |x - 3| - |5 - x|$.

3. Fonction en escalier

Représente graphiquement la fonction en escalier f définie par le tableau suivant :

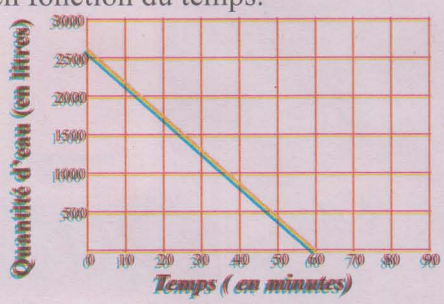
x	$-10 \le x < -3$	$-3 \le x < 5$	$5 \le x < 8$
$f(x)$	5	-4	2

4. Représente graphiquement la fonction en escalier f définie par le tableau ci-après :

x	$-6 \le x < 0$	$0 \le x < 2$	$2 \le x < 4$	$4 \le x < 6$
$f(x)$	-4	-2	0	3

Résolution graphique d'un problème

5. On décide de vider une citerne qui contient 2 700 litres d'eau. Le graphique ci-dessous représente les variations de la quantité d'eau contenue dans la citerne en fonction du temps.



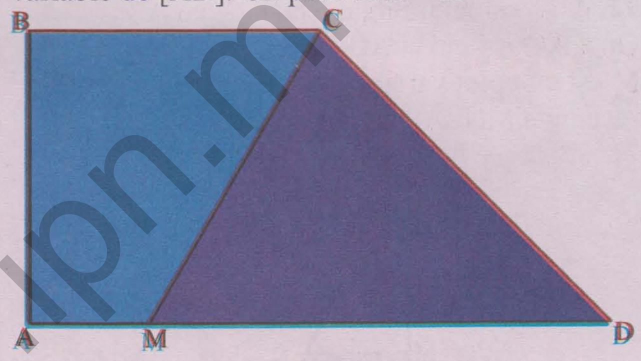
a) En utilisant le graphique et en faisant les calculs nécessaires, complète le tableau ci-dessous :

Temps t (en min)	0	10	30	40	60
Volume d'eau restant V (en ℓ)	…	…	…	…	…

b) Quelle est la nature de la fonction qui lie la quantité V d'eau qui est contenue dans la citerne au temps t (en min) ?

c) Exprime la relation qui existe entre V et t.

6. ABCD est trapèze rectangle en A et en B voir figure ci-dessous : de bases [AD] et [BC]. AD = 10 cm et AB = BC = 5 cm. M est un point variable de [AD]. On pose AM = x.



Montre que les aires du trapèze AMCB et du triangle MDC sont respectivement $\frac{5x}{2} + \frac{25}{2}$ et $\frac{50}{2} - \frac{5x}{2}$.

Représente graphiquement les deux fonctions affines f et g définies respectivement par $f(x) = \frac{5x}{2} + \frac{25}{2}$ et $g(x) = \frac{50}{2} - \frac{5x}{2}$.

Résous graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

Que représente la solution trouvée ?

Exercices de recherche et problèmes.

9. Soit f une application linéaire, de IR dans IR de coefficient $a \neq 0$. Détermine qu'on a toujours $f(3x + 5y) = 3f(x) + 5f(y)$ quels que soient les nombres x et y.

10. Soit a un nombre réel différent de 1 et soit f la fonction linéaire de IR dans IR définie par

$f(x) = \frac{a+1}{a-1}x$.

Module d'intégration 3

Chapitres

9;10;11

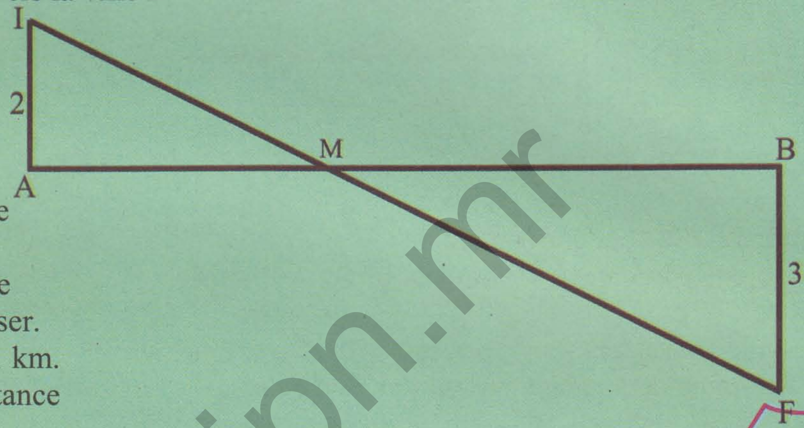
Chapitres / Compétences : 9. 2 ; 10. 3 ; 11. 3

Avec tout ce que tu as appris, et en particulier dans les trois derniers chapitres, tu peux résoudre des problèmes de la vie de tous les jours, dont voici quelques situations- problèmes.

Situation 1

Lecture de l'énoncé

Au même instant, Saïdou et Malik partent en cyclomoteur,
Malik quite la ville A et se dirige vers la ville B avec une vitesse de 20 km.
Saïdou quite la ville B et se dirige vers la ville A avec une vitesse de 30 km/h.
Pour déterminer graphiquement le lieu de rencontre on a construit le schéma ci-contre :



Montre que le point M représente le point où les deux amis vont se croiser.
Les deux villes sont distantes de 31 km.
Fais un schéma pour estimer la distance du point A au lieu de croisement.

situation2

Vraisemblance des résultats

Dans une société de transport, le prix normal d'un billet est proportionnel au nombre de kilomètres parcourus.
Le prix d'un kilomètre est de 3 UM.
Cette société propose un tarif réduit aux 15-25 ans selon deux possibilités :
Tarif 1 : réduction de 25% sur tous les trajets.
Tarif 2 : Achat d'une carte « 15- 25 ans »au prix de 825 UM valable pour une année, permettant d'obtenir 50% de réduction sur tous les trajets.

a) Détermine la dépense annuelle selon chaque tarif pour :
500 km ; 2000 km.
b) Soit y_1 et y_2 les dépenses annuelles en UM pour x km au tarif 1 et au tarif 2.
Donne les dépenses annuelles de chaque tarif en fonction de x.
c) Quand est-il plus intéressant d'acheter une carte ? Trouve cette réponse graphiquement.
(Choisir des unités convenables).
d) Un employé de la gare doit expliquer à la clientèle, les tarifs, rédige en quelques lignes de façon simple ces tarifs.

Situation3 — Choix des outils

Un automobiliste part d'une ville A et se dirige vers une ville B à la vitesse de 90 km/h.
Arrivé en B, il retourne vers A à la vitesse de 70km/h.
La durée totale du trajet est de 8h.

- Représente graphiquement le déplacement de cet automobiliste en reportant les durées sur l'axe des abscisses (2cm pour 1h) et les distances sur l'axe des ordonnées (0,5 cm pour 10 km) comptées depuis le point de départ.
- Ecris les équations qui correspondent aux déplacements de cet automobiliste.
- Au bout de combien de temps l'automobiliste est-il arrivé en B ?
- Trouve la durée qui s'est écoulée entre les deux passages de l'automobiliste au village C situé à mi-chemin entre A et B.

Situation4 — Apprentissage du raisonnement

Un terrain ayant la forme d'un triangle ABC rectangle en A tel que : AB = 40 m et AC = 50 m.
Soit M un point du segment [AC]. On pose AM = x.
La parallèle à la droite (AB) passant par M coupe le segment [BC] en N.
Le propriétaire veut que son enfant élève de $4^{\text{ème}}$ AS, présente une technique pour pouvoir trouver l'aire d'une partie de son terrain en faisant varier M.
Pour cela :

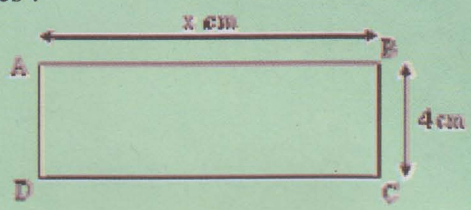
a) Donne les valeurs pour lesquels x peuvent varier.
b) Détermine la longueur CM en fonction de x.
c) Trouve la longueur MN en fonction de x.
d) Calcule l'aire A(x) du trapèze ABNM en fonction de x.
e) Quelle condition doit remplir x pour que l'aire du trapèze soit la moitié de celle du triangle ?
f) Montre que $x = 25(2 - \sqrt{2})$, vérifie cette condition et donne une valeur approchée de cette solution.
g) Quelle valeur doit prendre x pour que N soit le milieu de [BC] ?

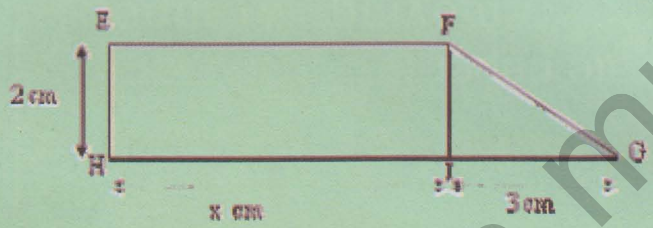
Entraînement à l'évaluation

Situation a

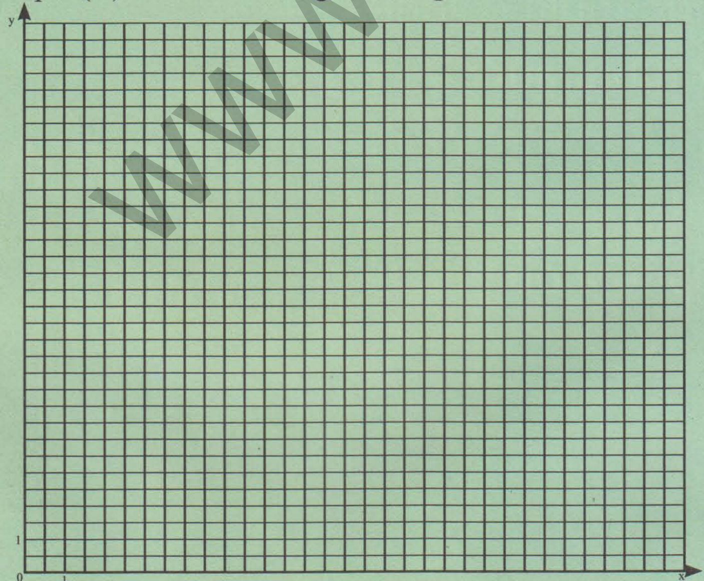
Voici un extrait d'un sujet de BEPC donné en 2004 dans un pays étranger.

On donne les figures suivantes :





1. Exprime en fonction de x l'aire A_{ABCD} du rectangle ABCD.
2. Exprime en fonction de x l'aire A_{EFGH} du quadrilatère EFGH.
3. Dans le repère orthonormal ci-dessous, après l'avoir reproduis trace en justifiant :
la représentation graphique (d) de la fonction f définie par : $x \longmapsto 4x$
la représentation graphique (d') de la fonction g définie par : $x \longmapsto 2x + 3$



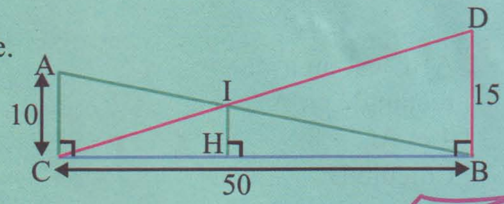
4. a) Calcule l'aire du rectangle ABCD pour x = 3.
b5. a) Calcule la valeur de x pour que l'aire du quadrilatère EFGH soit égale à 15 cm^2.
b) Retrouve ce résultat sur le graphique (on laissera apparents les traits nécessaires).
6. a) Résous graphiquement l'équation : $4x = 2x + 3$
b) Retrouve ce résultat en résolvant l'équation : $4x = 2x + 3$
c) Comment interpréter ce résultat pour le rectangle ABCD et le quadrilatère EFGH ?

Situation b

Lors d'une sélection des meilleurs élèves des classes de 4ème AS, la situation suivante a été proposée sans consignes.
Les élèves l'ont traité avec diverses manières dont certaines ont été appréciées par le professeur.

❖ Choisis ta propre méthode pour résoudre cette situation.

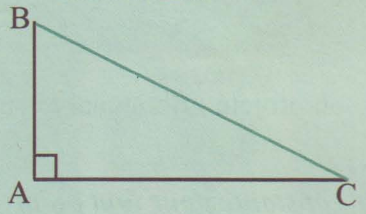
- Les dimensions connues sont portées sur la figure ci - contre.
- Les triangles ABC et BCD sont rectangles respectivement en C et B.



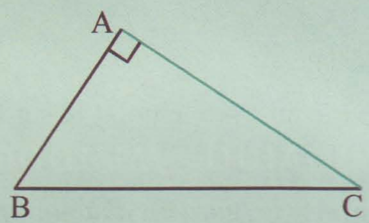
13 Géométrie du triangle rectangle

Je me souviens

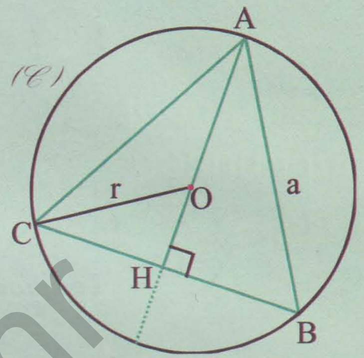
- ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 4 et AC = 8.
  Calcule BC.



- ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 5 et BC = 9.
  Calcule AC.



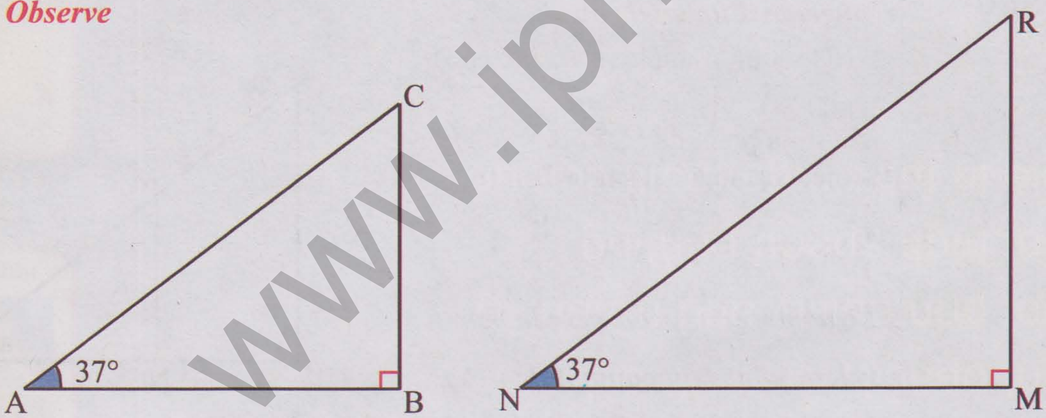
- Démontre que : $a = r\sqrt{3}$



Je vais plus loin

Activité 1 :

Observe



a) Mesure les côtés [AB] et [AC], [NM] et [NR] des triangles ABC et NMR.

b) Calcule les quotients : $\dfrac{AB}{AC}$ et $\dfrac{NM}{NR}$.

Compare leurs arrondis au dixième.
Que constates-tu ?

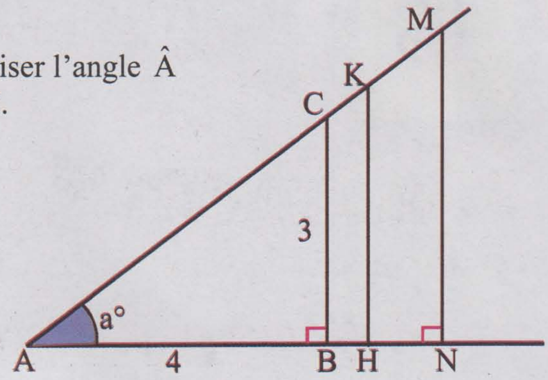
c) De même pour : $\dfrac{BC}{AC}$ et $\dfrac{MR}{NR}$.

Compare leurs arrondis au dixième.
Que constates-tu ?

Activité 2 :

Cosinus et sinus d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en B tel que $\hat{A}$ a pour mesure a°.On veut caractériser l'angle $\hat{A}$ (ou sa mesure) par les côtés du triangle ABC.



a) Calcule $\frac{AB}{AC}$ et $\frac{BC}{AC}$.

b) M est un point de (AC) et N son projeté orthogonal sur (AB).
Justifie les égalités suivantes :

- $\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM}$
- $\frac{BC}{AC} = \frac{MN}{AM}$.

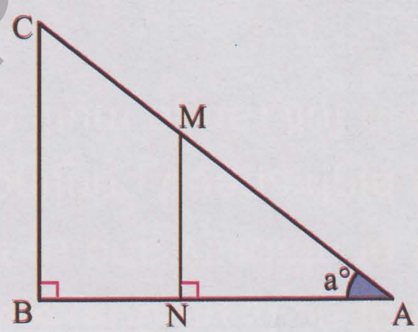
c) Reprends le même travail avec le point K sur (AM) et son projeté orthogonal H sur (AB).

- ***Les nombres $\frac{AN}{AM}$ et $\frac{MN}{AM}$ gardent chacun une valeur constante pour tout point M de (AC).***
- ***Ces nombres ne dépendent que de l'angle $\hat{A}$.***
- ***Ils sont notés respectivement cos $\hat{A}$ et sin $\hat{A}$.***

Activité 3 :

Tangente d'un angle aigu

ABC est un triangle rectangle en B, tel que $\hat{A}$ a pour mesure a°.
M est un point de (AC) et N son projeté orthogonal sur (AB).



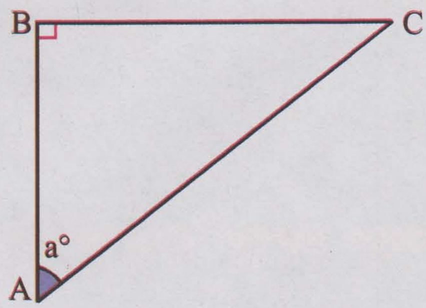
- Justifie que : $\frac{BC}{AB} = \frac{MN}{AN}$

Le nombre $\frac{MN}{AN}$ conserve la même valeur pour tout point M de (AC).
Ce nombre ne dépend que de l'angle $\hat{A}$
Il est noté tan $\hat{A}$

Activité 4 :

Propriétés

ABC est un triangle rectangle en B, tel que : $\hat{A} = a°$.
Sachant que AB < AC ; BC < AC.



a) Justifie que :

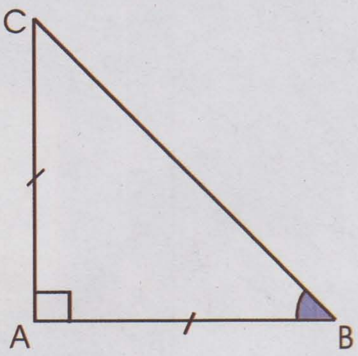
- $0 < \frac{AB}{AC} < 1$
- $0 < \frac{BC}{AC} < 1$

b) Calcule : $(\sin a°)^2 + (\cos a°)^2$.

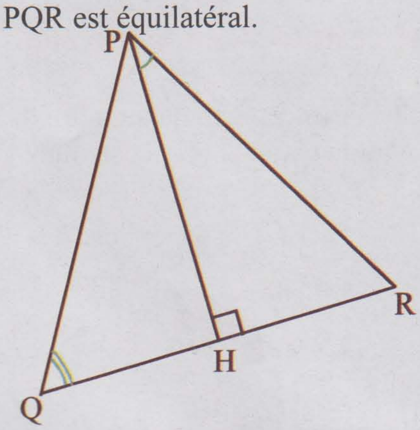
Activité 5 :

Cosinus et sinus d'angles particuliers

ABC est isocèle rectangle en A.



PQR est équilatéral.



A l'aide de ces deux triangles reproduis et complète le tableau suivant :

a°	30°	45°	60°	90°
sin a°				
cos a°				

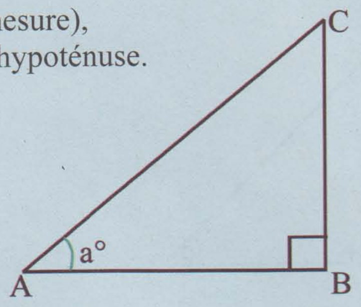
Je retiens

1. sinus et cosinus d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle,

- on appelle **sinus** d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
  On écrit :

$$\sin a^\circ = \sin \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{Hypoténuse}}$$



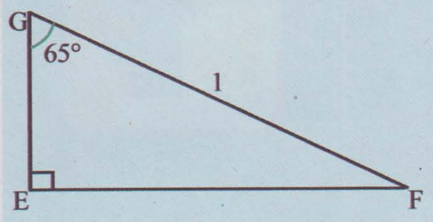
- on appelle **cosinus** d'un angle aigu (ou de sa mesure), le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.

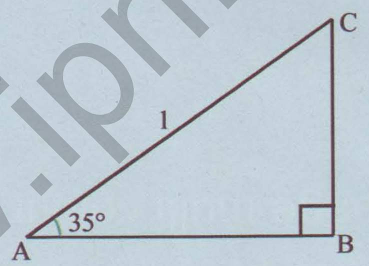
On écrit : $\cos a^\circ = \cos \hat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{côté adjacent à } \hat{A}}{\text{Hypoténuse}}$

Exemple : L'unité de longueur est le dm.

Les triangles suivants sont réalisés à l'échelle $\frac{1}{2}$.

Calcule le cosinus et le sinus de l'angle donné.





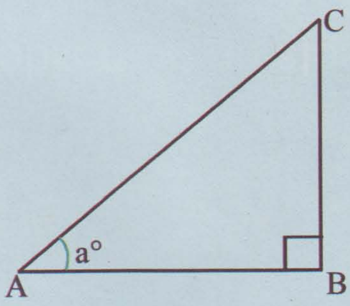
2. Tangente d'un angle aigu

Dans un triangle rectangle, on appelle **tangente** d'un angle aigu (ou de sa mesure) le quotient du côté opposé à cet angle par le côté adjacent.

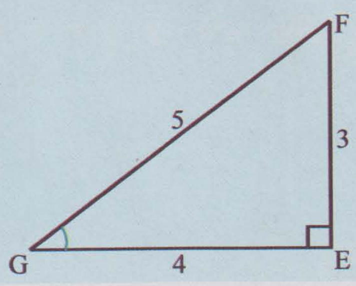
On écrit :

$$\tan(a^\circ) = \tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{côté opposé à } \hat{A}}{\text{côté adjacent à } \hat{A}}$$

On écrit aussi : $\tan(a^\circ) = \tan \hat{A} = \frac{\sin a^\circ}{\cos a^\circ}$



Exemple : Calcule $\tan \hat{G}$ et $\tan \hat{F}$



3. Propriétés

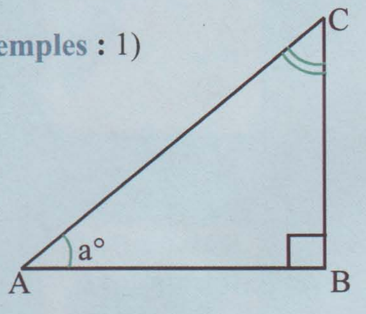
a) Pour tout angle aigu a, on a :

$0 < \cos a° < 1$; $0 < \sin a° < 1$; $\cos^2 a° + \sin^2 a° = 1$

b) Si deux angles sont complémentaires, alors

- le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.
- les tangentes de ces deux angles sont inverses l'une de l'autre.

Exemples : 1)



$\cos(90 - a)° = \sin a°$; $\sin(90 - a)° = \cos a°$

$\cos\hat{C} = \sin\hat{A}$; $\sin\hat{C} = \cos\hat{A}$

$$\tan\hat{C} = \frac{\sin\hat{C}}{\cos\hat{C}} = \frac{\cos\hat{A}}{\sin\hat{A}} = \frac{1}{\tan\hat{A}}$$

2) Le cosinus d'un angle aigu $\hat{A}$ est $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Calcule le sinus de cet angle.

Nous savons que : $\sin^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$,

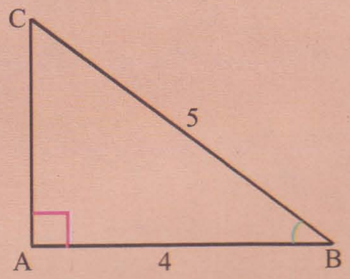
donc, $\sin^2\hat{A} = 1 - \cos^2\hat{A} = 1 - (\frac{2\sqrt{2}}{3})^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{9}{9} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

D'où, $\sin\hat{A} = \frac{1}{3}$.

Je sais faire

1. Calculer le sinus et le cosinus d'un angle aigu

Exercice 1: Calcule le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle précisé dans le triangle ci-dessous.



2. Utiliser le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle aigu pour calculer les deux autres côtés d'un triangle rectangle.

Exercice 2: ABC est un triangle rectangle en B tel que:
AB = 12 et $\hat{C} = 60°$.
Calcule AC et BC.

Exercice 3 : Dans un triangle ABC rectangle en B, on a : $\cos \hat{A} = \dfrac{9}{14}$. Calcule $\sin \hat{A}$

3. Calculer la tangente d'un angle aigu, dans un triangle, connaissant les deux côtés de son angle droit

Exercice 4 : ABC est un triangle rectangle en A tel que: AB = 7,5 et AC = 12,5. Calcule $\tan \hat{C}$

4. Calculer un côté de l'angle droit, connaissant l'autre côté et la tangente d'un angle aigu.

Exercice 5 : ABC est un triangle rectangle en C tel que: AC = 4 et $\tan \hat{A} = 0{,}75$.Calcule le deuxième côté de l'angle droit.

5. Calculer la tangente d'un angle aigu connaissant son sinus et son cosinus

Exercice 6 : ABC est un triangle rectangle en B. Calcule $\tan \hat{A}$ lorsque :

a) $\sin \hat{A} = \dfrac{1}{3}$ et $\cos \hat{A} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\sin \hat{C} = \dfrac{3}{5}$ et $\cos \hat{C} = \dfrac{4}{5}$.

CORRECTION

1. Le triangle ABC est rectangle, d'après Pythagore :

$AC^2 = BC^2 - AB^2$
$= 5^2 - 4^2$
$= 25 - 16 = 9$

d'où : AC = 3.

$\cos\hat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8.$

$\sin\hat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6.$

2. Dans ce triangle, on a :

- $\sin 60° = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12}{AC}$, ce qui donne : $AC = \dfrac{12}{\sin 60°}$.

  d'où, $AC = \dfrac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{24}{\sqrt{3}} = \dfrac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$.

  Donc, $AC = 8\sqrt{3}$

- $\cos 60° = \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{CB}{8\sqrt{3}}$, ce qui donne : $CB = 8\sqrt{3} \times \cos 60° = 2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{2}$.

  D'où, $CB = 4\sqrt{3}$.

3. Dans ce triangle rectangle, nous savons que :

$\sin^2\hat{A} + \cos^2\hat{A} = 1$, d'où $\sin^2\hat{A} = 1 - \cos^2\hat{A}$.

Donc, $\sin^2\hat{A} = 1 - (\dfrac{9}{14})^2$

$\sin^2\hat{A} = 1 - \dfrac{81}{196} = \dfrac{196 - 81}{196} = \dfrac{115}{196} \approx 0{,}59.$

Grâce à la touche ($\sqrt{\ }$) de la calculatrice

on trouve : $\sin\hat{A} \approx 0{,}77$.

4. $\tan\hat{C} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \dfrac{7{,}5}{12{,}5} = \dfrac{75}{125} = \dfrac{3}{5}$;

donc, $\tan\hat{C} = 0{,}6$.

5. Dans ce triangle $\tan\hat{A} = \dfrac{CB}{AC} = \dfrac{CB}{4}$, d'où $CB = 4 \times \tan\hat{A} = 4 \times \tan\hat{A} = 4 \times 0{,}75 = 3$.

donc, CB = 3.

6. Le calcul de la tangente de l'angle $\hat{A}$, dans les deux cas :

a) Si, $\sin\hat{A} = \dfrac{1}{3}$; $\cos\hat{A} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, alors, $\tan\hat{A} = \dfrac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \times 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$;

donc, $\tan\hat{A} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

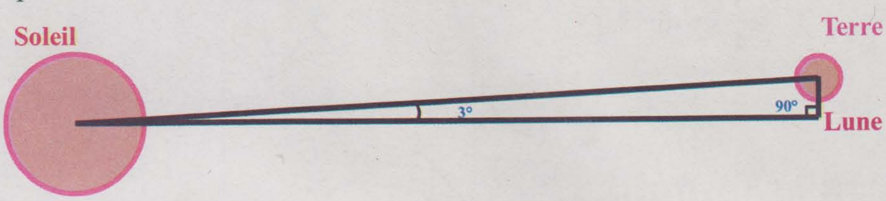
b) si, $\sin\hat{C} = \dfrac{3}{5}$ et $\cos\hat{C} = \dfrac{4}{5}$, alors, $\tan\hat{A} = \dfrac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}} = \dfrac{\cos\hat{C}}{\sin\hat{C}}$, car les deux angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont complémentaires dans le triangle ABC, par conséquent, $\tan\hat{A} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{3}$;

D'où, $\tan\hat{A} = \dfrac{4}{3}$.

Activité documentaire

Un peu de l'histoire

Aristarque (310 -av- J-C).
Un grand astronome grec. Il émit, le premier, l'hypothèse de la rotation de la terre sur elle-même et autour du soleil.
Pour mesurer la distance de la terre au soleil, il observa l'angle entre la lune, telle qu'on la voit dès le matin, le soleil et la terre quand la moitié de la surface de la lune est visible (demi-lune).

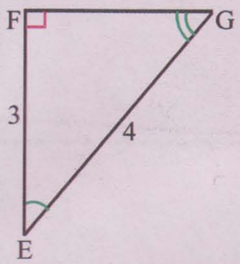


A l'aide des instruments imparfaits, dont il disposait, il trouva que l'angle $\hat{S}$, dans le triangle TSL, était de 3°.
Il n'avait pas de tables de rapports d'angles et utilisa donc une très ingénieuse, mais pour nous trot longue, il s'agit de l'application de la géométrie d'Euclide.
Il constata alors que la distance TS est dix-huit à vingt fois la distance TL.
Non content de cette méthode, il recourt à une seconde méthode pour trouver ce résultat.
Grâce à la trigonométrie, le problème d'Aristarque est désormais accessible à n'importe qu'el élève de la 4ème AS.
Trouve la solution de ce problème, à l'aide de cette dernière méthode.
On rappelle que la distance trouvée est différente de celle qui est réelle et qui est à l'ordre de 149 000 000 km.
L'erreur commise par Aristarque provient de la faible précision de ses instruments.
Le mérite d'Aristarque est d'avoir montré que le soleil est distant d'au moins 7 500 000 km de la terre ce qui est un progrès remarquable dans les connaissances humaines liées à l'univers.

Je m'exerce

Vrai ou faux

1. Réponds par vrai ou faux en justifiant : sur la figure ci-dessous (pour les questions a ;b ;c ;d).



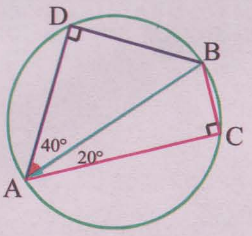
a) $\cos\hat{E} = \frac{3}{4}$ et $\sin\hat{G} = \frac{4}{3}$

b) $\tan\hat{E} = \frac{7}{3}$

c) $\tan\hat{G} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

d) $(\tan\hat{E})^2 + (\tan\hat{G})^2 = \frac{130}{63}$.

Sur la figure ci-contre (pour les questions e , f , g ,h)



e) $\sin 40° = 2\sin 20°$

f) $DB = 2BC$

g) $\cos 20° = 2\cos 40°$

h) $AC = 2AD$

i) $\cos 60° = 2\cos 30°$

j) $\sin 60° = 2\sin 30° \times \cos 30°$

k) $\cos 60° = 1 - 2(\sin 30°)^2 - 1$

l) $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}}{4}$

m) $\cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$

sinus, cosinus , tangente

2. a) Calcule α dans les cas suivants:

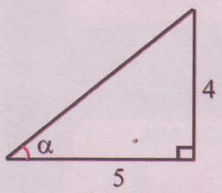


Fig.1

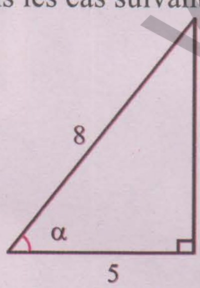
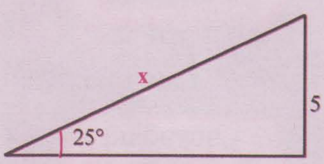
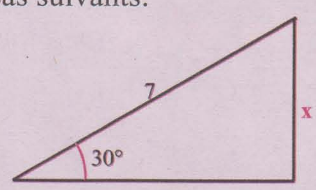


Fig.2

b) Calcule x dans les cas suivants:





3. ABC est un triangle rectangle en B tel que : $AC = 7,5$ et $BC = 4,5$.
Calcule $\sin\hat{A}$.

4. ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AC = 10,8$ et $BC = 13,5$.
Calcule $\cos\hat{C}$.

5. L'unité de longueur est le cm.
Dans un triangle ABC rectangle en B, on a :
$AC = 32,5$; $\sin\hat{A} = \frac{5}{13}$ et $\cos\hat{A} = \frac{12}{13}$.
Calcule AB et BC.

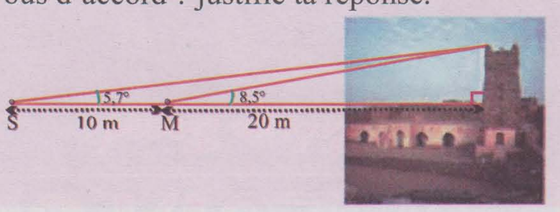
6. Dans un triangle ABC rectangle en B, on a $\sin\hat{A} = \frac{2}{3}$.
Calcule $\cos\hat{A}$.

7. Un triangle ABC, rectangle en A, est tel que AB = 7cm et BC = 9cm. Fais une figure.
Evalue sans instruments l'angle $\hat{C}$.
Calcule $\sin\hat{C}$, puis donne l'arrondi à 1° près de l'angle $\hat{C}$.

8. ABC est un triangle rectangle en B tel que : $\tan\hat{C} = \sqrt{2} - 1$.
Calcule $\tan\hat{A}$.

9. L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est un triangle rectangle en B tel que :
$\tan\hat{A} = \frac{4}{3}$ et $BC = 2$.
Calcule AB et AC.

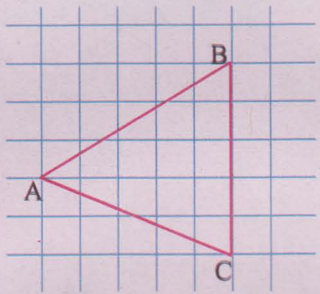
10. Mohamed et Sidi deux élèves au collège de Chinguitti, observent le minaret de la mosquée a partir des toits de leurs maisons comme l'indique la figure.
Chacun confirme qu'il peut trouver la hauteur du minaret.
Etes-vous d'accord ? justifie ta réponse.



11. Deux triangles ABC et ABD, rectangles en A, ont le côté [AB] en commun et sont situés de part et d'autre de ce côté.
Fais une figure avec AC = 3cm, AD = 5cm et AB = 4cm.

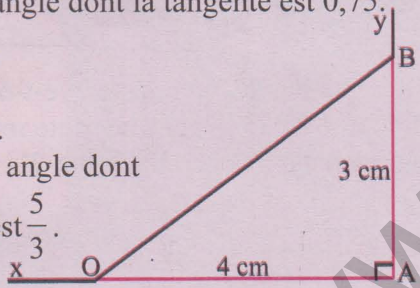
a) Evalue, sans instruments, $\widehat{CBD}$
b) Calcule $\tan \widehat{ABC}$ et $\tan \widehat{ABD}$, puis les approximations par excès à 1° près de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABD}$. $\widehat{CBD}$ est-t-il droit.

12. En projetant un des sommets du triangle ABC sur le côté opposé on peut déterminer sans mesurage $\tan \hat{B}$ et $\tan \hat{C}$, puis $\hat{B}$ et $\hat{C}$ et enfin $\hat{A}$. Fais-le.



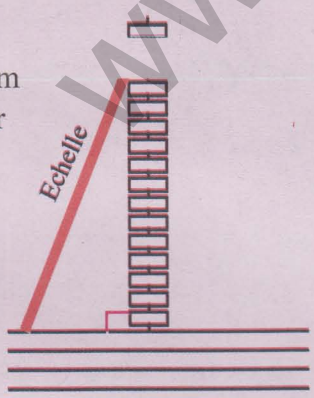
Construire un angle de tangente donnée

13. Exemple : angle dont la tangente est 0,75.
$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$
$\tan \widehat{AOB} = 0{,}75$.
a) Construis un angle dont la tangente est $\frac{5}{3}$.
b) Construis
Un angle dont la tangente est 1,5.



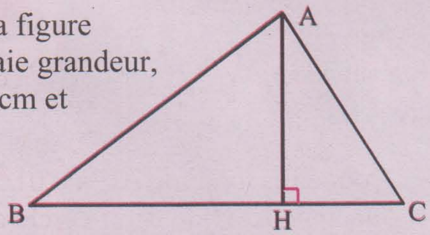
Approfondissement

14. Une échelle de 3,50 m arrive à 3,30m de hauteur sur un mur vertical.
Quel angle fait-elle avec le sol ?
(on donnera une valeur approchée)

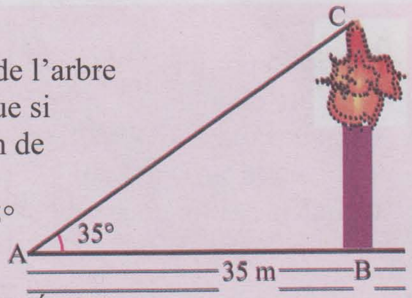


15. Reproduis la figure ci-contre en vraie grandeur, avec : BC = 10 cm et AC = 6 cm.

Calcule les longueurs exactes des segments AB et AH.



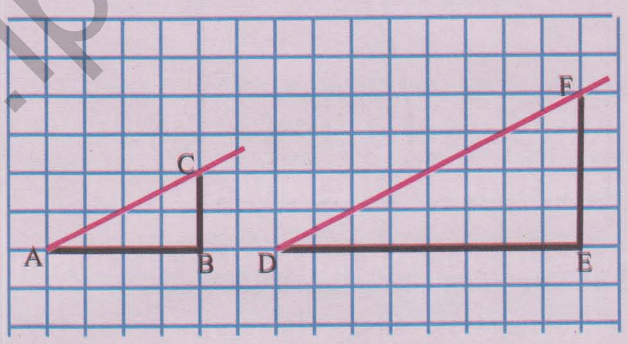
16. Détermine une hauteur approchée de l'arbre ci-contre sachant que si l'on se place à 35 m de son pied, on le voit sous un angle de 35°



17. MNPQ est un carré.
a) Construis un carré qui a pour aire le double de l'aire de MNPQ.
b) Construis un carré qui a pour aire le triple de l'aire de MNPQ.

18. L'unité de longueur est le centimètre.
ABC est triangle tel que :
AB = 5 ; $\hat{A} = 45°$ et $\hat{C} = 30°$.
Le point H est le projeté orthogonal du sommet B sur la droite (AC).
Calcule AH, BH, BC, HC et AC.

19. a) Observe la figure ci-dessous.
Montre que la tangente de l'angle $\widehat{BAC}$ est la même que celle de l'angle $\widehat{EDF}$.
Détermine la valeur commune de ces deux angles.

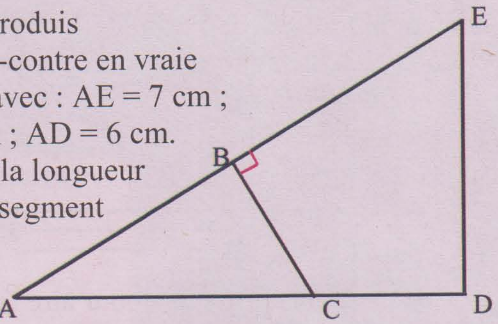


b) l'égalité de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{EDF}$ permet de démontrer que les droites (AC) et (DF) sont parallèles ; faites-le.

20. Les diagonales d'un rectangle mesurent 12cm. Calcule une valeur approchée de ses côtés quand l'angle aigu des diagonales mesure :
a) 60° b) 80° c) 30°

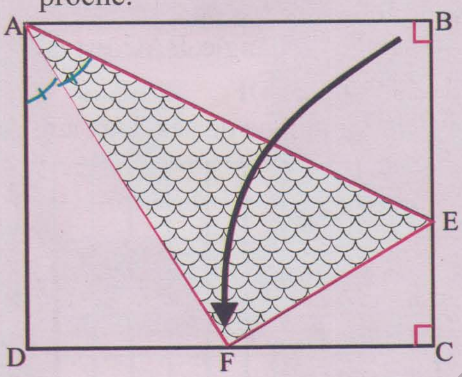
21. a) On donne un triangle ABC tel que : BC = 10 cm ; AB = 15 cm et $\hat{B} = 50°$.
Calcule une valeur approchée de l'aire du triangle ABC.
b) En remplaçant ''AB = 15 cm'' par ''AB = x'', montre que l'aire du triangle ABC est proportionnelle à x.

22. a) Reproduis la figure ci-contre en vraie grandeur avec : AE = 7 cm ; AC = 4 cm ; AD = 6 cm.
b) Calcule la longueur exacte du segment [AB].

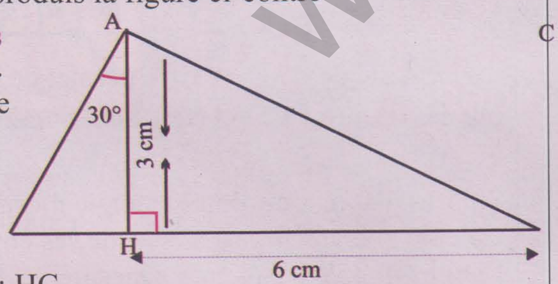


c) Donne une valeur approchée de [AB] et vérifie sur la figure.

23. On considère une feuille de papier rectangulaire ABCD. On la plie de façon à amener le point B sur le côté [DC] en F.
a) Sachant qu'alors $\widehat{DAF} = \widehat{FAE}$ et que AE = 120mm, détermine les longueurs exactes des côtés de la feuille.
b) En déduis l'aire de la feuille au mm^2 le plus proche.

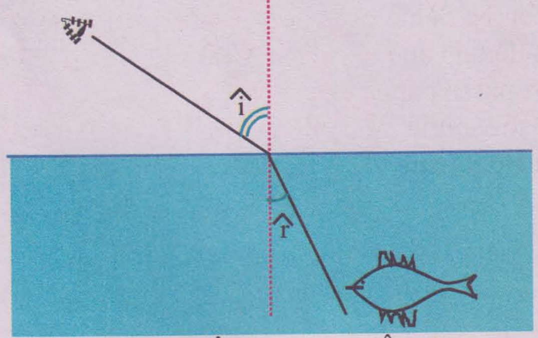


24. a) Reproduis la figure ci-contre en vraie grandeur.
b) Calcule Les valeurs exactes de AC ; AB ; BH ; HC.



c) En déduis la valeur de BD par deux méthodes différentes.
d) En déduis l'aire du triangle ABC par deux méthodes différentes.
e) On désigne par I le milieu du segment [BC].Calcule AI et la mesure de l'angle $\widehat{AIB}$.

25. Le rayon lumineux passant de l'air dans l'eau est dévié au niveau de la surface de l'eau.
L'angle d'incidence ($\hat{i}$) et l'angle de réflexion ($\hat{r}$) sont tels que $\sin\hat{r} = \frac{3}{4}\sin\hat{i}$.

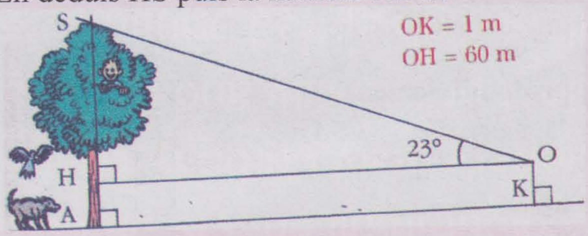


a) Calcule $\hat{r}$ pour $\hat{i} = 30°$, puis $\hat{i} = 60°$.
b) Calcule $\hat{i}$ sachant que $\hat{r} = 45°$.
c) Que vaut $\hat{r}$ si $\hat{i} = 90°$? peut-on avoir $\hat{r} = 50°$?

26. En pente

De combien de mètres s'élève-t-on lorsqu'on parcourt 1 435 m sur une route rectiligne qui fait un angle de 6° avec l'horizon ?

27. Calcule la distance OS et la mesure de $\widehat{HSO}$. En déduis HS puis la hauteur AS de l'arbre.



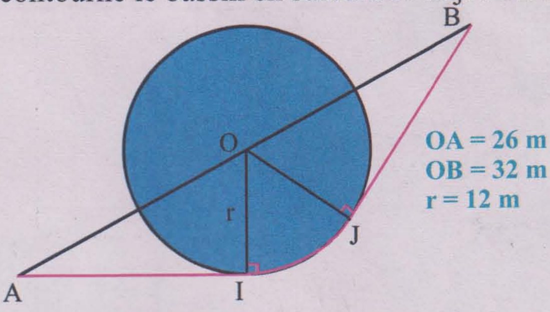
28. Trace un triangle ABC tel que BC = 8 cm, $\widehat{CBA} = 54°$ et de [BC]. Le cercle de diamètre [BC] coupe [AB] en M.
a) Démontre que le triangle BMC est rectangle.
b) Calcule les angles $\widehat{BCM}$ et $\widehat{MCA}$.
c) Calcule CM, donne son arrondi à 0,01 cm.
d) Démontre que : $AC = \dfrac{BC \times \cos 36°}{\cos 44°}$
Donne l'arrondi de AC à 0,01cm.
e) On appelle $\mathscr{C}_1$ le demi-cercle de diamètre [BC] ne contenant pas le point M.
Sur ce demi-cercle $\mathscr{C}_1$, place le point D tel que CD = 7 cm.

Calcule l'arrondi à l'unité de l'angle $\widehat{BCD}$

f) La perpendiculaire à (MC) passant par O coupe [AC] en N. démontre que N est le milieu de [AC].

g) En déduis que le cercle de centre N et de rayon NA passe par M.
En suivant la méthode des questions a. b. c et d, calcule une valeur approchée de AB à 0,01.

29. Pour se rendre de A à B, un promeneur contourne le bassin en suivant le trajet AIJB.

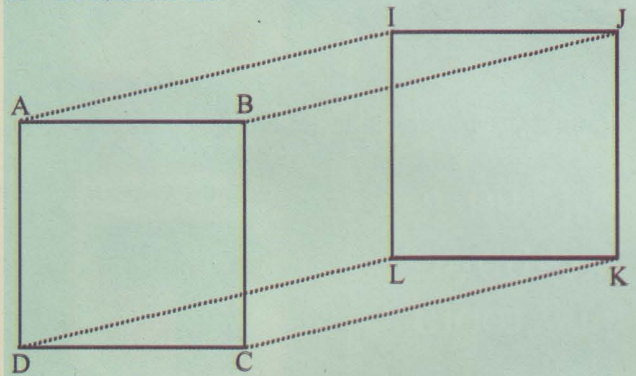


Calcule à 0,1 m près la longueur de ce trajet.

14 Transformations

Je me souviens

1. Translations



Observe la figure ci-dessus et complète

- Avec la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$

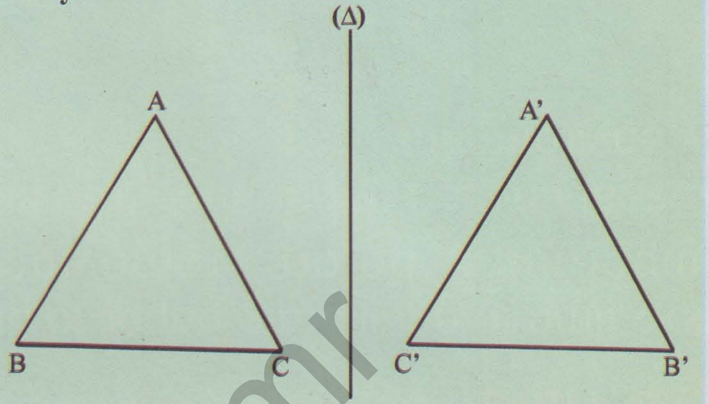
  $t_{\overrightarrow{AI}}(B) = \ldots$;

  $t_{\overrightarrow{AI}}(C) =$;

  $t_{\overrightarrow{AI}}(D) =$

- Le carré IJKL est le …. du carré ABCD par la translation $t_{\overrightarrow{AI}}$

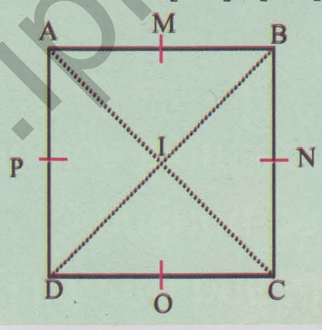
2. Symétries



$S_\Delta(A) = A'$; $\Delta = \ldots[AA']$

$S_\Delta(B) = \ldots$; $S_\Delta(C) = C'$; $S_\Delta(ABC) = \ldots$

I c'est le … de [AC] ; [BD] ; [NP] ; …



$S_I(A) = \ldots$;

$S_I(B) = \ldots$;

$S_I[AB] = \ldots$;

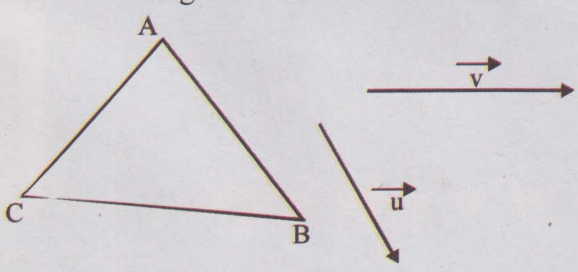
$S_I[ABN] = \ldots$

Les trois transformations citées plus haut conservent : l'alignement ; la distance et les angles

Je vais plus loin

Activité 1 :

Voici un triangle ABC et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$



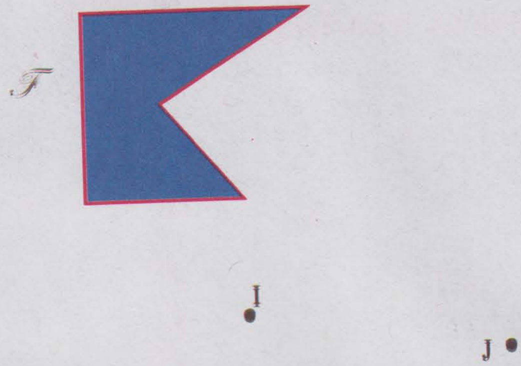
a) Construis l'image de ABC par la translation $t_{\vec{u}}$ que l'on notera A'B'C'.

b) Construis le translaté du triangle A'B'C' par la translation de vecteur $\vec{v}$ que l'on notera A''B''C''.

c) Quelle est la transformation qui au triangle ABC associe A''B''C'' ?

Activité 2 :

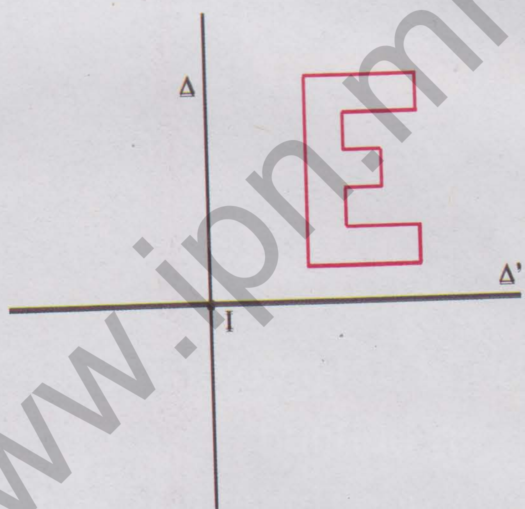
a) Construis l'image de la figure $\mathscr{F}$ par la symétrie de centre I suivie de la symétrie de centre J.



b) Par quelle transformation peut-on obtenir directement cette image ?

Activité 3 :

a) Δ et Δ' sont deux droites perpendiculaires en I.
Construis l'image de la figure donnée par la symétrie d'axe Δ suivie de la symétrie d'axe Δ'.



b) Par quelle transformation peut-on obtenir directement cette image ?

c) Reprends les mêmes questions dans le cas ou Δ//Δ'.

Je retiens

1. La composée de deux translations

La composée de deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$

(fig. 1)

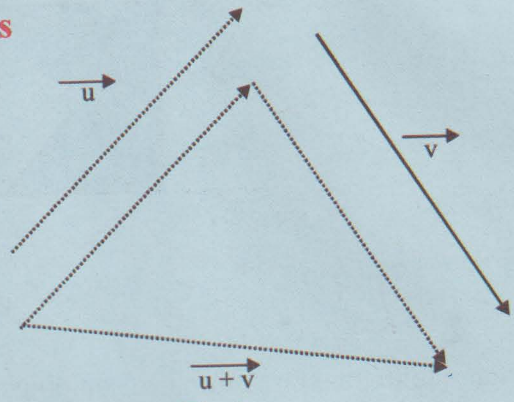


Fig.1

2. La composée de deux symétries centrales

La composée de deux symétries centrales de centres respectifs I et J est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{IJ}$

(Fig.2)

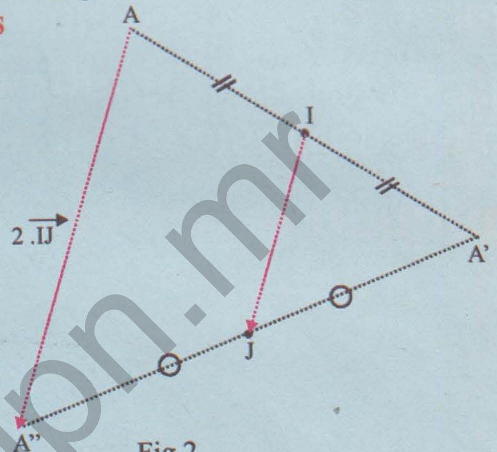


Fig.2

3. La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires

La composée de deux symétries orthogonales d'axes respectifs Δ et Δ' perpendiculaires en I c'est la symétrie centrale de centre I

(Fig. 3)

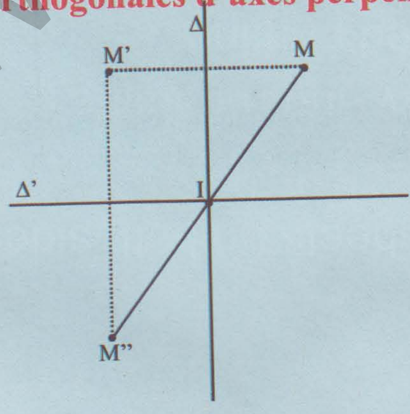


Fig.3

4. La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

La composée de deux symétries orthogonales d'axes respectifs Δ et Δ' parallèles c'est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{AB}$ ou A est un point de Δ ; B est son projeté orthogonal sur Δ'.

(Fig. 4)

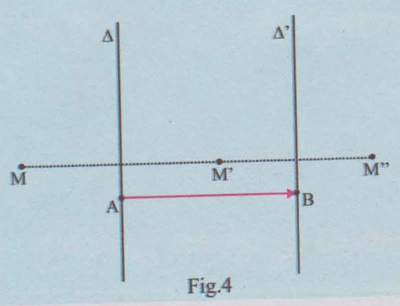
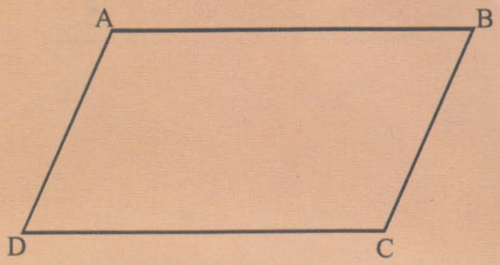


Fig.4

Je sais faire

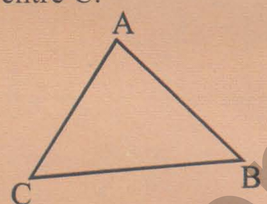
1. Construire l'image d'un point par deux translations qui se suivent

Exercice 1: ABCD est un parallélogramme, construis directement l'image D' du point D par la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$.



2. Construire l'image d'un point par deux symétries centrales qui se suivent

Exercice 2: ABC est un triangle ; construis directement l'image A' du point A par la symétrie centrale de centre B suivie de la symétrie centrale de centre C.



3. Construire l'image d'un point par deux symétries axiales qui se suivent

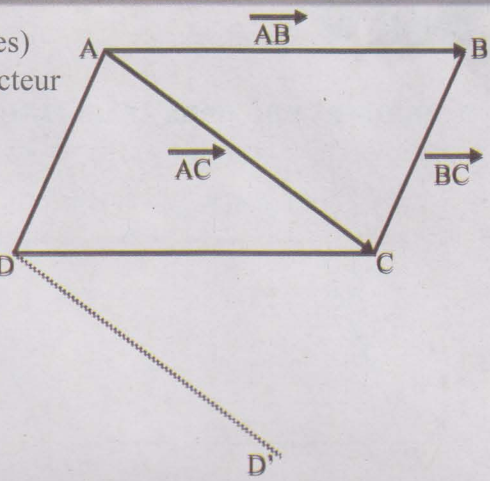
Exercice 3 : ABCD est un rectangle, M est un point hors de ce rectangle ; construis directement :

a) M_1 l'image de M par la symétrie par rapport à (AB) suivie de la symétrie par rapport à (AD).

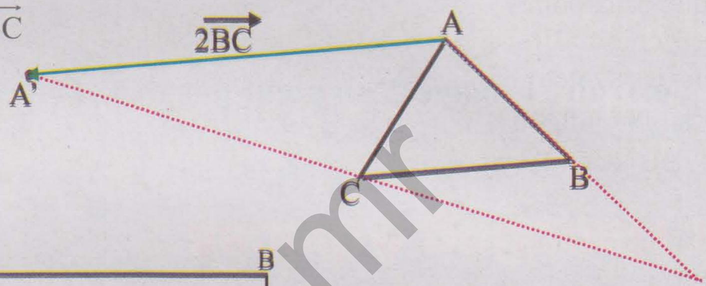
b) M_2 l'image de M par la symétrie par rapport à (AB) suivie de la symétrie par rapport à (CD).

CORRECTION

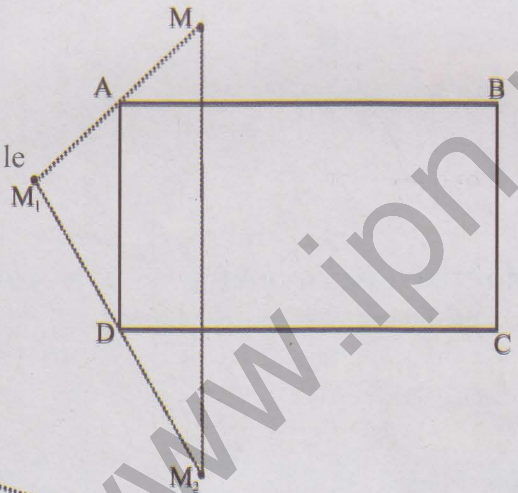
1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles)
On construit donc un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$ à partir du point D on obtient D'.



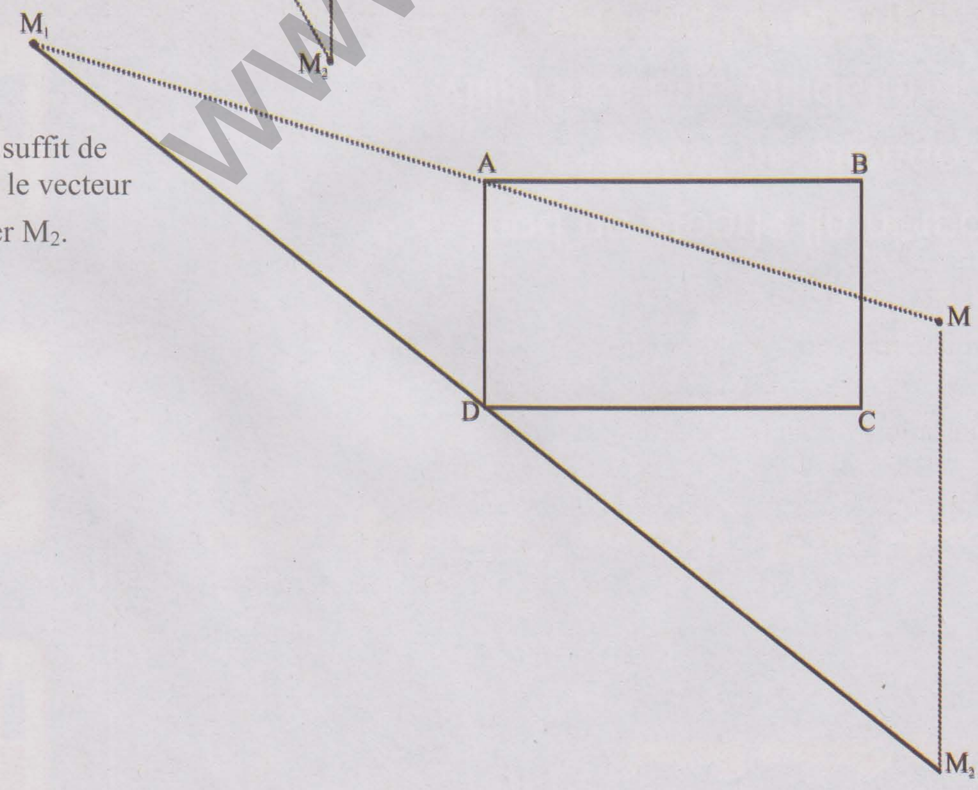
2. Je construis un vecteur égal à deux fois $\overrightarrow{BC}$ à partir du point A pour obtenir A'.



3. Position 1 :
(AB) et (AD) sont perpendiculaire en A. Il suffit de construire le symétrique de M par rapport au point A pour trouver M_1.



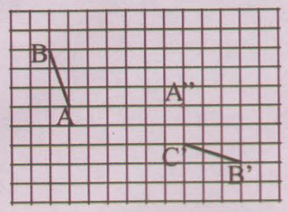
Position 2 :
(AB) et (DC) sont parallèles, il suffit de translater M avec le vecteur $2\overrightarrow{BC}$ pour trouver M_2.



Je m'exerce

Symétries centrales successives

1. A'B'C 'est le symétrique de ABC par rapport à S. A''B''C'' est le symétrique de A'B'C' par rapport à S.
Reproduis la figure ci-contre et retrouve les éléments qui manquent.

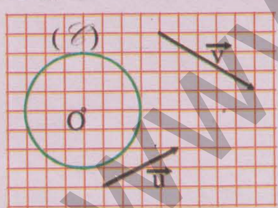


2. Construis un triangle équilatéral ABC et marque deux points O et O'. Construis le symétrique A'B'C' du triangle ABC par rapport à O puis les symétriques A''B''C'' du triangle A'B'C' par rapport à O'. Compare les vecteurs $\overrightarrow{AA''}, \overrightarrow{BB''}$ et $\overrightarrow{CC''}$.

3. Marque quatre points M, N, S et S'.
Construis les symétriques M' et N' de M et de N par rapport à S puis les symétriques M'' et N'' de M' et de N' par rapport à S'. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{MM''}$ et $\overrightarrow{NN''}$ sont égaux.

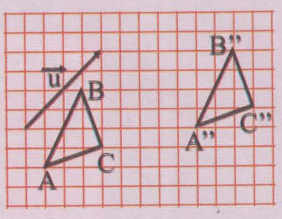
Translations successives

4. Reproduis la figure suivante.
Construis l'image $\mathscr{C}_1$ du cercle $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{u}$ puis l'image $\mathscr{C}_2$ de $\mathscr{C}_1$ par la translation de vecteur $\vec{v}$.



Démontre que les cercles $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}$ ont même rayon.

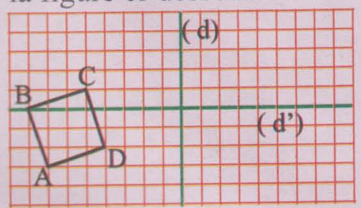
5. Une première translation de vecteur $\vec{u}$ transforme un triangle ABC en A'B'C' puis une seconde translation, de vecteur $\vec{v}$ cette fois, transforme A'B'C' en A''B''C''. Sur la figure ci-dessous, il manque le triangle A'B'C' et le vecteur $\vec{v}$.



Reproduis cette figure et complète-la en dessinant le triangle A'B'C' et le vecteur $\vec{v}$.

Symétries orthogonales successives

6. Reproduis la figure ci-dessous.



Transforme le carré ABCD en faisant agir successivement la symétrie d'axe (d) puis la symétrie d'axe (d'). Fais de même en changeant l'ordre des symétries. Le résultat final est-il le même ? Justifie ta réponse.

7. Soit ABC un triangle. I est le milieu de [AC], J est le milieu de [AB]. Soit (Δ) la perpendiculaire à (BC) qui passe par J et soit (d) la parallèle à (Δ) qui passe par I.
Construis le symétrique A'B'C' de ABC par rapport à (d) et le symétrique A''B''C'' de A'B'C' par rapport à (Δ). Montre que A''B''C'' est l'image de ABC par une translation. Quel est son vecteur ?

8. ABC est un triangle de hauteur [AH]. I est le milieu de [AB] et J celui de [AC]. La droite (AH) coupe la droite (IJ) en O. Construis le symétrique A'B'C' de ABC par rapport à (AH), puis le symétrique A''B''C'' de A'B'C' par rapport à (IJ). Démontre que A''B''C'' est le symétrique de ABC par rapport à O.

Exercices de recherches et problèmes

9. $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O. soit A un point de ce cercle et soit I le milieu de [OA]. On appelle (d) la médiatrice de [OA] et (Δ) la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en A.

a) Fais une figure. Construis le symétrique $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ par rapport à (d) puis le symétrique $\mathscr{C}''$ de $\mathscr{C}'$ par rapport à (Δ).
b) Démontre que $\mathscr{C}''$ est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{IA}$.

10. Soit un triangle ABC. J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC]. Soit M un point du plan, N est le symétrique de M par rapport à J, P est le symétrique de N par rapport à K. Q est le symétrique de P par rapport à L et M'est le symétrique de Q par rapport à J.

a) Démontre que M'est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
b) Démontre de même, que M est l'image de M' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

Des symétries centrales successives

11. Soit ABCD un parallélogramme et soit M un point du plan. N est le symétrique de M par rapport à A, P est le symétrique de N par rapport à B, Q est le symétrique de N par rapport à C et M'est le symétrique de P par rapport à D.

a) Fais une figure. Qu'observes-tu ?
b) Quelle est la translation qui peut remplacer les deux premières symétries ? Quelle est la translation qui peut remplacer les deux autres ?
c) Montre que ces deux translations effectuées successivement correspondent à une translation unique de vecteur nul. Déduis-en que M' = M.

12. Soit ABCD un quadrilatère quelconque et soit M un point du plan. N est le symétrique de M par rapport à A, P est le symétrique de N par rapport à B, Q est le symétrique de P par rapport à C et M'est le symétrique de Q par rapport à D.

a) Construis le vecteur $\vec{v} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$.
   Compare ce vecteur au vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
   Qu'observes-tu ?
b) Montre que M'est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

Translation et symétrie centrale

13. Soit $\vec{v}$ un vecteur et M et S deux points du plan. On appelle N l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$, M' le symétrique de N par rapport à S et A l'antécédent de S par la translation de vecteur $\vec{v}$.
Soit O le milieu de [AS].
Démontre que O est le milieu de [MM'].
Déduis-en que M'est le symétrique de M par rapport à O.

Trois symétries centrales successives

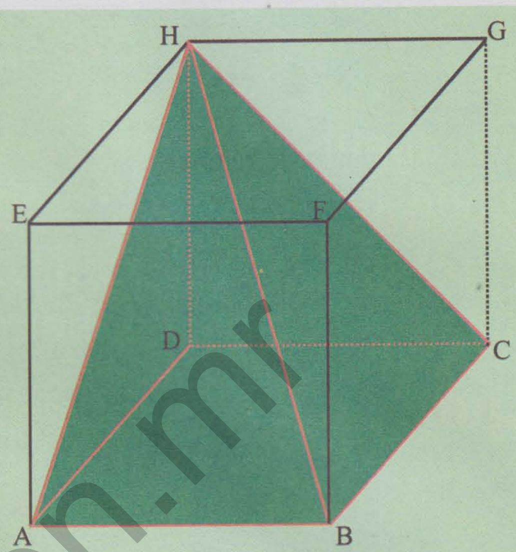
14. Utilise le résultat de l'exercice 13 pour démontrer que trois symétries centrales successives par rapport à trois points non alignés peuvent être remplacées par une seule symétrie centrale.

15 Cône de révolution

Je me souviens

1. ABCDEFGH est un …. d'…. a = 4cm.
- Calcule la surface latérale de ABCDEFGH.
- Calcule le volume de ABCDEFGH.

2. HABCD est une … de hauteur …..
- Cette … est constitué de 4… et d'une… de forme …
- Calcule la surface latérale de HABCD.
- Calcule le volume de HABCD.



3. Complète le tableau de correspondance

Angle	360°			150°	120°
Longueur	$2\pi \times 3$	2π	π		

Je vais plus loin

Activité 1 : *Découverte et description*

Lors de l'exposition d'un club de Mathématiques d'un collège, les élèves de $4^{ème}$AS ont réalisé plusieurs figures géométriques planes avec des fils de fer.

S'inspirant de cette exposition le professeur demande à chaque élève :

a) De construire avec du fil de fer un triangle rectangle, puis de faire tourner le triangle obtenu autour d'un des côtés de l'angle droit.

b) Quelle figure géométrique simple décrit le deuxième côté de l'angle droit?

c) Quelle figure géométrique décrit l'hypoténuse de ce triangle ?

d) Dessine en perspective la figure obtenue, en prenant S pour sommet du cône.

O le centre du disque de base ; M un point du cercle de base de rayon r = 2,5 cm et de hauteur 6cm.

e) Calcule le cosinus de l'angle $O\hat{S}M$, en déduis l'arrondi à 0,1° de sa mesure.

f) On appelle M' le point du cercle de base diamétralement opposé à M.

Donne l'arrondi à 1° de l'angle $M\hat{S}M'$

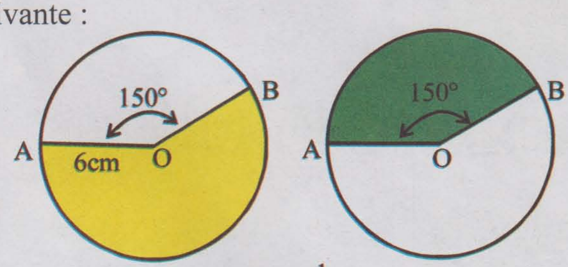
Activité 2 :

Fabrication de chapeaux

Un jeune apprenti artisan, veut fabriquer des chapeaux pour se protéger contre le soleil.

Son maître lui propose la démarche suivante :

- Sur une feuille de papier de dessin, reproduis la figure ci-contre en vraie grandeur, puis découpe le disque en les coupant suivant [OA]. et [OB], on obtient deux bouts de disques.



Echelle $\frac{1}{4}$

Colle avec un ruban adhésif, les rayons bord à bord, des deux, vous avez construis deux chapeaux pointus.

Les deux surfaces obtenues sont des surfaces latérales de deux cônes.

Pour obtenir les patrons, il reste à construire leurs bases, sur une feuille qui matérialise les bords inférieurs des deux cônes obtenus plus haut.

Découpe les deux disques correspondant qui sont les bases des deux cônes dont tu as construis puis colle. Chaque disque sur le bout de base des cônes.

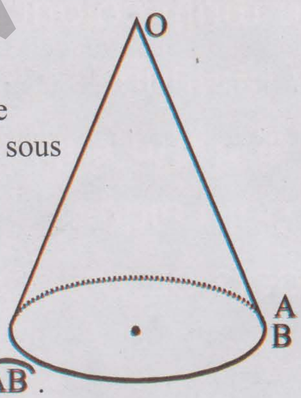
Trouve la longueur de ces deux arcs dans le tableau suivant :

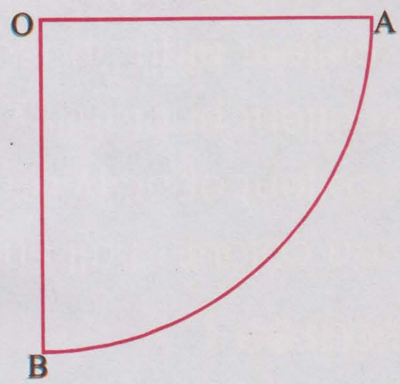
Angle au centre	360°	150°	210°	
Longueur des arcs				

Activité 3 :

Patron d'un cône de révolution

Pour participer à une fête, un des frères de Cheikh, veut faire un déguisement avec un chapeau sous la forme d'un cône.
On donne le rayon de base r = 25 cm, la hauteur 60 cm.





a) Détermine, le rayon OA du secteur circulaire $\widehat{OAB}$.
b) Calcule, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
c) En déduis la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
d) Dessine le patron de ce cône à l'échelle $\frac{1}{10}$.
e) Fais le même patron sur une feuille que vous découperez et collerez sur votre cahier ; colle des bases en mettant des languettes sur le disque de base et l'un des bords de la surface latérale.