I- NOMBRES ET CALCUL DANS $\mathbb{R}$

Faire savoir

Le cours

1. Rappel sur les ensembles de nombres

a) $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; \dots\}$$

L'ensemble $\mathbb{N} - \{0\}$ est l'ensemble des entiers naturels, non nuls et se note $\mathbb{N}^*$

b) $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; +1; +2; \dots\}$$

Avec ;

- $\mathbb{Z}_+$ l'ensemble des entiers relatifs positifs : $\mathbb{Z}_+ = \{0; +1; +2; +3; \dots\}$
- $\mathbb{Z}_-$ l'ensemble des entiers relatifs négatifs : $\mathbb{Z}_- = \{\dots; -3; -2; -1; 0\}$

Et ;

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_- \text{ et } \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{Z} - \{0\}$ est l'ensemble des entiers relatifs, non nuls et se note $\mathbb{Z}^*$
- $\mathbb{Z}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}_+ - \{0\}$ des entiers relatifs strictement positifs.
- $\mathbb{Z}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{Z}_- - \{0\}$ des entiers relatifs strictement négatifs.

c) $\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux relatifs

$$\mathbb{D} = \{\dots; -5{,}48; \dots; 0; \dots; 2{,}127; \dots; 3{,}4; \dots\}$$
$$\mathbb{D} = \{a \times 10^n;\ tel\ que\ a\ et\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Avec ;

- $\mathbb{D}_+$ l'ensemble des décimaux relatifs positifs : $\mathbb{D}_+ = \{a \times 10^n;\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}_+\ et\ n \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{D}_-$ l'ensemble des décimaux relatifs négatifs : $\mathbb{D}_- = \{a \times 10^n;\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}_-\ et\ n \in \mathbb{Z}\}$

Et ;

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_+ \cup \mathbb{D}_- \text{ et } \mathbb{D}_+ \cap \mathbb{D}_- = \{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{D} - \{0\}$ est l'ensemble des décimaux relatifs, non nuls et se note $\mathbb{D}^*$
- $\mathbb{D}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{D}_+ - \{0\}$ des décimaux relatifs strictement positifs.
- $\mathbb{D}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{D}_- - \{0\}$ des décimaux relatifs strictement négatifs.

d) $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels relatifs

$$\mathbb{Q} = \{{}^{a}/_{p}\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}\ et\ p \in \mathbb{Z}^*\}$$

Avec ;

- $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels relatifs positifs : $\mathbb{Q}_+ = \{{}^{a}/_{p};\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}_+\ et\ p \in \mathbb{Z}^*\}$
- $\mathbb{Q}_-$ l'ensemble des nombres rationnels relatifs négatifs : $\mathbb{Q}_- = \{{}^{a}/_{p};\ tel\ que\ a \in \mathbb{Z}_-\ et\ p \in \mathbb{Z}^*\}$

Et ;

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \text{ et } \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{Q} - \{0\}$ est l'ensemble des rationnels relatifs, non nuls et se note $\mathbb{Q}^*$
- $\mathbb{Q}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{Q}_+ - \{0\}$ des nombres rationnels relatifs strictement positifs.
- $\mathbb{Q}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{Q}_- - \{0\}$ des nombres rationnels relatifs strictement négatifs.

Caractéristique

Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sont périodiques.

Exemple 1

$$\frac{13}{7} \in \mathbb{Q}\ car ; \frac{13}{7} = 1{,}857142857142 \ldots = 1,\overline{857142}$$

e) $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels ;

$$\mathbb{R} = \{\boldsymbol{a}\ tel\ que\ a\ est\ un\ \boldsymbol{DDI}^*\} \ * \boldsymbol{DDI} = \boldsymbol{D}éveloppement\ \boldsymbol{D}écimal\ \boldsymbol{In}fini$$

Avec ;

- $\mathbb{R}_+ = \text{l'ensemble des réels positifs}$
- $\mathbb{R}_- = \text{l'ensemble des réels négatifs}$

Et ;

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \ \text{ et } \ \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$$

- L'ensemble $\mathbb{R} - \{0\}$ est l'ensemble des nombres réels, non nuls et se note $\mathbb{R}^*$
- $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ des nombres réels strictement positifs.
- $\mathbb{R}_-^*$ est l'ensemble $\mathbb{R}_- - \{0\}$ des nombres réels strictement négatifs.

Remarque

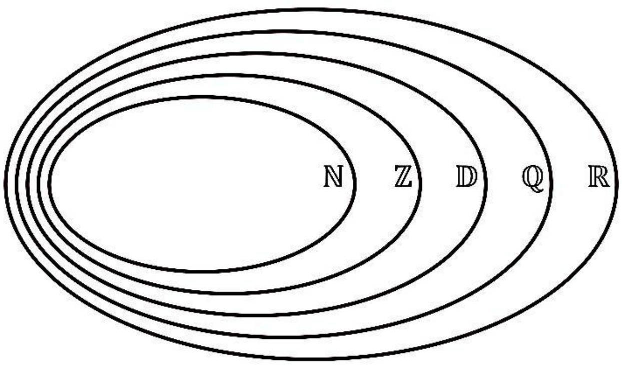
Les nombres réels n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés nombres irrationnels.

Exemple 2

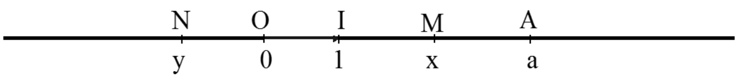
Soit $a = 17{,}12233344445555566666\ldots \in \mathbb{R}$; a est irrationnel car on voit qu'il n'est pas périodique.

Et $b = -12{,}0100100010000100001 \ldots \in \mathbb{R}$; b est irrationnel car on voit qu'il n'est pas périodique.

On a ; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



f) Repérage sur la droite numérique



Soit la droite (D) munie du repère $(O; I)$. L'ensemble des nombres réels permet de repérer la totalité des points de la droite (D). Autrement dit ; il existe une correspondance exacte appelée bijection, entre chaque point d'une droite graduée, et un nombre réel unique.

Ainsi, on peut donc définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée.

Exemple 3

Soit les nombres rationnels ; $x = 4,\overline{735}$ et $y = -0,\overline{1928}$.

Donner l'écriture fractionnaire de x et y.

Solution

$$x = 4,\overline{735} \Longrightarrow 1\,000x = 4\,735,\overline{735} = 4\,731 + 4,\overline{735} = 4\,731 + x \Longrightarrow 1\,000x - x = 4\,731$$

$$\Longrightarrow 999x = 4\,731 \Longrightarrow x = 4\,731 \div 999 \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1\,577}}{\mathbf{333}}$$

$$y = -0,\overline{1928} \Longrightarrow 10\,000y = -1\,928,\overline{1928} = -1\,928 + (-0,\overline{1928}) = -1\,928 + y$$

$$\Longrightarrow 10\,000y - y = -1\,928 \Longrightarrow 9\,999y = -1\,928 \Longrightarrow y = -1\,928 \div 9\,999 \Longrightarrow \boldsymbol{y} = -\frac{\mathbf{1\,928}}{\mathbf{9\,999}}$$

Exemple 4

a) Trouver la nature de chaque nombre en spécifiant le plus petit ensemble de nombres $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}$ auquel il appartient :

$$3\sqrt{64};\ \frac{5\pi}{4\pi};\ 4-10;\ \frac{5+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}};\ 2{,}6666;\ \frac{8}{3};\ \frac{-36}{1{,}5}\ ;\ 10^{-4}$$

b) Y-t-il des nombres égaux dans cette liste ?

Solution

a)	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	Le plus petit ensemble auquel il appartient
$3\sqrt{64} = 3 \times 8 = 24$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{N}$
$\frac{5\pi}{4\pi} = \frac{5}{4} = 1{,}25$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$
$4 - 10 = -6$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Z}$
$\frac{5+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\mathbb{R}$
$2{,}6666$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$
$\frac{8}{3}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Q}$
$\frac{-36}{1{,}5} = -24$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{Z}$
$10^{-4} = 0{,}0001$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\mathbb{D}$

b) Il n'y a pas de nombres égaux dans cette liste.

2. Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$

Rappel sur le calcul de base

a) Egalité et opérations

Règles de calcul

Pour tous réels x, y et a, on a :

- $x = y \Leftrightarrow x + a = y + a$
- $x = y \Leftrightarrow x - a = y - a$
- $x = y \Leftrightarrow x \times a = y \times a\ (a \neq 0)$
- $x = y \Leftrightarrow x \div a = y \div a\ (a \neq 0)$
- $x = y$ et $a = b \Leftrightarrow x + a = y + b$
- $x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$ ($x \geq 0$ et $y \geq 0$
- $x = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$ ($x \geq 0$ et $y \geq 0$

b) Avec les parenthèses

Pour tous nombres réels a, b et c, on a :

a- Signe $(-)$ **:**

$a \times (-b) = (-a) \times b = -ab$

Et $(-a) \times (-b) = ab$

b- Produit nul :

$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \; ou \; b = 0$

c- Simplification :

$ac = bc \; (c \neq 0) \Leftrightarrow a = b$

d- Calcul littéral - Produits (identités remarquables) :

Pour tous réels a, b, c, d, x, y et z, on a :

- $a + (b + c) = a + b + c$
- $a + (b - c) = a + b - c$
- $a - (b + c) = a - b - c$
- $a - (b - c) = a - b + c$
- $a \times (b + c) = ab + ac$
- $a \times (b - c) = ab - ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd$
- $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$
- $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$
- $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^3 + y^3$
- $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^3 - y^3$
- $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Exemple 5

1°/ Développer : $(\sqrt{3} + 2)^2$; $(\sqrt{3} - 2)^2$; $(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1)$.

2°/ Factoriser : $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4\left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2$;

Puis résoudre l'équation : $f(x) = 0$.

Solution

$\mathbf{1}°/ \; (\sqrt{3} + 2)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3} \times 2) + (2)^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = \mathbf{7 + 4\sqrt{3}}$

$(\sqrt{3} - 2)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3} \times 2) + (2)^2 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = \mathbf{7 - 4\sqrt{3}}$

$(\sqrt{7} - 1)(\sqrt{7} + 1) = (\sqrt{7})^2 - (1)^2 = 7 - 1 = \mathbf{6}$

$\mathbf{2}°/ \; f(x) = x^2 - 4x + 4 - 4\left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2 = (x - 2)^2 - 4\left(\frac{3}{2}x - 2\right)^2$

$= \left[(x - 2) - 2\left(\frac{3}{2}x - 2\right)\right]\left[(x - 2) + 2\left(\frac{3}{2}x - 2\right)\right] = \left(x - 2 - \frac{6}{2}x + 4\right)\left(x - 2 + \frac{6}{2}x - 4\right)$

$= (x - 2 - 3x + 4)(x - 2 + 3x - 4) \Longrightarrow \boldsymbol{f(x) = (-2x + 2)(4x - 6)}$

$$f(x)=0 \Longrightarrow (-2x+2)(4x-6)=0 \Longrightarrow -2x+2=0 \text{ ou } 4x-6=0 \Longrightarrow \boldsymbol{S}=\left\{\mathbf{1};\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right\}$$

Exemple 6

1°/ Développer

$$A=(2a+3)^3;\ \ B=(5b-4)^3$$

2°/ Factoriser

$$C=x^3+8;\ \ D=y^3-27$$

3°/ Factoriser

$$E=8x^3+12x^2+6x+1$$
$$F=27y^3-54y^2+36y-8$$

Solution

1°/

$$A=(2a+3)^3=(2a)^3+3\times(2a)^2\times 3+3\times(2a)\times 3^2+3^3$$
$$=8a^3+36a^2+54a+27$$
$$B=(5b-4)^3=(5b)^3-3\times(5b)^2\times 4+3\times(5b)\times 4^2-4^3$$
$$=125b^3-150b^2+240b-64$$

2°/

$$C=x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$$
$$D=y^3-27=y^3-3^3=(y-3)(y^2+3y+9)$$

3°/

$$E=8x^3+12x^2+6x+1=(2x)^3+3\times(2x)^2\times 1+3\times(2x)\times 1^2+1^3=(2x+1)^3$$
$$F=27y^3-54y^2+36y-8=(3y)^3-3\times(3y)^2\times 2+3\times(3y)\times 2^2-2^3=(3y-2)^3$$

Exercice 7

Démontrer par développement ou par factorisation les identités précédentes

c) Avec les quotients

a- Signe $(-)$:

Pour tous nombres réels a, b, c, d et k, on a :

$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$

b- Simplification :

$\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b}$ (si $k\neq 0$)

c- Egalité :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc\ (b\neq 0\ ;\ d\neq 0)$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$

d- Addition :

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

e- Multiplication :

$k\times\frac{a}{b}=\frac{ka}{b}\ et\ \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

f- Division :

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}\ ;\ \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}\ ;\ \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}\ ;\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemple 8

Calculer les quotients :

$$a = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} - 3; \quad b = \frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}}$$

Solution

$$a = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} - 3 = 2 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} - 3 = 2 + \frac{2}{5} - 3 = 2 + 0{,}4 - 3 = \mathbf{-0,6}$$

$$b = \frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{6}} = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{4+5}{10}\right) \div \left(\frac{18-4}{24}\right) = \frac{9}{10} \times \frac{24}{14} = \frac{9 \times 24}{10 \times 14} = \mathbf{\frac{54}{35}}$$

d) Avec les puissances entières de réels

Définition

Pour tous a et b réels, et tous m et n naturels,

☖ Si $n > 0\ ;\ a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ facteurs}$

☖ Si $n = 0\ ;\ a^0 = 1$

☖ Si $n < 0\ ;\ a^n = \dfrac{1}{a^{-n}} \quad (a \neq 0)$

Règles de calcul

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemple 9

Mettre sous forme de $a \times 10^n$ ($a \in \mathbb{Z}\ et\ n \in \mathbb{Z}$), les nombres suivants :

$153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5}$; $\left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3$; $[(-0{,}01)^2]^3$; $[(-0{,}2)^3]^2$.

Solution

$153 \times 10^{-4} + 32 \times 10^{-3} - 16 \times 10^{-5} = (1\,530 + 3\,200 - 16) \times 10^{-5} = \mathbf{4\,714 \times 10^{-5}}$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{5^2 \times 2^3}{2^2 \times 5^3} = -\frac{2}{5} = -0{,}4 = \mathbf{-4 \times 10^{-1}}$$

$[(-0{,}01)^2]^3 = [(-10^{-2})^2]^3 = \mathbf{10^{-12}}$

$[(-0{,}2)^3]^2 = [(-2 \times 10^{-1})^3]^2 = \mathbf{64 \times 10^{-6}}$

e) L'écriture scientifique d'un décimal relatif

Définition

La notation scientifique d'un nombre décimal relatif est de la forme $a \times 10^{p}$ où, a est un décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule, $(1 \leq |a| < 10)$, et p est un entier relatif.

Exemple 10

Donner l'écriture scientifique des nombres décimaux suivants :

$$A = 5\,012{,}563; \;\; B = 42\,000; \;\; C = -0{,}64908; \;\; D = -237 \times 10^{-4}; E = 0{,}00891 \times 10^{3}$$

Solution

$$A = 5\,012{,}563 = 5{,}012563 \times 10^{3}; \quad B = 42\,000 = 4{,}2 \times 10^{4}$$
$$C = -0{,}64908 = -6{,}4908 \times 10^{-1}; \quad D = -237 \times 10^{-4} = -2{,}37 \times 10^{-2}$$
$$E = 0{,}00891 \times 10^{3} = 8{,}91 \times 10^{6}$$

f) Nombres premiers

Définition 1

Soit a et b deux entiers naturels.

On dit que b est un diviseur de a (ou que a est un multiple de b), s'il existe un entier naturel k tel que $a = k.b$

Définition 2

On dit qu'un entier naturel p est premier s'il possède exactement deux diviseurs ; 1 et lui-même.

Propriété

Tout entier naturel $n \geq 2$, se décompose en un produit de facteurs de puissances de nombres premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs.

Exemple 11

$$5\,821\,200 = 16 \times 27 \times 25 \times 49 \times 11 = 2^{4} \times 3^{3} \times 5^{2} \times 7^{2} \times 11^{1}$$
$$3\,539\,250 = 2 \times 9 \times 125 \times 121 \times 13 = 2^{1} \times 3^{2} \times 5^{3} \times 11^{2} \times 13^{1}$$
$$35\,919\,936 = 64 \times 81 \times 169 \times 41 = 2^{6} \times 3^{4} \times 13^{2} \times 41^{1}$$

g) Avec les racines carrées

Définition

Soit a un nombre réel positif, on note $\sqrt{a}$ le seul nombre réel positif tel que ;

$$\left(\sqrt{\boldsymbol{a}}\right)^{2} = \boldsymbol{a}$$

a- Règles de calcul

Pour tout réels positifs a et b, on a ;

- $\sqrt{a^{2}} = \left(\sqrt{a}\right)^{2} = a \; et \; \sqrt{a^{n}} = \left(\sqrt{a}\right)^{n} \;\; (n \; entier)$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^{2}} = |a|$ (pour tout $a \in \mathbb{R}$)

b- Expression conjuguée

Exemple 12

L'expression conjuguée de : $\sqrt{2} + 1 \; est \; \sqrt{2} - 1$

L'expression conjuguée de : $3 - 4\sqrt{5} \; est \; 3 + 4\sqrt{5}$

L'expression conjuguée de : $\sqrt{5} + \sqrt{7} \; est \; \sqrt{5} - \sqrt{7}$

L'expression conjuguée de : $5\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \; est \; 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

c- L'équation $x^2 = a$

Si $a > 0$; il y a 2 solutions; $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Si $a = 0$; il y a 1 solution; 0

Si $a < 0$; il n'y a pas de solution.

Exemple 13

1°/ Simplifier : $S_1 = 5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180}$;

$S_2 = 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27}$.

2°/ Ecrire sans radicaux aux dénominateurs :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}+2}\ ; \qquad B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\ ; \qquad C = \frac{4\sqrt{2}-3}{5\sqrt{2}+3}$$

Solution

1°/ $S_1 = 5\sqrt{45} - \sqrt{80} + 2\sqrt{180} = 5\sqrt{9\times 5} - \sqrt{16\times 5} + 2\sqrt{36\times 5} = 5\times 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\times 6\sqrt{5}$

$= 15\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = (15 - 4 + 12)\sqrt{5} = \mathbf{23\sqrt{5}}$

$S_2 = 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75} + \sqrt{27} = 5\sqrt{16\times 3} - 2\sqrt{25\times 3} + \sqrt{9\times 3} = 5\times 4\sqrt{3} - 2\times 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

$= 20\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = (20 - 10 + 3)\sqrt{3} = \mathbf{13\sqrt{3}}$

2°/ Je multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = \mathbf{2-\sqrt{3}}$$

$$B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{21}+6}{7-3} = \frac{2\sqrt{21}+6}{4} = \mathbf{\frac{\sqrt{21}+3}{2}}$$

$$C = \frac{4\sqrt{2}-3}{5\sqrt{2}+3} = \frac{(4\sqrt{2}-3)(5\sqrt{2}-3)}{(5\sqrt{2}+3)(5\sqrt{2}-3)} = \frac{40-12\sqrt{2}-15\sqrt{2}+9}{50-9} = \mathbf{\frac{49-27\sqrt{2}}{41}}$$

h) Avec la valeur absolue

Définition

Soit x un nombre réel :

- $|x| = x\ si\ x \geq 0$
- $|x| = -x\ si\ x \leq 0$

Règles de calcul

Soit x et y deux réels, et a et b deux valeurs réelles :

☒ $|x| \geq 0$

☒ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

☒ $|x| = |-x|$

☒ $\sqrt{x^2} = |x|$

☒ $|x| \times |y| = |x \times y|$

☒ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

☒ $|x| = |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = -y \end{cases}$

☒ $|x + y| \leq |x| + |y|$

☒ $|x^n| = |x|^n$
☒ $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
☒ $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$
☒ $|x - a| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$

Exemple 14

Trouver à chaque fois le ou les réel(s) x tel(s) que :

a)$|x| = 7$; **b)** $|x| = -4$; **c)** $|x - 4| = 1$; **d)** $|1 - 2x| = 3$; **e)** $|x - 5| < 2$; **f)** $|x + 1| \geq 7$.

Solution

a) $|x| = 7 \Leftrightarrow (x = -7 \text{ } ou \text{ } x = 7) \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\mathbf{-7}; \mathbf{7}\}$

b) $|x| = -4 \Rightarrow \boldsymbol{S} = \boldsymbol{\Phi}$ il n'existe pas de solutions.

c) $|x - 4| = 1 \Leftrightarrow (x - 4 = -1 \text{ } ou \text{ } x - 4 = 1)$ d'où, $x = 3 \text{ } ou \text{ } x = 5 \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\mathbf{3}; \mathbf{5}\}$

d) $|1 - 2x| = 3 \Leftrightarrow (1 - 2x = -3 \text{ } ou \text{ } 1 - 2x = 3)$ d'où, $x = 2 \text{ } ou \text{ } x = -1 \Rightarrow \boldsymbol{S} = \{\mathbf{-1}; \mathbf{2}\}$

e) $|x - 5| < 2 \Leftrightarrow (-2 < x - 5 < 2)$ d'où, $3 < x < 7 \Rightarrow \boldsymbol{S} =]\mathbf{3}; \mathbf{7}[$

f) $|x + 1| \geq 7 \Leftrightarrow (x + 1 \leq -7 \text{ } ou \text{ } x + 1 \geq 7)$ d'où, $x \leq -8 \text{ } ou \text{ } x \geq 6 \Rightarrow \boldsymbol{S} =]-\infty; \mathbf{-8}] \cup [\mathbf{6}; +\infty[$

Exemple 15

Ecrire sans la valeur absolue

$$|3 - \sqrt{13}| \text{ ; } \quad \left|\frac{\sqrt{12} - 4}{5 - \sqrt{24}}\right|$$

Solution

Comme ; $3 < \sqrt{13} \Rightarrow 3 - \sqrt{13} < 0$

Comme on a ; $opp(3 - \sqrt{13}) = \sqrt{13} - 3 > 0 \Rightarrow$

$|3 - \sqrt{13}| = \sqrt{13} - 3$

Comme ; $\sqrt{12} - 4 < 0 \text{ } et \text{ } 5 - \sqrt{24} > 0 \Rightarrow |\sqrt{12} - 4| = 4 - \sqrt{12} \text{ } et \text{ } |5 - \sqrt{26}| = 5 - \sqrt{26}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{12} - 4}{5 - \sqrt{26}}\right| = \frac{|\sqrt{12} - 4|}{|5 - \sqrt{26}|} = \frac{4 - \sqrt{12}}{5 - \sqrt{26}}$$

i) Ordre – encadrement et opérations

Règles de calcul

Pour tous réels a, b, x et y, on a :

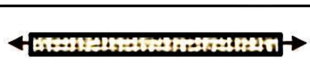
☒ $a \leq 0 \text{ } et \text{ } 0 \leq b \Rightarrow a \leq b$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x + a \leq y + a \text{ } (a \in \mathbb{R})$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x - a \leq y - a \text{ } (a \in \mathbb{R})$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x \times a \leq y \times a \text{ } (a > 0)$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x \times a \geq y \times a \text{ } (a < 0)$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x \div a \leq y \div a \text{ } (a > 0)$
☒ $x \leq y \Leftrightarrow x \div a \geq y \div a \text{ } (a < 0)$
☒ $0 \leq x \leq y \text{ } et \text{ } 0 \leq a \leq b \Rightarrow 0 \leq ax \leq by$
☒ $a \leq b \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -b \leq -a$
☒ $0 \leq a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$
☒ $0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq y^2$
☒ $0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

j) Intervalles de $\mathbb{R}$ – Ordre – Encadrements

Définition

Soit a et b deux réels tels que $a \leq b$;

Un intervalle est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ caractérisé par des inégalités :

inégalités	Représentation	Intervalles
$a \leq x \leq b$		$x \in [a; b]$
$a \leq x < b$		$x \in [a; b[$
$a < x \leq b$		$x \in]a; b]$
$a < x < b$		$x \in]a; b[$
$x \geq a$		$x \in [a; +\infty]$
$x > a$		$x \in]a; +\infty[$
$x \leq a$		$x \in]-\infty; a]$
$x < a$		$x \in]-\infty; a[$
$x \in \mathbb{R}$		$x \in]-\infty; +\infty[$

Centre et rayon d'un intervalle

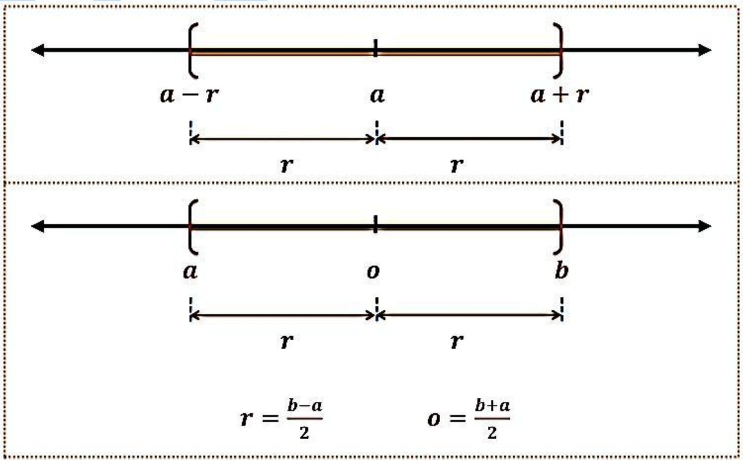
Soit a un nombre réel, et soit r un réel positif. Pour tout nombre réel x on a ;

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$$

a est appelé centre de l'intervalle et r son rayon et, plus généralement ;

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}$$

$$\text{Centre} = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \text{Rayon} = \frac{b-a}{2}$$



a- Intervalles à branches extérieures

$$x \leq a \text{ ou } x \geq b \Leftrightarrow \left|x + \frac{a+b}{2}\right| \geq \frac{b-a}{2}$$

b- Distance dans $\mathbb{R}$

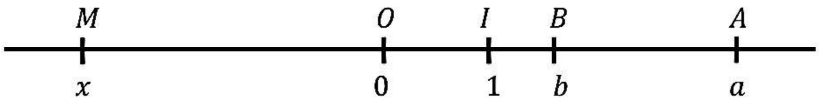
$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow d\left(x; \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{b-a}{2}$$

$$\boldsymbol{a} < x < b \Leftrightarrow d\left(\boldsymbol{x}; \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2}}\right) < \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}$$

c- Interprétation géométrique

Soit a et b deux réels quelconques avec $a \leq b$ (ou $a \geq b$) sur une droite graduée (d) munie d'un repère $(O; I)$. Soit A et B les points d'abscisses respectifs a et b. Par définition, la distance des réels a et b, notée $d(a; b)$ est la distance AB. On a ; $d(a; b) = AB = |a-b| = |b-a|$. En particulier, si M est un point d'abscisse x ($x \in \mathbb{R}$), alors, $d(x; 0) = |x-0| = |x| = OM$.

(***La figure suivante est faite avec a*** $> b$ ***et x*** < 0).



Exemple 16

Ecrire à l'aide d'intervalles, de la valeur absolue les inégalités suivantes:

a) $1 \leq x \leq 6$; **b)** $-5 < x < -3$; **c)** $-2 < x < 5$; **d)** $-11 < x < -1$; **e)** $-7 \leq x \leq 8$; **f)** $5 \leq x \leq 16$ puis exprimer les en terme de distance.

$\boldsymbol{a})\ 1 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow x \in]1;\ 6[\Leftrightarrow \left|x - \frac{1+6}{2}\right| \leq \frac{7-1}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{7}{2}\right| \leq \frac{5}{2}\ d'où, d\left(x;\ \frac{7}{2}\right) \leq \frac{5}{2}$

$\boldsymbol{b})\ -5 \leq x \leq -3 \Leftrightarrow x \in]-5;\ -3[\Leftrightarrow \left|x - \frac{-5+(-3)}{2}\right| \leq \frac{-3-(-5)}{2} \Leftrightarrow |x+4| \leq 1\ d'où, d(x;\ -4) \leq 1$

$\boldsymbol{c})\ -2 < x < 5 \Leftrightarrow x \in]-2;\ 5[\Leftrightarrow \left|x - \frac{-2+5}{2}\right| \leq \frac{5-(-2)}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{7}{2}\ d'où, d\left(x;\ \frac{3}{2}\right) \leq \frac{7}{2}$

$\boldsymbol{d})\ -11 < x < -1 \Leftrightarrow x \in]-11;\ -1[\Leftrightarrow \left|x - \frac{-11+(-1)}{2}\right| < \frac{-1+11}{2} \Leftrightarrow \left|x + \frac{12}{2}\right| < \frac{10}{2}$

$\Leftrightarrow d\left(x;\ -\frac{12}{2}\right) < 5$

$\boldsymbol{e})\ -7 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in [-7;\ 8] \Leftrightarrow \left|x - \frac{-7+8}{2}\right| \leq \frac{8-(-7)}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{15}{2} \Leftrightarrow d\left(x;\ \frac{1}{2}\right) \leq \frac{15}{2}$

$\boldsymbol{f})\ 5 \leq x \leq 16 \Leftrightarrow x \in [5;\ 16] \Leftrightarrow \left|x - \frac{5+16}{2}\right| \leq \frac{16-5}{2} \Leftrightarrow \left|x - \frac{21}{2}\right| \leq \frac{11}{2} \Leftrightarrow d\left(x;\ \frac{21}{2}\right) \leq \frac{11}{2}$

3. Ordre – Encadrement – Calcul approché

a) Ordre dans $\mathbb{R}$

Définitions

Soit a et b deux nombres réels.

$a \leq b$ signifie que $b - a \geq 0$ ($b - a$ *est un réel positif*).

$a < b$ signifie que $b - a > 0$ ($b - a$ *est un réel strictement positif*).

$a \geq b$ signifie que $b - a \leq 0$ ($b - a$ *est un réel négatif*).

$a > b$ signifie que $b - a < 0$ ($b - a$ *est un réel strictement négatif*).

b) Le majorant et le minorant

m est le minorant d'un ensemble E, signifie que ;

$$\forall a \in E \Longrightarrow m < a$$

M est le majorant d'un ensemble E, signifie que ;

$$\forall a \in E \Longrightarrow a < M$$

c) Propriétés

1°/ Pour tous réels a, b et c, on a :

$a \leq b$ et $b \leq a \Leftrightarrow a = b$

$a \leq b$ et $b \leq c \Leftrightarrow a \leq c$

2°/ Soit a et b deux nombres réels ;

Pour tout réel c ; $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$

Pour tout réel positif c ; $a \leq b \Leftrightarrow a.c \leq b.c$

Pour tout réel négatif c ; $a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$

En particulier $a \leq b \Longrightarrow -b \leq -a$

Pour tout réels a, b, c et d ; $a \leq b$ et $c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d$

Pour tout réels positifs a, b, c et d ; $a \leq b$ et $c \leq d \Longrightarrow ac \leq bd$

Pour tout réels positifs a et b ; $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$, $a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Pour tout réels strictement positifs a et b ; $a \leq b \Longrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

Exercice 7

Démontrer les deux propriétés précédentes.

Remarque

La partie entière $E(x)$ d'un nombre réel x c'est le nombre entier n tel que ; $n \leq x \leq n + 1$

Exemple 17

1 - On donne les encadrements suivants :

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

En déduire des encadrements pour :

$$\sqrt{6}\text{:}\quad \sqrt{10};\quad \sqrt{15};\quad \sqrt{\frac{15}{2}};\quad 3\sqrt{5};\quad -4\sqrt{3};\quad 5\sqrt{2};\quad \frac{3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$$

Solution

$\mathbf{1}°/\ \ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415\ et\ 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$

$\Longrightarrow 1{,}414 \times 1{,}732 < \sqrt{2} \times \sqrt{3} < 1{,}415 \times 1{,}732$

$\Longrightarrow \mathbf{2{,}449048} < \boldsymbol{\sqrt{6}} < 2{,}452195$

$\mathbf{2}°/\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415\ et\ 2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

$\Longrightarrow 1{,}414 \times 2{,}236 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1{,}415 \times 2{,}237$

$\Longrightarrow \mathbf{3{,}161704} < \boldsymbol{\sqrt{10}} < 3{,}165355$

$\mathbf{3}°/\ 1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733\ et\ 2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

$\Longrightarrow 1{,}732 \times 2{,}236 < \sqrt{3} \times \sqrt{5} < 1{,}733 \times 2{,}237$

$\Longrightarrow \mathbf{3{,}872752} < \boldsymbol{\sqrt{15}} < 3{,}874988$

$\mathbf{4}°/\ 3{,}872752 < \sqrt{15} < 3{,}874988$

$et\ 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

$$\Longrightarrow \frac{3{,}872752}{1{,}414} < \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} < \frac{3{,}874988}{1{,}415}$$

$\Longrightarrow \mathbf{2,738862} < \sqrt{\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{2}}} < 2{,}738507$

5°/ $3 \times 2{,}236 < 3 \times \sqrt{5} < 3 \times 2{,}237$

$\Longrightarrow \mathbf{6,708} < 3\sqrt{\mathbf{5}} < 6{,}711$

6°/ $-4 \times 1{,}732 > -4 \times \sqrt{3} > -4 \times 1{,}733$

$\Longrightarrow -6{,}928 > -4\sqrt{3} > -6{,}932$

$\Longrightarrow \mathbf{-6,9321} < -4\sqrt{\mathbf{3}} < -6{,}928$

7°/ $5 \times 1{,}414 < 5 \times \sqrt{2} < 5 \times 1{,}415$

$\Longrightarrow \mathbf{7,07} < 5\sqrt{\mathbf{2}} < 7{,}075$

8°/ $\frac{6{,}708 - 6{,}9321}{7{,}07} < \frac{3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} < \frac{6{,}711 - 6{,}928}{7{,}075}$

$\Longrightarrow \mathbf{-0,031697} < \frac{\mathbf{3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}}}{\mathbf{5\sqrt{2}}} < -0{,}030671$

d) Valeur approchée-Encadrement

Définition

Soient a et b deux nombres réels, ε un nombre réel strictement positif.

b est une valeurs approchée de a à ε près signifie que ; $|a - b| \leq \varepsilon$

ε est l'incertitude de l'approximation ou de la valeur approchée.

Exemple 18

a) Donner des valeurs approchées (sans oublier l'incertitude) de x et de y en utilisant les encadrements ;

$$2{,}15 \leq x \leq 2{,}18\,; \quad 3{,}14 \leq y \leq \frac{22}{7}$$

b) Traduire par un encadrement chacune des informations suivantes ;

☒ 0,818 est une valeur approchée à 10^{-3} près de $\frac{9}{11}$

☒ 2,351 est une valeur approchée à 2×10^{-4} près de A.

Solution

a) Les valeurs approchées

$$2{,}15 \leq x \leq 2{,}18 \;\Longrightarrow x = 2{,}165 \text{ à } 0{,}015 \; près$$

$$3{,}14 \leq y \leq \frac{22}{7} \Longrightarrow y = 3{,}1414 \text{ à } 0{,}0014 \; près$$

b) Traduction par des encadrements

Information	Traduction
0,818 est une valeur approchée à 10^{-3} près de $\frac{9}{11}$	$0{,}818 < \frac{9}{11} < 0{,}819$
2,351 est une valeur approchée à 2×10^{-4} près de A	$2{,}351 < A < 2{,}352$

Exercices généraux

Ensembles de nombres

Exercice 1.

a) Les nombres rationnels suivants sont-ils décimaux ?

$\frac{21}{14}, \quad \frac{216}{72}, \quad \frac{497}{17}, \quad 4 \times \left(\frac{17}{16} + \frac{1}{4}\right)$

b) Donner dans chaque cas si la réponse est négative, l'écriture sous forme de fractions irréductibles

Exercice 2.

Les nombres réels suivants sont-ils rationnels ? Décimaux ? Entiers relatifs ? Entiers naturels ?

$$\sqrt{\frac{4}{25}}, \quad 10\sqrt{0{,}09}, \quad \frac{3\pi}{10}, \quad \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}, \quad \left(\sqrt{2}-1\right)^2, \quad \frac{5}{\sqrt{0{,}01}}$$

Calcul sur les puissances

Exercice 3.

On pose a, b, c des réels non nuls. Simplifier ;

$$\frac{a^{-2}a^{-3}a^{5}}{a^{-4}a^{3}a^{2}}, \quad (a^3b^3)(a^2b)^{-1}, \quad \frac{a^{-2}b^{-5}}{a^3a^{-2}}, \quad \frac{a^5}{a^8}\left(\frac{a^{-2}}{a^{-4}}\right)^{-2}, \quad \frac{(a^2b)^3b^2c^3}{a^2c(bc^2)^3}$$

Mettre les résultats sous la forme a^n, $\quad a^nb^p \quad ou \;\; a^nb^pc^q$.

Exercice 4.

Calculer et simplifier :

$x = \left(\frac{11}{7}+\frac{7}{11}\right)^2 - \left(\frac{11}{7}-\frac{7}{11}\right)^2$;

Exercice 5.

Sans calculatrice, simplifier :

$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times 1{,}5^{10}$; $B = \left(\frac{1}{20}\right)^3 \times \frac{(4\times10^{-3})^2}{0{,}025^5}$.

Exercice 6.

Effectuer les calculs suivants en donnant les résultats sous forme de produits de puissances de nombres premiers, simplifiés :

$A = \frac{4^3}{(-2)^5}$; $\qquad B = \frac{8^3\times(-45)^7}{(-15)^6\times10^3}$; $\qquad C = \frac{2^2\times3^{-5}\times25}{10\times3^2\times5^{-3}}$.

$D = \left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{15}$; $\qquad E = \frac{16\times10^{-8}\times81\times10^{-5}}{2{,}43\times10^3\times256\times10^{-12}}$.

Calculs sur les nombres premiers

Exercice 7.

Donner la décomposition en produit facteurs premiers 140 ; 2 500 ; 1 728 000

Exercice 8.

A. Décomposer 84 et 630 en produits de facteurs premiers,

B. En déduire le $PGDC(84; 630)$

C. En déduire la forme irréductibles de $\frac{84}{630}$.

Exercice 9.

1°/ Décomposer 1 624 en produit de facteurs premiers ;

2°/ Ecrire sous forme irréductible $A = \frac{1\,624}{70}$;

3°/a) Trouver le Plus Petit Multiple Commun $PPCM(1\ 624\ ;\ 70)$;

b) En déduire la valeur exacte de $B = \frac{-3}{1\ 624} + \frac{4}{70}$ (sous forme irréductible) ;

4°/ Ecrire $\sqrt{1\ 624}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b naturels et $a \geq 1$) ;

Ecriture scientifique

Exercice 10.

Donner l'écriture scientifique des nombres ;

$593{,}7$; $-0{,}051$; 35×10^{-4} ; -73.000

Identités remarquables et équations

Exercice 11.

1°/ Montrer que : $\frac{2}{3}$ est une solution de l'équation $3x^2 + x - 2 = 0$, y a-t-il une autre solution pour cette équation ?

2°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: **a)** $x^2 = 5$; **b)** $x^2 = -3$;

3°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4(2x-1)^2 = 25(5-x)^2$;

4°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x+1)(3-x) = x+1$.

Exercice 12.

1°/ a et b sont des réels, développer ;

$$A = (2a+3)^3;\ \ B = (5b-4)^3$$

2°/ x et y sont des réels, factoriser ;

$$C = x^3 + 8;\ \ D = y^3 - 27$$

3°/ x et y sont des réels, factoriser ;

$$E = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$
$$F = 27y^3 - 54y^2 + 36y - 8$$

Développement – Réduction – Factorisation – équations produit-nul

Exercice 13.

1°/ Développer et réduire : $A = 4(3-2x)^2 - (2x-7)(1-5x)$;

2°/ Calculer la valeur exacte de : $B = -x^2 + 4x - 1$ pour $x = 2 - \sqrt{3}$;

3°/ Soit : $C = -2x^2 + 11x - 5$, montrer que $C = (2x-1)(5-x)$;

4°/ Montrer que : $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

Exercice 14.

Factoriser puis résoudre l'équation dans chaque cas :

$(2x+3)(x-4) - 3(2x+3)(3x+5) = 0$; $3x^2 - x = 0$; $4x^3 - 25x = 0$;

$(2x-1)(-4x+3) - 3(2x-1)^2 = 0$; $4x^2 - 9(5x-2)^2 = 0$;

$(x+1)^3 - 16(x+1) = 0$; $x^2 - 4 + (x-2)(3-5x) = 0$.

Equations quotients

Exercice 15.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{2}{x+1} = \frac{-3}{x-2}$; **b)** $\frac{x^2+2x}{x+2} = 0$; **c)** $\frac{2x-5}{x+1} = \frac{x+1}{2x-5}$.

Mettre un problème en équation et le résoudre

Exercice 16.

1°/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \\ x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5). \end{cases}$$

2°/ Trouver trois entiers consécutifs qui soient les mesures des côtés d'un triangle rectangle.

Exercice 17.

Trouver deux réels dont la somme soit 22 et la différence de leurs carrés 88.

Forme adaptée au problème posé

Exercice 18.

On donne $P(x) = 5(x^2 - 9) - (x-5)(6-2x)$.

1°/ Développer et réduire $P(x)$.

2°/ Factoriser $P(x)$.

3°/ Trouver la forme convenable pour résoudre les équations :

a) $P(x) = 0$;

b) $P(x) = -15$;

c) $P(x) = 7x + 5$.

Exercice 19.

Soit $A = x^2 + 4x + 21$ (forme 1).

1°/ Montrer que pour tout x, $A = (7-x)(x+3)$ (forme 2).

2°/ Montrer que pour tout x, $A = -(x-2)^2 + 25$ (forme 3).

3°/ En choisissant la bonne écriture de A :

a) Calculer la valeur exacte de A pour $x = 2 + \sqrt{2}$;

b) Résoudre $A = 0$;

c) Résoudre $A = 21$;

d) Résoudre $A = 16$;

e) Résoudre $A = 7 - x$.

Exercice 20.

Soit $A = \frac{3x^2+5x+2}{x^2-4}$ (forme 1), définie pour $x \in E = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

1°/ Montrer que, pour tout $x \in E$, $A = 3 + \frac{5x+14}{x^2-4}$ (forme 2).

2°/ En choisissant la bonne écriture de A ; résoudre $A = \frac{2}{x^2-4}$.

Calcul avec les quotients

Exercice 21.

Simplifier ;

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}, \quad \frac{\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}, \quad \frac{4-\frac{2}{3}}{4}$$

Exercice 22.

Simplifier ;

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}$$

Exercice 23.

Soient $a, b\ et\ c$ trois réels non nuls.

a) Ecrire $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ sous forme d'une seule fraction

b) Montrer que si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, alors $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$

Le vérifier pour $a=2, b=3$ et $c=-1$.

c) La réciproque est –elle vraie ?

Exercice 24.

Vérifier l'égalité ; $1+x+x^2+x^3+x^4=\frac{1-x^5}{1-x}$

successivement pour $x=0, x=-1\ et\ x=\frac{1}{2}$

Le démontrer pour x quelconque différent de 1.

Exercice 25.

Donner l'écriture fractionnaire de

$$A=\frac{x+2}{3-x}+\frac{5+x}{x+1}$$

Exercice 26.

Donner la fraction correspondante au quotient rationnel dans chaque cas :

$x=2,\overline{25}$; $\quad y=0,\overline{463}$; $\quad z=45,\overline{8473}$;

Calcul sur les racines carrées

Exercice 27.

Simplifier

a) $(\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+3)$, **b)** $(\sqrt{5}-1)^2$, **c)** $\sqrt{32}+\sqrt{42}$, **d)** $\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt{\sqrt{2}-1}$

Exercice 28.

Ecrire chacun des nombres suivants sans radicaux aux dénominateurs :

$$A=\frac{2}{\sqrt{5}}\ ;\ B=\frac{1}{\sqrt{2}-1};\ C=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

Exercice 29.

En déduire une expression simple de la somme ;

$$N=\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

Exercice 30.

Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé nombre d'or, et on le note φ.

a) Comparer $\varphi-1$ et $\frac{1}{\varphi}$

b) En déduire que φ est une solution de l'équation $x^2=x+1$, puis calculer φ^2.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, φ est une solution de l'équation ; $x^{n+2}=x^{n+1}+x^n$.

d) Calculer alors φ^3 et φ^4

Valeur absolue

Exercice 31.

Calculer chacun des nombres suivants ;

$$\left|\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|\ et\ \left|\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right|-\left|\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right|$$

Et donner le résultat sous forme d'une fraction.

Exercice 32.

Ecrire sans valeur absolue les réels suivants ;

$$a=\left|\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right|, b=|10^{-1}|, c=|1{,}7-\sqrt{3}|, d=|\pi^2-10|, e=\left|\left(\frac{5}{2}-\sqrt{5}\right)(-3)\right|$$

Exercice 33.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes ;

$\boldsymbol{a})\ |x+2|=5,$ $\boldsymbol{b})\ |x+2|=-5,$ $\boldsymbol{c})\ |2x-1|=3,$ $\boldsymbol{d})|2x+1|=|x+3|$

Exercice 34.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes ;

$\boldsymbol{a})\ |x|\leq 3,$ $\boldsymbol{b})\ |5x-1|\leq 3,$ $\boldsymbol{c})\ |x|\geq 3,$ $\boldsymbol{d})\ \left|2-\frac{1}{3}x\right|>1$

Calcul sur les intervalles

Exercice 35.

Ecrire sous forme d'intervalles chacun des ensembles suivants :

a) L'ensemble I_1 des x tels que $3\geq x\geq -5$;

b) L'ensemble I_2 des x tels que $0<x<51$;

d) L'ensemble I_3 des x tels que $2\leq x$;

e) L'ensemble I_4 des x tels que $x > -3$;
f) L'ensemble I_5 des x tels que $-4 \geq x$.

Exercice 36.

On appelle intersection de deux intervalles I et J l'ensemble des réels qui appartiennent à I et à J. On la note $I \cap J$.
On appelle la réunion de deux intervalles I et J l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J. On la note $I \cup J$.
1°/ Soit $I =]-5; 4]$ et $J = [2; 7[$. Déterminer $I \cap J$ et $I \cup J$.
2°/ Soit $K =]-\infty; 3[$ et $L = [4;\ +\infty[$. Déterminer $K \cap L$ et $K \cup L$.

Exercice 37.

A l'aide d'un schéma adéquat, déterminer l'intersection et la réunion des deux intervalles donnés ;
a) $I =]-\infty; 1[$ et $J = [-3;\ +\infty[$
b) $I =]-5;\ +\infty[$ et $J = [4;\ +\infty[$
c) $I =]-\infty; 1[$ et $J =]1;\ +\infty[$

Exercice 38.

Donner sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles, les ensembles des réels x définis par les conditions suivantes ;
a) $x \leq 3$ et $x > -1$, **b)** $x \geq 2$ ou $x < 1$, **c)** $x \in \mathbb{R}$,
d) $x \leq \frac{1}{2}$ et $x > -1$, **e)** $x < 3$ et $x \neq -1$, **f)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Exercice 39.

Dans chacun des cas suivants, représenter les intervalles I et J sur une droite graduée. Déterminer ensuite $I \cap J$ et $I \cup J$.
a) $I =]-5; 1[$ et $J = \left[-\frac{5}{7}; 6\right[$
b) $I = \left]-2;\ -\frac{2}{3}\right[$ et $J = [-2;\ +\infty[$
c) $I = \left]-\infty; \sqrt{2}\right[$ et $J =]1{,}413;\ 1{,}415[$.

Ordre dans $\mathbb{R}$

Exercice 40.

Comparer les nombres réels suivants ;

$$\boldsymbol{a})\ \frac{23}{99}\ et\ \frac{231}{990}, \qquad \boldsymbol{b})\ \frac{99}{23}\ et\ \frac{990}{231}, \qquad \boldsymbol{c})\ \frac{23}{99}\ et\ \frac{239}{999}$$

$$\boldsymbol{d})\ 3^{11}\ et\ 9^5, \qquad \boldsymbol{e})\ 2\sqrt{3}\ et\ 3\sqrt{2}, \qquad \boldsymbol{f})\ \left(\sqrt{5}\right)^7\ et\ 5^5$$

$$\boldsymbol{g})\ \sqrt{3}-\sqrt{2}\ et\ \sqrt{2}-\sqrt{3}, \qquad \boldsymbol{h})\ \sqrt{13}-\sqrt{8}\ et\ \sqrt{14}+\sqrt{7}$$

$$\boldsymbol{i})\ \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\ et\ \frac{1}{2-\sqrt{3}}, \qquad \boldsymbol{j})\ 7-3\sqrt{5}\ et\ \sqrt{14}+\sqrt{7}$$

Exercice 41.

Dans chacun des deux cas suivants, ranger par ordre croissant les réels ;

$\boldsymbol{a})\ \frac{28}{29}, \quad \frac{25}{28}, \quad \frac{27}{28}, \quad \frac{28}{26}, \quad \frac{28}{25}, \quad \frac{26}{28}$

$\boldsymbol{b})\ \sqrt{17}+3\sqrt{2}, \quad 4+\sqrt{19}, \quad \sqrt{5}(\sqrt{3}+2)$

Exercice 42.

Soient a et b deux nombres réels de $]0;1[$

a) Quel est le signe de $(1-a)(1-b)$,

b) Comparer $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ et $1+\frac{1}{ab}$.

Exercice 43.

a, b et c sont des réels strictement positifs.

a) Comparer $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+c}{b+c}$,

b) Comparer par les applications :

$\boldsymbol{a})\ \frac{3}{7}\ et\ \frac{3+\sqrt{2}}{7+\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{b})\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\ et\ \frac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{\sqrt{5}+\sqrt{11}}$

Exercice 44.

x et y sont deux nombres réels strictement positifs.

Démontrer les inégalités suivantes :

$\boldsymbol{a})\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2, \qquad \boldsymbol{b})\ si\ x<y\ alors, x<\sqrt{xy}<y$

$\boldsymbol{c})\ \frac{1}{x+y}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \qquad \boldsymbol{d})\ \sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}$

Exercice 45.

Démontrer que pour tous nombres réels a et b.

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

On suppose de plus que, a et b sont positifs.

Démontrer qu'alors ;

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\leq\frac{a^3+b^3}{2}$

Valeur absolue

Exercice 46.

a et b sont deux nombres réels.

a) On suppose que $|a+b|=|a|+|b|\ (\mathbf{1})$

En élevant l'égalité précédente au carré, démontrer que ; $|a|\times|b|=ab$.

Que pouvez-vous dire des signes de a et b ?

b) On suppose que a et b sont de même signe, démontrer qu'alors, l'égalité (1) est vérifiée.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation ; $|x^2-3x+1|=|x^2|+|-3x+1|$

Exercice 47.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $|4x+3|=2$, **b)** $|-x-1|=-2$, **c)** $|2x+1|+|x-5|=6$,

d) $|3x+2|-|x-7|=3$, e) $\left|\frac{2x+3}{3x-5}\right|=\frac{3}{11}$

Exercice 48.

Voici cinq façons de décrire un même ensemble

a) $x\in[2;6]$ (en termes d'intervalle)

b) $2\leq x\leq 6$ (en termes d'encadrement)

c) $|x-4|\leq 2$ (en termes de valeur absolue)

d) $d(x;4)\leq 2$ (en termes de distance)

e) (représentation géométrique)

Traduire de chaque façon les ensembles suivants :

a) $x\in[2;6]$, b) $x\in\,]1;5[$, c) $-6\leq x\leq -2$

d) $-5\leq 2x\leq 5$, e) $|x+2|\leq 2$, f) $|3-x|<4$

g)

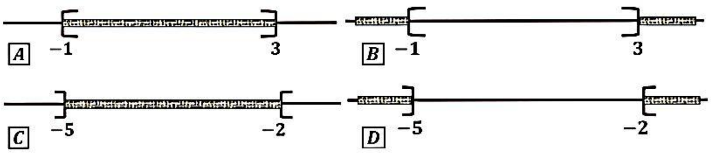
h)

Exercice 49.

Caractériser par une inégalité du type, (où r est un réel positif) ;

$$|x-a|\leq r,\qquad |x-a|<r,\qquad |x-a|\geq r\quad ou\quad |x-a|>r$$

Les nombres réels appartenant aux ensembles A, B, C et D représentés géométriquement par :



Exercice 50.

Représenter graphiquement et écrire sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles, l'ensemble des réels x vérifiant ;

a) $|x-2|\leq 3$, **b)** $|2x-1|\leq 2$, **c)** $|x+2|\geq 1$, **d)** $|x|>1$, **e)** $|2x-3|\geq 5$, **f)** $1<|3x+1|<3$.

Calcul approché

Exercice 51.

Soit $A(x)=2x-5$. Encadrer $A(\sqrt{2})$ sachant que $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$.

Exercice 52.

Dans chacun des cas suivants, déterminer des encadrements de $x+y$, $x-y$, xy, x^2, $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{y}$.

a) $2{,}1 < x < 2{,}2$ et $3{,}3 < y < 3{,}4$;

b) $-1{,}5 < x < -1{,}4$ et $5 < y < 5{,}1$;

c) $-4{,}1 < x < -4$ et $-0{,}9 < y < -0{,}8$.

Exercice 53.

On donne $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$ et $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$?

a) Donner les meilleurs encadrements possibles de :

$$\sqrt{5} + 2\sqrt{3}, \qquad \frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{2}$$

b) Comparer $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. Encadrer séparément ces deux nombres. Quelle observation faites-vous ?

c) Trouver les nombres entiers a et b tels que ;

$$a \times 10^{-2} < \sqrt{15} < (a+1) \times 10^{-2} \quad \text{et} \quad b \times 10^{-2} < \sqrt{\frac{5}{3}} < (b+1) \times 10^{-2}.$$

Exercice 54.

Encadrer avec le plus de précision possible les aires (A) et volumes (V) des solides donnés.

a) Pavé droit d'arêtes a, b, c

Cas 1 :

3,15 est une valeur approchée de a à 5×10^{-2} près.

2,35 est une valeur approchée de b à 5×10^{-2} près.

4,25 est une valeur approchée de c à 5×10^{-2} près.

Cas 2 :

$9{,}9 < a < 10$, $5{,}6 < b < 5{,}7$, $3{,}3 < c < 3{,}4$.

b) Cylindre de rayon R et de hauteur h.

Cas 1 :

$2{,}5 < R < 2{,}6$ et $7{,}8 < h < 7{,}9$.

Cas 2 :

$R = 4$ à 10^{-3} près, $h = 5$ à 10^{-3}.

c) Sphère de rayon R.

Cas 1 :

$7 < R < 7{,}3$

Cas 2 :

$R = 6$ à 10^{-2} près.

Rappel :

Pour le pavé ; $A = 2(ab + ac + bc)$ et $V = abc$.

Pour le cylindre ; $A = 2\pi R(R+h)$ et $V = \pi R^2 h$.

Pour la sphère ; $A = 4\pi R^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Exercice 55.

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs tels que ; $x < y$. On note :

$$a = \frac{x+y}{2}, \qquad g = \sqrt{xy}, \qquad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

a) Montrer que $x < h$ et $a < y$;

b) Montrer que $g < a$;

c) Montrer que $g^2 = ah$. En déduire que $h < g$;

d) Ranger par ordre croissant les nombres : x, y, a, g et h.

(a, g et h sont appelés respectivement : moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de x et y).

Exercice 56.

a) Compléter le tableau suivant :

α (degré)	$1°$	$2°$	$3°$	$4°$	$5°$	$6°$	$7°$	$8°$	$9°$	$10°$
α (radian)										
$\sin\alpha$										
$\cos\alpha$										

b) Comparer α en radian et $\sin\alpha$. Que remarque-t-on ?

c) Quelle approximation peut-on donner à $\cos\alpha$ pour α petit ?

Exercice 57.

Soit $x \in \{0{,}1; 0{,}2; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5;\}$ et $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Comparer $(1+x)^n$ et $(1+nx)$ pour toutes les valeurs de x et de n.

Ecriture scientifique et approximation

Exercice 58.

1°/ Donner l'écriture scientifique de $A = 1\,110{,}23$ et de $B = 0{,}0001908$;

2°/ En déduire l'ordre de grandeur du produit AB.