X- FONCTIONS USUELLES, ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE, FONCTIONS ASSOCIEES

Faire savoir

Le cours

1. Les fonctions algébriques de base

Définition

Sont appelées fonctions algébriques de base ou de référence, les fonctions suivantes :

Les fonctions linéaires c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = ax} \ (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*).$$

Les fonctions "carré" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2} \ (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*).$$

Les fonctions "cube" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = ax^3} \ (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*).$$

Les fonctions "inverse" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{x}} \ (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*).$$

Les fonctions "racine carré" c'est-à-dire, toute fonction ayant la forme ;

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{ax}} \ (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^*).$$

Les fonctions ; constante, linéaire et affine ont été étudiées en $4AS$. Cette étude a permis d'établir leurs représentations graphiques qui sont des droites ; parallèle à l'axe (xOx') pour la fonction constante, passant par l'origine pour la fonction linéaire et passant hors de l'origine pour la fonction affine.

La partie qui suit, permet d'approfondir l'étude de ces fonctions.

Les étapes de l'étude et de la construction de la courbe d'une fonction

L'étude et la construction de la courbe d'une fonction comprend les étapes suivantes :

a) Détermination de son domaine de définition.

b) Détermination de son domaine d'étude, en étudiant sa parité et sa période.

c) Détermination de sa variation étape qui comprend ;

- Le calcul de son taux d'accroissement.
- Le dressage de son tableau de variation.
- Détermination des extrema s'ils existent.

d) Sa représentation graphique, étape qui comprend ;

- L'établissement d'un tableau de valeurs de la fonction.

➢ La construction de sa courbe graphique.

1°/ Fonctions affines sur intervalles

Exemple 1

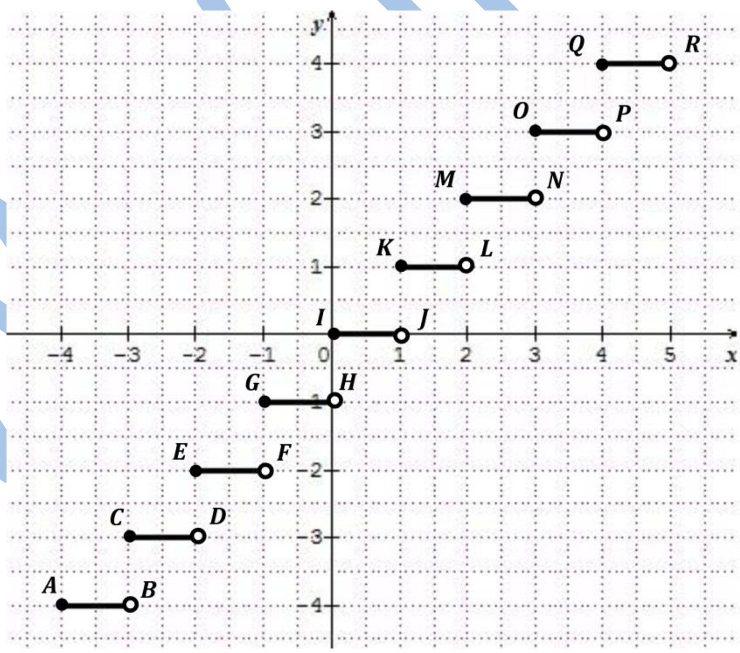
Soit f la fonction partie entière de x définie par ; $E(x)$ d'un nombre réel x c'est le nombre entier n tel que $n \leq x \leq n + 1$.

$f(x) = E(x) = n$ telle que ; $n \leq x \leq n + 1$

($E(x)$ *est le plus grand entier inférieur ou égal à* x, appelée également fonction en escalier).

Etude et représentation graphique de f

$$\ldots$$
$$x \in [-4;\ -3[\Rightarrow f(x) = -4$$
$$x \in [-3;\ -2[\Rightarrow f(x) = -3$$
$$x \in [-2;\ -1[\Rightarrow f(x) = -2$$
$$x \in [-1;\ 0[\Rightarrow f(x) = -1$$
$$x \in [0;\ 1[\Rightarrow f(x) = 0$$
$$x \in [1;\ 2[\Rightarrow f(x) = 1$$
$$x \in [2;\ 3[\Rightarrow f(x) = 2$$
$$x \in [3;\ 4[\Rightarrow f(x) = 3$$
$$\ldots$$



La courbe C_f de f est la réunion des segments de droites :

$$C_f = \cdots \cup [AB[\cup [CD[\cup [EF[\cup [GH[\cup [IJ[\cup [KL[\cup [MN[\cup [PO[\cup \ldots$$

2°/ Fonction carré

Exemple 2

Soit la fonction :

$$f(x) = x^2$$

Etude et représentation graphique de f

a) Domaine de définition

La fonction $f(x) = x^2$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f} = \mathbb{R}$$

b) Domaine d'étude

Parité

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2 = f(x)$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

f est paire et admet donc (yOy') comme axe de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à (yOy').

c) Variations

a- Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^2 - {x_2}^2}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = (x_1 + x_2)$$
$$\boldsymbol{T = x_1 + x_2}$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow T > 0 \Longrightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

b- Tableau de variation

x	0		$+\infty$
T		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c- Extrémums

La fonction f est symétrique par rapport à (yOy'), donc, 0 est un minimum de f.

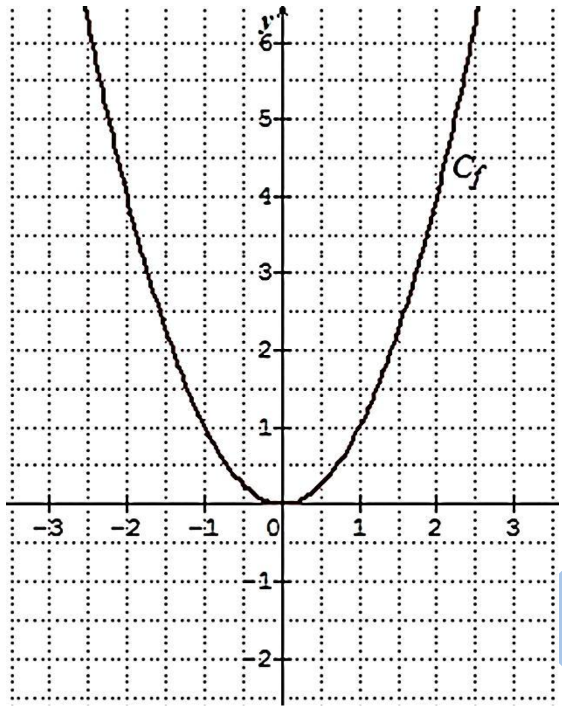
d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$\boldsymbol{f(x)}$	**0**	**1**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**

b- Courbe de f.

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ est une parabole.



3°/ Fonction cube

Exemple 3

$$f(x) = x^3$$

Etude et représentation graphique de f

a) Domaine de définition

La fonction $f(x) = x^3$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

b) Domaine d'étude

Parité

$$f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x)$$
$$= -(x^3) = -f(x)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

La fonction $f(x) = x^3$ est impaire. Sa courbe admet l'origine O comme centre de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à O.

c) Variations

a- Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{{x_1}^3 - {x_2}^3}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow T > 0 \Longrightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

b- Tableau de variation

x	0	$+\infty$
T	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

c- Extrémums

Comme la fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition, elle n'a donc pas d'extrémums.

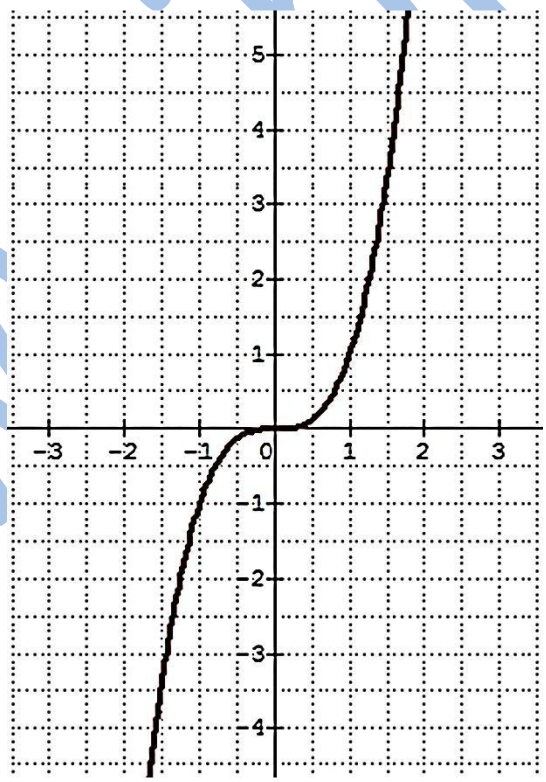
d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	8	27	64	125	216

b- Courbe de f

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^3$ est la courbe suivante.



4°/ Fonction racine carrée

Exemple 4

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Etude et représentation graphique de f

a) Domaine de définition

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = [0;\ +\infty[= \mathbb{R}_+}$$

b) Domaine d'étude

Parité

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{D}_f} \Longrightarrow -x \notin \boldsymbol{\mathcal{D}_f}$$

La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire.

Son domaine d'étude est donc égal à son domaine de définition, c'est-à-dire $\mathbb{R}_+$.

c) Variations

a- Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}}{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$$

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}}$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow T > 0 \Longrightarrow f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$

b- Tableau de variation

x	0	$+\infty$
T	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

c- Extrémums

La fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition n'a de ce fait pas d'extrémums.

d) Représentation graphique

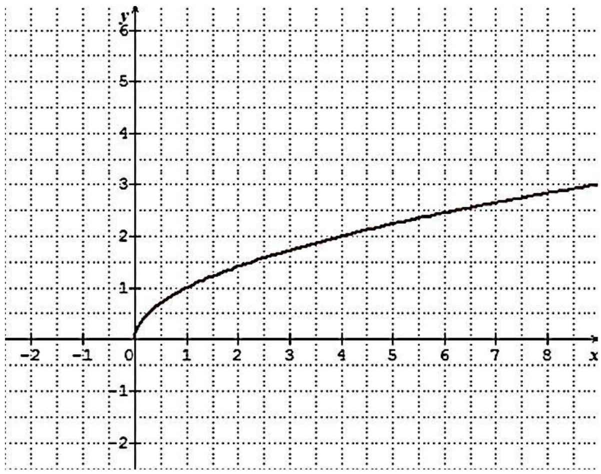
a- Tableau de valeurs

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{9}$	$\mathbf{16}$	$\mathbf{25}$	$\mathbf{36}$
$\boldsymbol{f(x)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\sqrt{2}}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$

b- Courbe de $\boldsymbol{f}$

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction

$f(x) = \sqrt{x}$ est une demi-parabole de direction $[Ox)$.



5°/ Fonction inverse

Exemple 5

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Etude et représentation graphique de $\boldsymbol{f}$

a) Domaine de définition

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

b) Domaine d'étude

Parité

$$\forall x \neq 0, f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est impaire. Sa courbe représentative admet donc O comme centre de symétrie.

On peut donc l'étudier sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ et compléter sa courbe en procédant par symétrie par rapport à O.

c) Variations

a- Taux d'accroissement

Quels que soient $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, on a ;

$$T = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{(x_2 - x_1)}{(x_1 x_2)(x_1 - x_2)} = \frac{-1}{x_1 x_2}$$

$$\boldsymbol{T = \frac{-1}{x_1 x_2}}$$

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-^* \Longrightarrow T < 0 \Longrightarrow f \searrow$ sur $\mathbb{R}_-^*$

b- Tableau de variation

x	0		$+\infty$
T		$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0^+

c- Extrémums

La fonction f est strictement décroissante sur son domaine de définition n'a de ce fait pas d'extrémums.

d- Représentation graphique de f

a- Tableau de valeurs

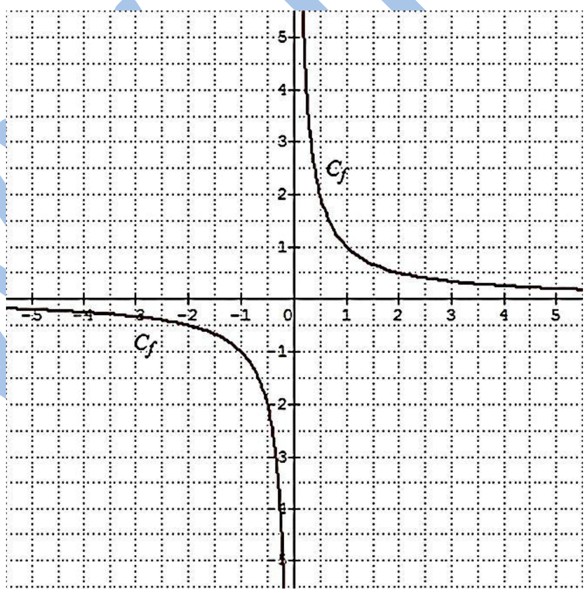
x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$\|\|$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b- Courbe de f.

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est une hyperbole.



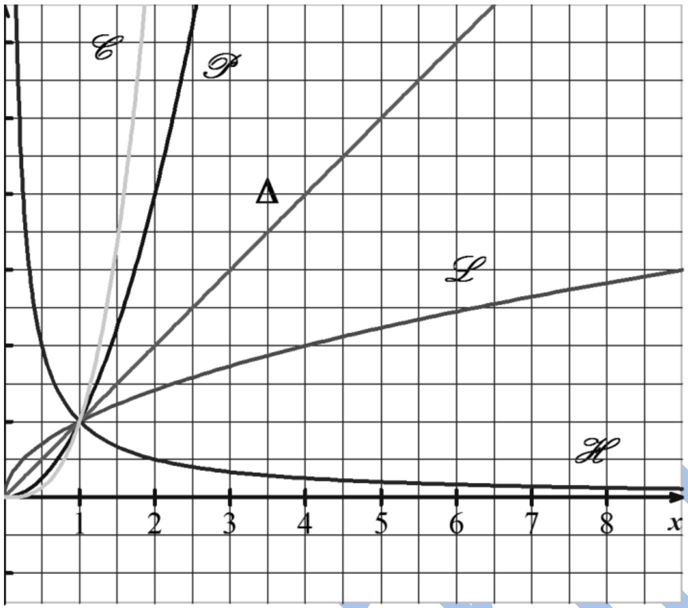
Utilisation des Fonctions usuelles
Exemple 6

a) Comparaison des nombres a ; a^2 ; a^3 ; $\sqrt{a}$; $\frac{1}{a}$ (a > 0)

A l'aide des courbes (graphiques), on peut comparer un nombre positif, son carré, son cube, sa racine carrée et son inverse.
Il suffit de tracer dans le plan muni d'un repère orthogonal les courbes :

- (P) d'équation $y = x^2$ ($x \geq 0$),

- (L) d'équation $y = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$,
- (Δ) d'équation $y =$ $(x > 0)$,
- (H) d'équation $y = \frac{1}{x}$ $(x \geq 0)$,
- (C) d'équation $y = x^3$ $(x \geq 0)$,



Les positions relatives de ces courbes permettent de retrouver et d'illustrer la **propriété** suivante :

- si $0 < a < 1$ alors $a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$
- si $a=1$ alors $\frac{1}{a} = \sqrt{a} = a = a^2 = a^3$
- si $a > 1$ alors $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3$

2. Fonctions associées à des fonctions de base

Définition

Soit g une fonction algébrique. f est une fonction associée à g si et seulement si, il existe une transformation géométrique qui transforme $\mathcal{C}_g$ en $\mathcal{C}_f$.

Remarque 1

Sauf mention contraire, lorsqu'on parle de fonctions associées, il s'agit de fonctions associées aux fonctions dites de base ou de référence.

a) Fonctions associées et courbes

a- Fonctions associées par une symétrie centrale

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport au point $A(a, b)$, ($\mathcal{C}_g$ *est l'image de* $\mathcal{C}_f$ *par la symétrie de centre* A), si, et seulement si, on a ;

$$\boldsymbol{g(2a - x) + f(x) = 2b}$$

Centre de symétrie

Le point $A(a,b)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, si et seulement si, on a ;

$$\boldsymbol{f(2a-x)+f(x)=2b}$$

Remarque 2

Les fonctions associées par symétrie centrale ont des variations de sens contraires.

b- Fonctions associées par une symétrie axiale

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont symétriques par rapport à l'axe vertical $\Delta:\ x=a$, ($\mathcal{C}_g$ *est l'image de* $\mathcal{C}_f$ *par la symétrie axiale d'axe* Δ), si, et seulement si, on ;

$$\boldsymbol{g(2a-x)=f(x)}$$

Axe de symétrie

Δ est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, si et seulement si, on a ;

$$\boldsymbol{f(2a-x)=f(x)}$$

Remarque 3

Les fonctions associées par symétrie axiale ont des variations de même sens lorsque leur axe de symétrie est vertical.

d- Fonctions associées par une translation

La courbe $\mathcal{C}_f$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_g$ par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$, si et seulement si, on a ;

$$\boldsymbol{f(x)=g(x-a)+b.}$$

Remarque 4

Les fonctions associées par translation ont des variations de même sens.

Remarque 5

La valeur absolue engendre également certaines formes de fonctions associées.

Etude des fonctions $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto \frac{a}{x}$

Exemple 7

1) a étant un nombre réel non nul on veut étudier la fonction

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto ax^2$$

- L'ensemble de définition : D$f=\mathbb{R}$
- Sens de variation : on peut distinguer deux sens selon le signe de a comme le montre les tableaux suivants :

a > 0

x		0		+∞
ax^2	↘	0	↗	

a < 0

x		0		+∞
ax^2	↗	0	↘	

2) a étant un nombre réel non nul on veut étudier la fonction :$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\frac{a}{x}$$

- L'ensemble de définition D$f=\mathbb{R}^*$ =]-∞ ; 0[∪] 0 ; +∞ [.

- Sens de variation : on peut distinguer deux sens selon le signe de a comme le montre les tableaux suivants :

a > 0

x	0	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	$\searrow$ ‖	$\searrow$

a < 0

x	0	$+\infty$
$\frac{a}{x}$	$\nearrow$ ‖	$\nearrow$

Conclusion

Les courbes représentatives des fonctions du type : $ax^2 + bx + c$; $\sqrt{ax+b}$; $ax^3 + bx^2 + cx + d$; $\frac{ax+b}{cx+d}$ se déduisent des courbes des fonctions de référence x^2 ; x^3 ; $\sqrt{x}$; $\frac{1}{x}$ par des transformations simples (translations , homothéties, …) dont on déterminera les caractéristiques.

Un changement de repère (origine ; agrandissement, réduction) peut permettre de retrouver la courbe d'une fonction de référence dans le nouveau repère.

Exemple 8

Etudier les variations de la fonction f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$x \mapsto x^2 - 2x + 5$

et tracer sa courbe représentative.

Solution

- Df = $\mathbf{R}$

$f(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$

Supposons : $u - 1 < v - 1 \leq 0$

$u < v \leq 1$

$(u-1)^2 > (v-1)^2$

$(u-1)^2 + 4 > (v-1)^2 + 4$

$f(u) > f(v)$

f est décroissante sur$]-\infty ; 1[$

Supposons : $0 < u - 1 < v - 1$

$1 \leq u < v$

$(u-1)^2 < (v-1)^2$

$(u-1)^2 + 4 < (v-1)^2 + 4$

$f(u) < f(v)$

f est croissante sur$]1 ; +\infty[$

- **Tableau de variation**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$

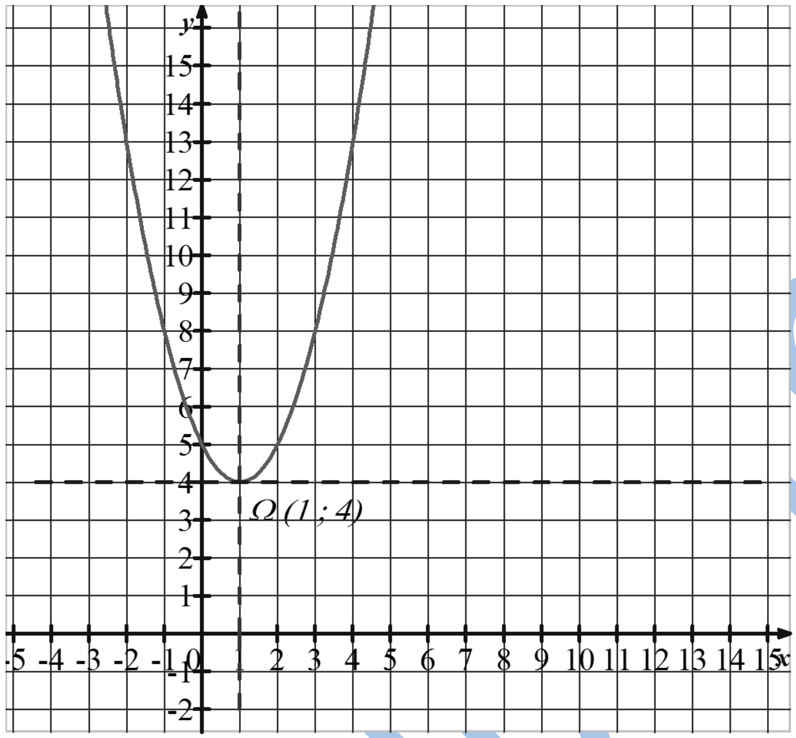
- **Tableau de valeurs**

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	13	8	5	4	5	8	13

- **Courbe représentative**

On peut remarquer que le graphique de la fonction ***f*** dans le repère ci-contre est celui de la fonction x^2 dans le repère d'origine Ω. Avec Ω (1 ; 4).

C'est-à-dire C_f c'est l'image de C_{x^2} par la translation t de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.



Exemple 9

On considère la fonction ***f***(x) = $\frac{2x+3}{x+1}$.

a) vérifier que pour tout réel $x \neq -1$; ***f***(x) = 2 + $\frac{1}{x+1}$.

b) Etudier les variations de ***f*** et tracer sa courbe représentative.

Solution

a) $2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+2+1}{x+1} = \frac{2x+3}{x+1}$; donc $\forall\, x \neq -1$: ***f***(x) = $2 + \frac{1}{x+1}$.

b) D***f*** = $\mathbb{R} - \{-1\}$ =]-∞ ; -1[∪] -1 ; +∞ [

- Sens de variation :

$u + 1 < v + 1 \leq 0$

$u < v < -1$

$\frac{1}{u} >| \frac{1}{v}$

$2 + \frac{1}{u} > 2 + \frac{1}{v}$

f(u) > ***f***(v)

f est décroissante sur]-∞ ; -1[

$0 < u + 1 < v + 1$

$-1 < u < v$

$\frac{1}{u} >| \frac{1}{v}$

$2 + \frac{1}{u} > 2 + \frac{1}{v}$

f(u) > ***f***(v)

f est décroissante sur]-1 ; +∞[

f est toujours décroissante sur D***f***

- **Tableau de variation**

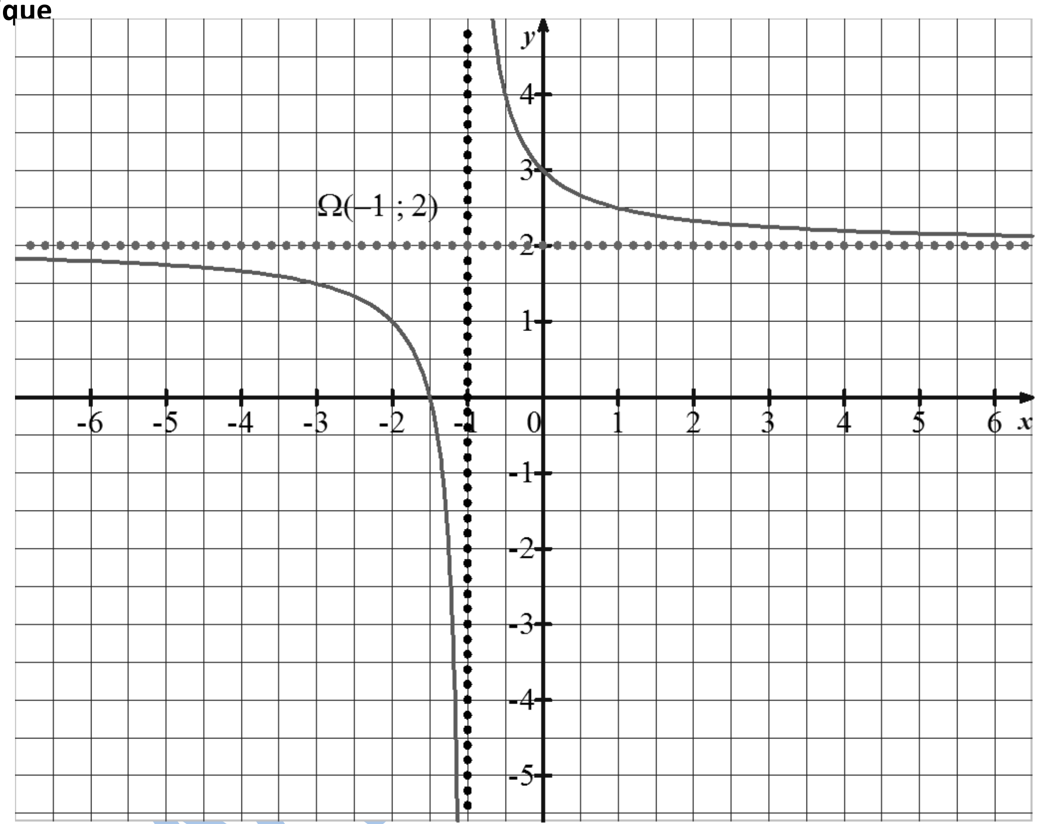
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘

- **Tableau de valeurs**

x	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-0,5	0	0,5	1	1,5
f(x)	1,6	1,5	1,3	1	0	4	3	2,6	2,5	2,4

- **Représentation graphique**

On remarque que le Graphique de ***f*** dans le repère ci-contre c'est celui de $\frac{1}{x}$ dans le repère d'origine Ω et de même base.



Exemple 10

Soit la fonction ***g***(x) = 2 + $\sqrt{x+3}$.
Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative.

Solution

- Ensemble de définition D***g*** = [-3 ; +∞[.
- Sens de variation : On suppose que $-3 \leq u \leq v$

$$0 \leq u + 3 \leq v + 3$$
$$0 \leq \sqrt{u+3} \leq \sqrt{v+3}$$
$$2 \leq 2 + \sqrt{u+3} \leq 2+\sqrt{v+3}$$
$$g(u) \leq g(v)$$

g est croissante sur son ensemble de définition.

- **Tableau de variation**

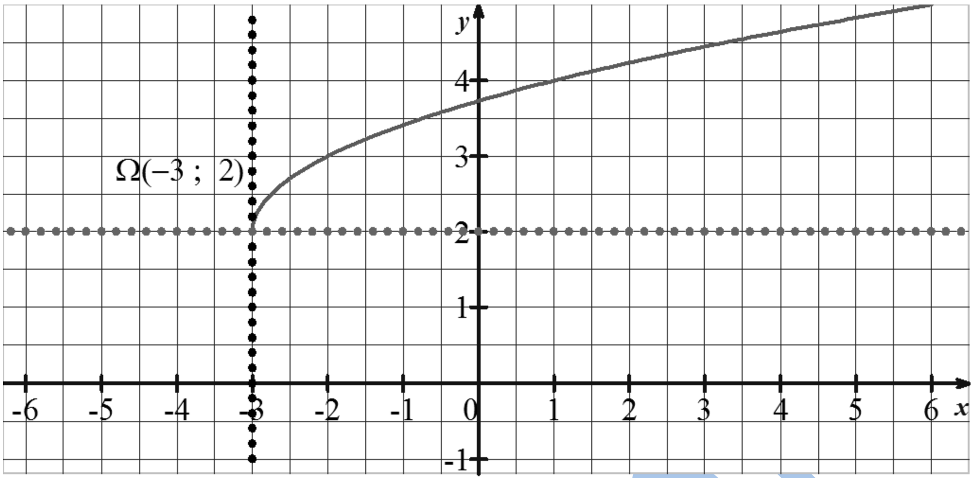
x	-3	$+\infty$
g(x)	**2**	↗

- **Tableau de valeurs**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	2	3	3,41	3,73	4	4,23	4,44

- **Représentation graphique**

Le graphique de ***g*** est l'image du graphique de la fonction $\sqrt{x}$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.



Exemple 11

Soit la fonction ;

$$f(x) = \frac{4x-3}{x+2}$$

Montrer que le point $A(-2,4)$ est le centre de symétrie de la courbe de f.

Solution

Pour montrer que A est le centre de symétrie de la courbe de f, montrons que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(2a-x)+f(x)=2b$,

$$a=-2 \Longrightarrow 2a=-4\,;\, b=4 \Longrightarrow 2b=8$$

$$\Longrightarrow f(2a-x)+f(x)=f(-4-x)+f(x)$$

$$=\frac{4(-4-x)-3}{-4-x+2}+\frac{4x-3}{x+2}$$

$$=\frac{-16-4x-3}{-x-2}+\frac{4x-3}{x+2}=\frac{4x+19}{x+2}+\frac{4x-3}{x+2}$$

$$=\frac{4x+19+4x-3}{x+2}=\frac{8x+16}{x+2}$$

$$=\frac{8(x+2)}{x+2}=8=2\times 4=2b$$

Donc, le point $A(-2,4)$ est le centre de symétrie de la courbe de f.

Exemple 12

Soit la fonction ;

$$f(x) = x^2-5x-6$$

Montrer que la droite

$$\Delta : x = \frac{5}{2}$$

est l'axe de symétrie de la courbe de f.

Solution

Pour montrer que Δ est l'axe de symétrie de la courbe de f, montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2a - x) = f(x)$,

$$a = \frac{5}{2} \Longrightarrow 2a = 5$$
$$\Longrightarrow f(2a - x) = (5 - x)^2 - 5(5 - x) - 6$$
$$= (25 - 10x + x^2) - 25 + 5x - 6$$
$$= 25 - 10x + x^2 - 25 + 5x - 6$$
$$= x^2 - 5x - 6 = f(x)$$

Donc la droite

$$\Delta : x = \frac{5}{2}$$

est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

Exemple 13

Soit la fonction ;

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 2$$

A/ Montrer que $f(x)$ peut s'écrire ;

$$f(x) = (x - 2)^3 + 6$$

B/ En se servant de la dernière écriture, montrer que le point $A(2, 6)$ est le centre de symétrie de la courbe de f.

Solution

A/ $(x - 2)^3 + 6 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 6$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 2 = f(x)$$

B/ Pour montrer que A est le centre de symétrie de la courbe de f, montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2a - x) + f(x) = 2b,\ a = 2 \Longrightarrow 2a = 4\ ;\ b = 6 \Longrightarrow 2b = 12$

$$\Longrightarrow f(2a - x) + f(x)$$
$$= (4 - x - 2)^3 + 6 + (x - 2)^3 + 6$$
$$= (-x + 2)^3 + 6 + (x - 2)^3 + 6$$
$$= -(x - 2)^3 + 6 + (x - 2)^3 + 6 = 12 = 2b$$

Donc, le point $A(2, 6)$ est le centre de symétrie de la courbe de f.

Exemple 14

Soit la fonction ;

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$$

A/ Déterminer l'axe de symétrie (D) de la courbe de la fonction ;

B/ Caractériser son extrémum.

Solution

A/ $(D) : x = a$. Pour déterminer a, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(2a-x)=f(x)$$

$$f(2a-x)=3(2a-x)^2-5(2a-x)+1=3x^2-5x+1$$

$$\Longrightarrow 3(4a^2-4ax+x^2)-10a+5x+1=3x^2-5x+1$$

$$\Longrightarrow 12a^2-12ax+3x^2-10a+5x+1=3x^2-5x+1$$

$$\Longrightarrow 12a^2-10a+1-12ax+5x+3x^2=1-5x+3x^2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 12a^2-10a+1=1 \\ -12a+5=-5 \\ 3=3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 12a^2-10a=0 \\ -12a=-10 \\ 3=3 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{a=\frac{5}{6}}$$

La droite $D : x=\frac{5}{6}$ est l'axe de symétrie de la courbe de f.

Vérification

$$f\left(\frac{5}{3}-x\right)=3\left(\frac{5}{3}-x\right)^2-5\left(\frac{5}{3}-x\right)+1$$

$$=3\left(\frac{25}{9}-\frac{10}{3}x+x^2\right)-\frac{25}{3}+5x+1$$

$$=\frac{25}{3}-10x+3x^2-\frac{25}{3}+5x+1$$

$$=3x^2-5x+1=f(x)$$

B/ L'extrémum de la courbe de f est un minimum, il est atteint pour la valeur de $x=\frac{5}{6}$

Exemple 15

On donne les fonctions suivantes :

☒ $g(x)=x^2-4x+5$;

☒ $h(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$;

☒ $k(x)=(x+1)^3-3$;

☒ $l(x)=5+\sqrt{x-3}$.

a/ Déterminer les translations qui transforment des fonctions algébriques de base en g, h, k et l.

b/ Utiliser ces fonctions de base pour représenter graphiquement les fonctions g, h, k et l.

Solution

☒ $g(x)=x^2-4x+5$

a/ L'écriture canonique de g donne ;

$g(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

Posons $X=x-2$

Soit la fonction ;

$j(x)=x^2 \Longrightarrow j(X)=X^2=(x-2)^2=j(x-2)$

$f(x)=(x-2)^2+1=j(x-2)+1$

$\Longrightarrow \boldsymbol{f(x) = j(x-2) + 1}$

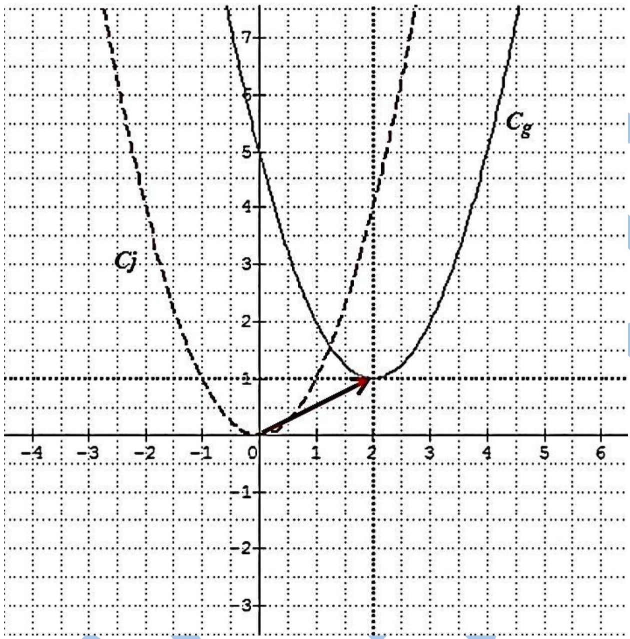
Soit le vecteur $\vec{u}\binom{2}{1}$.

La courbe C_f de f est l'image de la courbe C_j de j par la translation de vecteur $\vec{u}$, qui transforme le point d'origine $O(0,0)$ en $\Omega(2,1)$.

b/ Représentation graphique

Méthode 1

Représenter $g(x) = x^2 - 4x + 5$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, revient à construire la courbe de $j(x) = x^2$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Méthode 2

On peut également formuler cela en procédant à un changement de variable et d'origine ;

$$g(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

$\Longrightarrow g(x) - 1 = (x-2)^2$

En posant ;

$X = x - 2$ et $Y = g(x) - 1 \Longrightarrow \boldsymbol{Y = X^2}$

Ainsi, pour obtenir la courbe de g on construit la courbe de la fonction Y dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\Omega(2;1)$.

$$\boxtimes\ h(x) = \frac{2x-3}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$$

a/ Posons $X = x + 1$

Soit la fonction

$$e(x) = \frac{-5}{x} \Longrightarrow e(X) = \frac{-5}{X} = \frac{-5}{x+1} = e(x+1)$$

$$h(x) = 2 - \frac{5}{x+1} = e(x+1) + 2$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{h(x) = e(x+1) + 2}$$

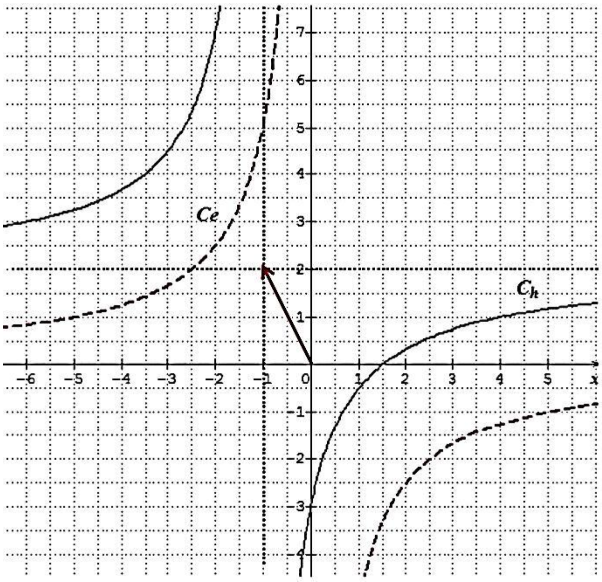
Soit le vecteur $\vec{u}\binom{-1}{2}$.

La courbe C_h de h est l'image de la courbe C_e de e par la translation de vecteur $\vec{u}$, qui transforme le point d'origine $O(0,0)$ en $\Omega(-1,2)$.

b/ Représentation graphique

Méthode 1

Représenter la courbe de $h(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, revient à construire la courbe de $e(x) = \frac{-5}{x}$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Méthode 2

On peut également formuler cela en procédant à un changement de variable et d'origine ;

$$h(x) = \frac{2x-3}{x+1} = 2 - \frac{5}{x+1}$$

$\Rightarrow h(x) - 2 = -\frac{5}{x+1}$

En posant ;

$$X = x + 1 \text{ et } Y = h(x) - 2 \Rightarrow \boldsymbol{Y = \frac{-5}{X}}$$

Ainsi, pour obtenir la courbe de h, on construit la courbe de la fonction Y dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\Omega(-1;2)$.

$$\boxtimes\ k(x) = (x+1)^3 - 3\ ;$$

a/ Posons $X = x + 1$

Soit la fonction ;

$$m(x) = x^3 \Rightarrow m(X) = X^3 = (x+1)^3 = m(x+1)$$

$$k(x) = (x+1)^3 - 3 = m(x+1) - 3$$

$$\boldsymbol{k(x) = m(x+1) - 3}$$

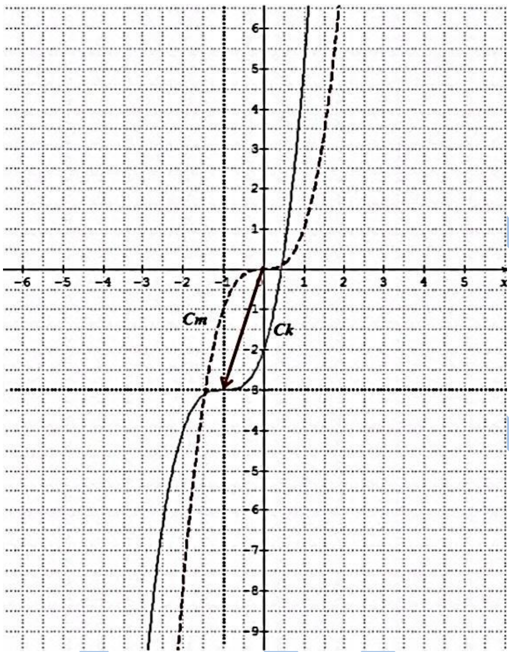
Soit le vecteur $\vec{u}\binom{-1}{-3}$.

La courbe C_k de k est l'image de la courbe C_m de m par la translation de vecteur $\vec{u}$, qui transforme le point d'origine $O(0,0)$ en $\Omega(-1,-3)$.

b/ Représentation graphique

Méthode 1

Représenter $k(x) = (x+1)^3 - 3$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, revient à construire la courbe de $m(x) = x^3$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Méthode 2

On peut également formuler cela en procédant à un changement de variable et d'origine ;

$$k(x) = (x+1)^3 - 3 \Longrightarrow k(x) + 3 = (x+1)^3$$

En posant ;

$X = x + 1$ et $Y = k(x) + 3 \Longrightarrow \boldsymbol{Y = X^3}$

Ainsi, pour obtenir la courbe de k, on construit la courbe de la fonction Y dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\Omega(-1;-3)$.

$$\boxtimes\ \ l(x) = 5 + \sqrt{x-3}$$

a/ Posons $X = x - 3$

Soit la fonction ;

$$n(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow n(X) = \sqrt{X} = \sqrt{x-3} = n(x-3)$$

$$l(x) = 5 + \sqrt{x-3} = n(x-3) + 5$$

$$\boldsymbol{l(x) = n(x-3) + 5}$$

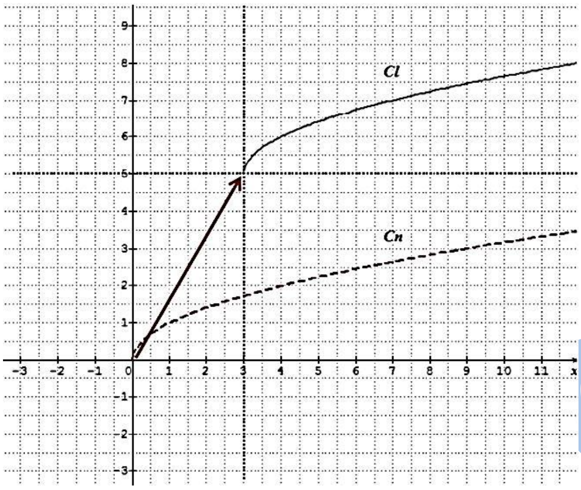
Soit le vecteur $\vec{u}\binom{3}{5}$.

La courbe C_l de l est l'image de la courbe C_n de n par la translation de vecteur $\vec{u}$, qui transforme le point d'origine $O(0,0)$ en $\Omega(3,5)$.

b/ Représentation graphique

Méthode 1

Représenter $l(x) = 5 + \sqrt{x-3}$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, revient à construire la courbe de $n(x) = \sqrt{x}$ dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



Méthode 2

On peut également formuler cela en procédant à un changement de variable et d'origine ;

$$l(x) = 5 + \sqrt{x-3} = \sqrt{x-3} + 5$$
$$\Longrightarrow l(x) - 5 = \sqrt{x-3}$$

En posant ;

$X = x - 3$ et $Y = l(x) - 5 \Longrightarrow \boldsymbol{Y} = \sqrt{\boldsymbol{X}}$

Ainsi, pour obtenir la courbe de l, on construit la courbe de la fonction Y dans le repère $(\Omega;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\Omega(3; 5)$

Exercice généraux

Exercice 1

5° Déterminer le centre de symétrie A de la courbe de la fonction ;

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

6° Déterminer le centre de symétrie B de la courbe de la fonction ;

$$f(x) = \frac{6x-3}{x+2}$$

Exercice 2

Soit les fonctions ;

- $f(x) = x - 3$;
- $g(x) = x^2 - 6x - 1$
- $h(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 10$

$\boxed{\circledast}$ $k(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

A/ En utilisant des fonctions de base et des translations convenables, construire les courbes de ces fonctions.

B/ En déduire les constructions des courbes graphiques des fonctions ;

⌂ $L(x) = |x-3|$;

⌂ $M(x) = |x^2 - 6x - 1|$

⌂ $N(x) = |x^3 + 6x^2 + 12x + 10|$

⌂ $Q(x) = \left|\dfrac{3x-1}{x+2}\right|$

Exercice 3

Soit les fonctions ;

$\boxed{\circledast}$ $f(x) = x^2 - 6x + 7$;

$\boxed{\circledast}$ $g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 9$

$\boxed{\circledast}$ $h(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

$\boxed{\circledast}$ $k(x) = 2 + \sqrt{x-3}$

Etudier et construire les courbes de ces fonctions en utilisant le taux d'accroissement.

Exercice 4

A partir de la représentation graphique de la courbe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{x},$$

Déduire les courbes des fonctions suivantes dans le même graphique ;

$$g(x) = -\sqrt{x}; \quad h(x) = \sqrt{-x}; \quad k(x) = -\sqrt{-x}$$

Exercice 5

Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$$

1° Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2° Déterminer les images par f des nombres 4 ; -2 ; 7 ; $0{,}5$ et 5.

3° Déterminer le ou les antécédents éventuels de 2 par f.

4° Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer s'ils existent, les coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 6

Soit la fonction $f(x) = ax^2 + bx + 12$, tels que a et b sont des réels.

1° Calculer a et b sachant que $f(1) = -6$ et $f(-2) = 30$.

2° Résoudre dans $\mathbb{R}$; $f(x) = 0$ et $f(x) \geq 0$.

3° Factoriser $f(x)$.

4° Montrer que la droite $D : x = \frac{-5}{2}$ est l'axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f.

Exercice 7

Soit la fonction :

$$f_m(x) = \frac{-mx + 2}{x^2 + x}$$

1° Déterminer $\mathcal{D}_{f_m}$.

2° Calculer m pour que $\mathcal{C}_{f_m}$ passe par le point $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

3° Déterminer les réels a et b tels que ;

$$f_m(x) = \frac{ma}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

4° Résoudre dans $\mathbb{R}$; $f_m(x) \geq 0$.

5° Résoudre dans $\mathbb{R}$; $f_m(x) = 2$ (*Discuter le nombre de solutions suivant les valeurs de* m).

Exercice 8

Soit f une fonction définie par ;

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

1° Sachant que $f(x+1) = 2x^2 + 11x$; déterminer l'expression de $f(x)$.

2° Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.

3° Montrer que la droite d'équation $(d) : x = \frac{-7}{4}$ est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

4° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation ; $f(x) \geq 0$.

5° a/ Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite (Δ) d'équation ; $(\Delta) : y = 3x - 3$,

b/ Puis préciser leurs positions relatives

6° Ecrire f sous la forme canonique ;

$(f(x) = 2(x + \alpha)^2 + \beta)$

7° Montrer que $\mathcal{C}_f$ est l'image d'une courbe usuelle par une translation que l'on caractérisera.

8° Représenter graphiquement cette situation.

Exercice 9

Soit f une fonction définie par ;

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Tels que a, b, c et d son des réels non nuls.

$$\text{Sachant que ; } \begin{cases} f(0) = \frac{-1}{2} \\ \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ f(3) = 7 \end{cases}$$

1° Donner l'expression de f.

2° Montrer que le point $A(2; 2)$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

3° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation ; $f(x) \geq 0$.

4° Déterminer les réels a' et b' tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f(x) = a' + \frac{b'}{x-2}$$

Exercice 10

On considère la fonction définie par ;

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

1° Déterminer a, b, c et d sachant que ;

$$\begin{cases} \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ f(-1) = \frac{3}{4} \\ f(2) = -3 \end{cases}$$

2° Montrer que le point $A(3; 2)$ est le centre de symétrie $\mathcal{C}_f$

3° Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, construire $\mathcal{C}_f$ et en déduire $\mathcal{C}_{|f|}$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

Sachant que $f(0) = 3$, et que le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Δf		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1° Déterminer les réels a, b et c.

2° Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un axe de symétrie D, dont on précisera l'équation.

3° Tracer D et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur intervalles par :

$$f(x) = \begin{cases} x \in]-\infty; -5] \Longrightarrow f(x) = 3x+2 \\ x \in]-5; -1] \Longrightarrow f(x) = -x+4 \\ x \in]-1; 4] \Longrightarrow f(x) = 2x-3 \\ x \in]4; +\infty[\Longrightarrow f(x) = 4x+1 \end{cases}$$

Etudier et représenter graphiquement f.

Exercice 13

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = |2x-5| + |2-3x| + |4x+1|$$

1/ Donner l'expression de f sur $\mathbb{R}$;

2/ Etudier et représenter graphiquement f.

Fonction affine

Exercice 14

a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $1-2x \leq x + 4$

b) Déduire de a) que :

- si $x \leq -4$ alors $\min(1 -2x ; x + 4)= x + 4$
- si $x \geq -4$ alors $\min(1 -2x ; x + 4)= 1-2x$

c) représenter graphiquement les trois fonctions définies sur $\mathbf{R}$ et qui à x associent successivement

$x + 4$; $1 -2x$ et $\min(1 -2x ; x + 4)$.

Exercice 15

1) construire un triangle ABC isocèle en A, tel que BC = 6cm et tel que sa hauteur issue de A mesure 4 cm. Combien valent AB et AC ?

2) soit H le milieu de [BC] et M un point de [AH] on pose HM = x.

a) quel est l'ensemble de valeurs de M ?

b) la parallèle à (BC) menée par M coupe (AB) en P et (AC) en Q.

Exprimer la distance PQ en fonction de x.

c) tracer la droite d'équation $y = \frac{3}{2}(4 - x)$ et déterminer graphiquement pour quelle valeur de x on a PQ = 3 ; Retrouver ce résultat par le calcul et l'expliquer géométriquement.

Exercice 16

L'unité de longueur est le centimètre. Soit ABC un triangle isocèle tel que AB = AC = 4 ; On pose BC = x.

1) a) Quel est l'ensemble D des valeurs possibles de x.

b) Exprimer en fonction de x le périmètre P(x) de ABC.

C) Représenter graphiquement la fonction définie sur D par $x \mapsto P(x)$.

D) Quelle est la moyenne m entre les valeurs minimum et maximum de P ?

Quelle est la nature du triangle ABC

lorsque P(x) = m ?

2) Soit B' le projeté orthogonal de B sur (AC), on pose BB' = h.

a) Quel est l'ensemble D' des valeurs de h ?

Exprimer en fonction de h l'aire du triangle ABC

(A(h)).

Représenter graphiquement la fonction définie sur D' par $h \mapsto A(h)$.

d) Pour quelle valeur de h la fonction A est-elle maximum ?

Quelle est alors, la nature du triangle ABC ?

Fonction valeur absolue

Exercice 17

1) Sur un axe de repère (Ω ; $\vec{u}$), on considère les points I(1) ; J(-1) et M(x) ; Montrer que

$\Omega I + \Omega M = 1 + |x|$; et $JM = d(x\,;-1) = |x+1|$

2) Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = 1 + |x|$ et $g(x) = |x+1|$.

a) tracer le graphique C de la fonction valeur absolue.

b) en déduire les tracés des courbes Cf et Cg représentant f et G.

Exercice 18

Soient A et B deux points distincts, O est le milieu de [AB], et x l'abscisse d'un point M de (AB) dans le repère (O ; $\overrightarrow{OA}$).

Exprimer MA + 2MB en fonction de x, et représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par f(x) = MA + 2MB.

Fonction carrée

Exercice 18

Utiliser la représentation graphique de la fonction carré pour répondre à la question : Que peut-on dire de x^2 lorsque :

1) $1 \leq x \leq 2$; 2) $-1 \leq x \leq 2$; 3) $x \leq -1$.

Exercice 19

Résoudre graphiquement

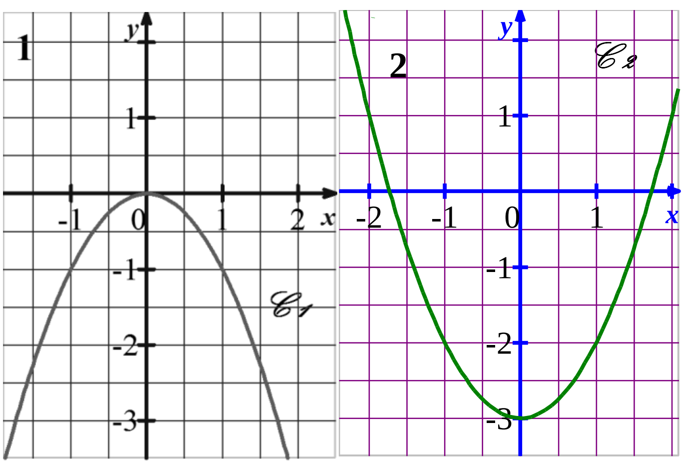
1) $x^2 \geq 1$; 2) $x^2 \leq 2x$; 3) $x^2 = x + 1$.

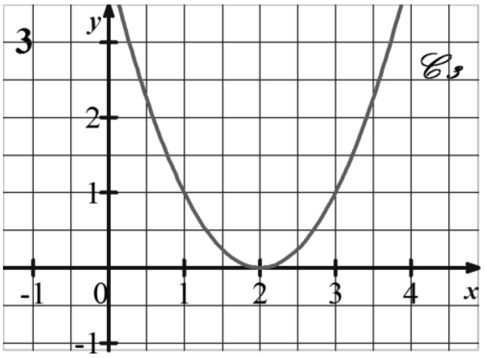
Exercice 20

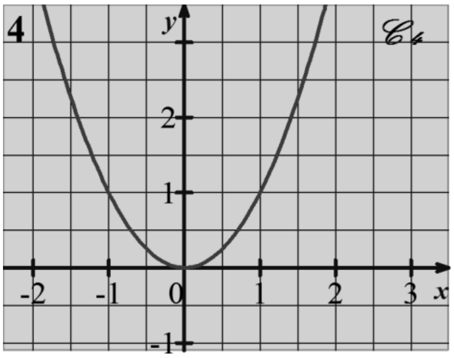
Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction carré ***f***.

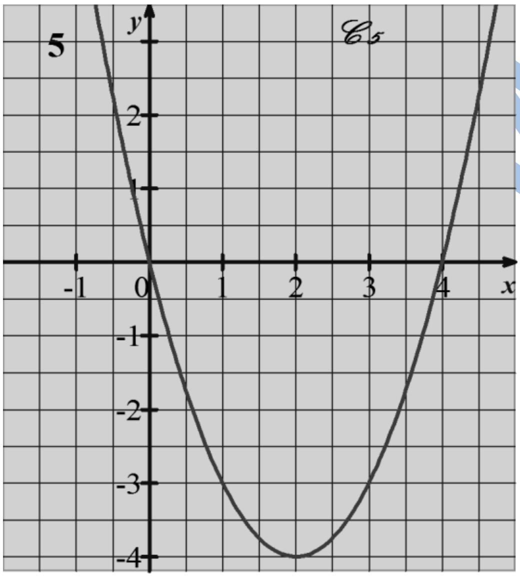
Les courbes ci-dessous se déduisent de $\mathscr{C}$ par des transformations simples.

En déduire les fonctions définies par ces courbes.









Exercice 21

Dans un repère orthogonal du plan, On considère le point A(3 ; 1) et la droite (D) d'équation y = 2x.

1) Pour un réel x quelconque développer

$(x - 1)^2 + 1$ et le réduire.

2) Soit M le point de D d'abscisse x, exprimer AM^2 En fonction de x seulement.

3) Montrer que AM^2 est minimum pour une valeur de x que l'on précisera.

Que vaut ce minimum ? Quelle est la position correspondante de M sur (D). Expliquer géométriquement ce résultat.

Exercice 22

Une feuille de papier rectangulaire a pour côtés 10cm et x cm, on la roule pour obtenir un cylindre :

- dont la hauteur est x et dont la section a pour circonférence 10
- dont la hauteur est 10 et dont la section a pour circonférence x.

a) exprimer en fonction de x le volume (en cm^3) de chacun des cylindres.

b) Représenter graphiquement les deux fonctions obtenues pour $0 \leq x \leq 20$.

c) Pour quelles valeurs de x le premier cylindre a-t-il un volume supérieur au second ?

On fera le calcul et on vérifiera sur le graphique.

Exercice 23

Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ les fonctions définies sur [0 ; 8] par : $\boldsymbol{f}(x) = -8x + 80$; $\boldsymbol{g}(x) = -x^2 + 16x$;

1)a) soit x un réel ; développer (x -20)(x -4)

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 24x + 80 = 0$.

c) Résoudre dans [0 ; 8] l'équation f(x) = g(x).

2) a) Représenter f et g dans un repère orthogonal (unité 5 mm sur (Ox)) et (0,5mmm sur (Oy)) ; On utilisera la calculatrice pour obtenir la représentation graphique de g.

b) interpréter géométriquement la question 1) c).

Fonction cube

Exercice 24

Le plan est muni d'un repère orthogonal

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$; Connaissant la courbe $\mathscr{C}$ qui représente la fonction cube. Représenter graphiquement les fonctions $\boldsymbol{f}$; $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\boldsymbol{f}(x) = -x^3$; $\boldsymbol{g}(x) = |x^3|$; $\boldsymbol{h}(x) = x^3 - 2$.

Justifier.

Exercice 25

L'unité de longueur est le centimètre. On considère un cône $\mathscr{C}$ de sommet S de hauteur 4 ; dont le cercle Γ de base a pour rayon 3.

Un plan parallèle au plan de Γ est situé à la distance x de S coupe le cône selon un cercle γ .

1) Quel est l'ensemble des valeurs de x ?

2) a) Montrer que le rayon r(x) du cercle γ

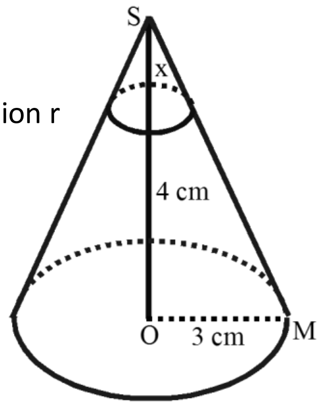
vaut : $r(x) = \frac{3}{4}x$.

b) représenter

graphiquement la fonction r

définie sur D par :

$x \mapsto r(x)$.



Pour quelle valeur de x le rayon de r est-il la moitié de celui de Γ ?

3) a) Exprimer en fonction de x l'aire A(x) de γ.

b) représenter graphiquement la fonction A définie sur D par $x \mapsto A(x)$.

Pour quelle valeur de x l'aire de γ est-elle la moitié de celle de Γ.

(On donnera la valeur exacte de la réponse et une

valeur approchée à 10^{-2} près).

4) a) Exprimer en fonction de x le volume V(x) du cône $\mathscr{C}'$ de sommet S et de base γ.

b) représenter graphiquement la fonction V définie sur D par $x \mapsto V(x)$.

Pour quelle valeur de x le volume du cône $\mathscr{C}'$ et-il la moitié de celui de $\mathscr{C}$?(On donnera la valeur exacte de la réponse et une valeur approchée à 10^{-2} près)

Fonction racine carrée

Exercice 26

1) Résoudre

a) l'équation $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$; b) l'inéquation $1 \leq \sqrt{x} \leq 2$.

2) Contrôler les résultats de ces questions graphiquement.

Exercice 27

f est une fonction paire et on sait que pour

$x \geq 0$; $f(x) = \sqrt{x}$. Le plan est muni d'un repère

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ orthogonal.

1) Représenter graphiquement f

2) a) Calculer $f(-3)$; b) Que vaut $f(x)$ pour $x \leq 0$?

3) peut-on donner une formule unique pour $f(x)$ lorsque x désigne un réel quelconque.

Exercice 28

Le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan est orthogonal. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les représentations graphiques des fonctions qui à x associent respectivement $\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$.

1) Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

2) Montrer que $M(x ; y) \in \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ si $y^2 = x$.

$\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ est- elle la représentation graphique d'une fonction ?

Exercice 29

A et B sont deux points tels que AB = 4. Soient H un point de [AB] et M le point d'intersection entre la perpendiculaire en H à (AB)

et l'un des demi- cercles de diamètre [AB] ; On pose AH = x et AM = y.

1) Quel est l'ensemble des valeurs possibles de x ?

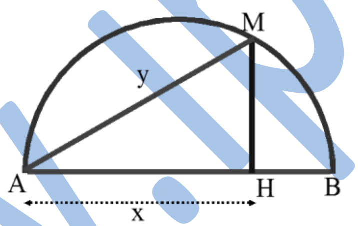
2) Calculer y pour x = 0, Pour $x \neq 0$ évaluer

cos $\widehat{BAM}$ dans chacun des triangles HAM et BAM et en déduire que $y^2 = 4x$.

3) Tracer la courbe C qui représente y en fonction de x pour $x \in [0 ; 4]$.

Préciser les valeurs des de l'angle $\widehat{BAM}$ pour

x = 1 et x = 2 et donner une explication géométrique de ces résultats.



Fonction inverse

Exercice 30

Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $\frac{1}{x} < 1$.

Exercice 31

Etudier la parité de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{|x|}$, puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Exercice 32

1) Représenter dans le même repère d'unité 1 cm la droite D d'équation x + y = 4 et la branche d'hyperbole définie pour x > 0 par $y = \frac{5}{x}$.

2) Déterminer graphiquement un encadrement d'amplitude 0,5 pour les abscisses a et b des points communs à D et H.

3) a) Développer et réduire $(x - 2)^2$.

b) Quelles sont les valeurs exactes de a et b ?

C) Améliorer les encadrements lus en 2) en donnant à l'aide de la calculatrice, des encadrements d'amplitudes 10^{-2}.

Exercice 33

1) Démontrer que :

a) si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} \geq -x + 2$; b) si $x < 0$ alors

$\frac{1}{x} < -x + 2$.

2) Vérifier graphiquement ces résultats en représentant sur le même graphique la droite

D : $y = -x + 2$; et l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 34

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1) Démontrer que :

a) si $x > 0$ alors $\boldsymbol{f}(x) > x$.

b) si $x > 1$ alors $\boldsymbol{f}(x) > \frac{1}{x}$.

c) si $x > 5$ alors $\boldsymbol{f}(x) < x + 0{,}2$

d) si $x \in]0 ; 1[$; alors $\boldsymbol{f}(x) < \frac{2}{x}$.

2) a) Représenter sur le même graphique les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$\boldsymbol{g}(x) = x$; $\boldsymbol{h}(x) = \frac{1}{x}$; $\boldsymbol{k}(x) = x + 0{,}2$; $\boldsymbol{l}(x) = \frac{2}{x}$.

b) en admettant que f est décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$ et en tenant compte des résultats de la question 1), représenter graphiquement la fonction $\boldsymbol{f}$.

Comparaison

Exercice 35

1) En utilisant la comparaison des fonctions usuelles entre elles, ranger par ordre croissant sans calcul :

a) $0{,}99$; $0{,}99^3$; $0{,}99^2$; $\dfrac{1}{0{,}99}$; $\sqrt{0{,}99}$

b) $1{,}01^3$; $\sqrt{1{,}01}$; $\dfrac{1}{1{,}01}$; $1{,}01^2$; $1{,}01$.

2) Contrôler les résultats en donnant pour chaque nombre un encadrement d'amplitude 10-3.

3) A l'aide des encadrements obtenus, comparer $\sqrt{1{,}01}$ et $\dfrac{1}{0{,}99}$ ainsi que $\sqrt{0{,}99}$ et $\dfrac{1}{1{,}01}$ et 0,99.

Ranger alors par ordre croissant les dix nombres précédents et 1.