XI- ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE

Faire savoir

Le cours

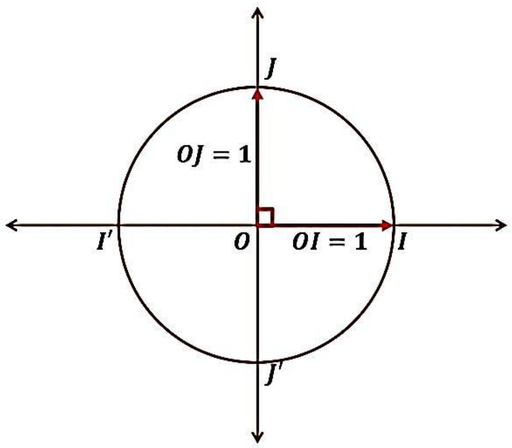
1. Angles orientés et cercle trigonométrique

a) Le cercle trigonométrique

Définition

Soit (O, I, J) un repère orthonormé tel que $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont deux vecteurs unitaires.

Le cercle trigonométrique (Γ) est le cercle de centre O (*origine du repère*) et de rayon $OI = OJ = 1$.



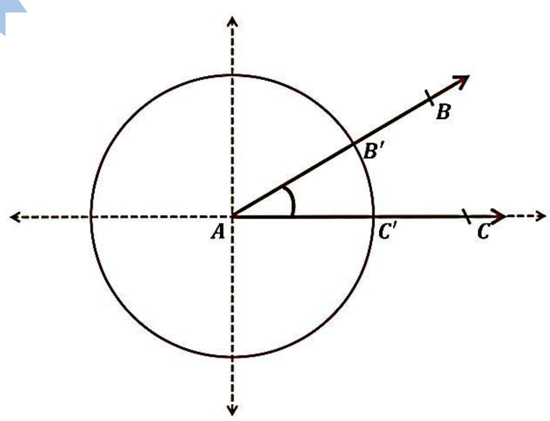
b) Mesure d'un angle en radian

Soit un angle géométrique $\widehat{BAC}$ (*mesuré en degré*).

Le cercle trigonométrique de centre A, est de périmètre 2π.

Il coupe les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ respectivement en C' et B'.

La mesure en radian de l'angle $\widehat{BAC}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\boldsymbol{B'C'}}$



Le tableau suivant donne la correspondance entre différentes unités de mesures angulaires.

Mesure en	180	90	60	45	30	0	x

degré (°)							
Mesure en radian	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	y
Mesure en grade	200	100	$\frac{200}{3}$	50	$\frac{100}{3}$	0	z

Il s'agit d'un tableau de proportionnalité :

$$y = \frac{\pi}{180}x, \qquad z = \frac{10}{9}x$$

Exemple 1

Compléter le tableau

Mesure en degré	75		
Mesure en radian		$\frac{\pi}{2}$	
Mesure en grade			40

Solution

Comme ce tableau présente un tableau de proportionnalité, on a :

$y = \frac{\pi}{180}x$ et $z = \frac{10}{9}x$.

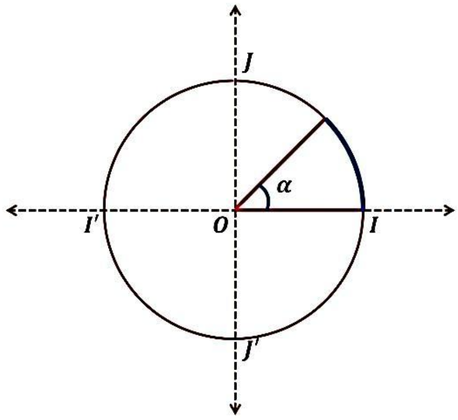
Avec x = 75, on a $y = \frac{\pi}{180}(75) = \frac{5\pi}{12}$; $z = \frac{10}{9}(75) = \frac{250}{3}$.

Avec $y = \frac{\pi}{12}$, on a $x = \frac{180}{\pi}\frac{\pi}{12} = 15$; $z = \frac{10}{9}(15) = \frac{50}{3}$.

Avec z = 40, on a $x = \frac{9}{10}40 = 36$; $y = \frac{\pi}{180}(36) = \frac{\pi}{5}$.

Mesure en degré	75	15	36
Mesure en radian	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{5}$
Mesure en grade	$\frac{250}{3}$	$\frac{50}{3}$	40

Dans la suite de ce chapitre sauf précision contraire, les mesures des angles seront données en radian.



Sur un cercle de rayon R, la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ intercepté par un angle au centre de mesure α *(en radian)* est $R\alpha$.

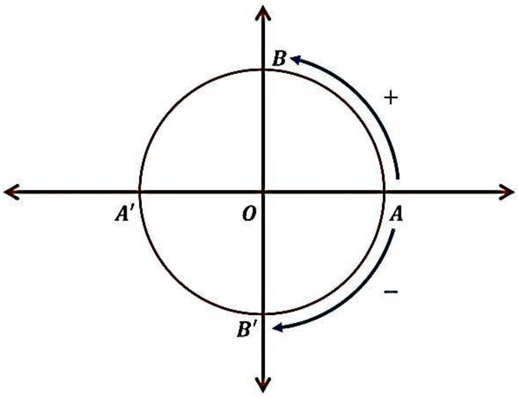
Le périmètre du cercle est $2\pi R$.

c) Le plan orienté

Un plan est orienté lorsqu'on distingue deux sens de parcours sur chacun de ses cercles.

- Un sens positif ou direct qui est le sens contraire à la rotation des aiguilles d'une montre *(sens antihoraire)*.

- Un sens négatif ou indirect qui est le sens de la rotation des aiguilles d'une montre *(sens horaire)*.



d) Mesure principale de l'angle orienté

a- Mesure principale d'un angle

Définition

Soit α un nombre réel positif et $\hat{A}$ un angle de mesure α, on considère x comme mesure principale de l'angle $\hat{A}$ si ;

$$\boldsymbol{\alpha = x\ [2\pi]}$$

$$ou$$

$$\boldsymbol{\alpha = x + 2k\pi} \quad (avec\ k \in \mathbb{R}_+)$$

Tel que ; $0 \leq x < 2\pi$ ou $0° \leq x < 360°$

(x *comprise entre* $0°$ *et* $360°$ *ou entre* 0 *et* 2π *radians).*

b- Méthode

Pour déterminer la mesure principale d'un angle en degré, on fait la division euclidienne de sa mesure donnée par 360 sans la virgule, et on prend le reste de la division.

Exemple 2

$$11\ 000 \div 360 = 30 \times 360 + 200$$

Donc, $mesure\ principale\ (11\ 000) = 200°$

Remarque

On peut continuer jusqu'à la virgule et multiplier la partie décimale du résultat par 360.

Exemple 3

$$11\ 000 \div 360 = 30.555 \dots$$

$$0{,}555 \dots \times 360 = 200°$$

c- Méthode

Pour calculer la mesure principale d'un angle en radian, on divise la fraction par 2 puis on soustrait du résultat, le plus grand nombre entier inférieur ou égal au résultat, et on multiplie le nouveau résultat par le dénominateur de la deuxième fraction pour obtenir le numérateur de la fraction résultat.

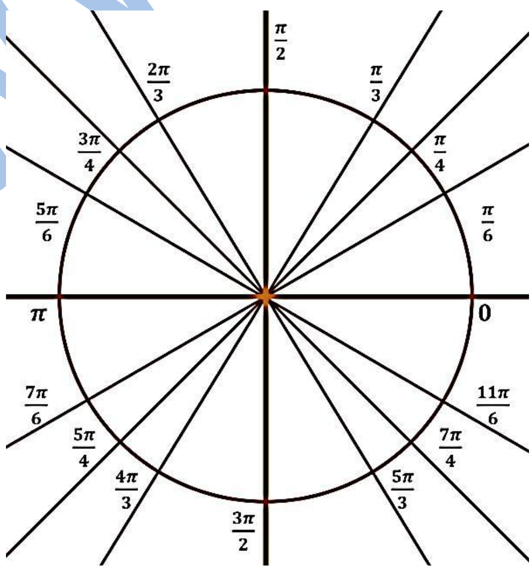
Exemple 4

$$\frac{25\pi}{4} \Longrightarrow \frac{\frac{25\pi}{4}}{2} \Longrightarrow 25 \div 8 = 3{,}125 \Longrightarrow 3{,}125 - 3 = 0{,}125$$

$$\Longrightarrow 0{,}125 \times 8 = 1 \Longrightarrow \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$\frac{2\ 300\pi}{27} \Longrightarrow \frac{\frac{2300\pi}{27}}{2} \Longrightarrow 2\ 300 \div 54 = 42{,}592 \dots \Longrightarrow 42{,}592 - 42 = 0{,}592 \dots$$

$$\Longrightarrow 0{,}592 \dots \times 54 = 32 \Longrightarrow \frac{2\ 300\pi}{27} = \frac{32\pi}{27}\ [2\pi]$$



Exemple 5

Donner les mesures principales des angles suivants :

1°/ $\hat{A} = 800°$; **2°/** $\hat{B} = 1\,300°$; **3°/** $\hat{C} = 4\,000°$; **4°/** $\widehat{D} = 11\,000°$

5°/ $\hat{E} = 13\,900°$; **6°/** $\hat{F} = 56\,070°$; **7°/** $\hat{G} = 10\,800°$

Solution

1°/ $\hat{A} = 800° \longrightarrow mes(\hat{A}) = 80°$

2°/ $\hat{B} = 1\,300° \longrightarrow mes(\hat{B}) = 220°$

3°/ $\hat{C} = 4\,000° \longrightarrow mes(\hat{C}) = 40°$

4°/ $\widehat{D} = 11\,000° \longrightarrow mes(\widehat{D}) = 200°$

5°/ $\hat{E} = 13\,900° \longrightarrow mes(\hat{E}) = 220°$

6°/ $\hat{F} = 56\,070° \longrightarrow mes(\hat{F}) = 270°$

7°/ $\hat{G} = 10\,800° \longrightarrow mes(\hat{G}) = 0°$

Exemple 6

Donner les mesures principales des angles suivants :

1°/ $\hat{A} = \frac{17\pi}{8}$; **2**°/ $\hat{B} = \frac{25\pi}{4}$; **3**°/ $\hat{C} = \frac{350\pi}{18}$; **4**°/ $\widehat{D} = \frac{1\,536\pi}{12}$; **5**°/ $\hat{E} = \frac{2\,300\pi}{27}$

Solution

1°/ $\hat{A} = \dfrac{17\pi}{8} \longrightarrow \hat{A} = \dfrac{16\pi}{8} + \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{8}\ [2\pi]$

2°/ $\hat{B} = \dfrac{25\pi}{4} \longrightarrow \hat{B} = \dfrac{24\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

3°/ $\hat{C} = \dfrac{350\pi}{18} \longrightarrow \hat{C} = \dfrac{324\pi}{18} + \dfrac{26\pi}{18} = \dfrac{13\pi}{9}\ [2\pi]$

4°/ $\widehat{D} = \dfrac{1\,536\pi}{12} \longrightarrow \widehat{D} = 128\pi = 0\ [2\pi]$

5°/ $\hat{E} = \dfrac{2\,300\pi}{27} \longrightarrow \hat{E} = \dfrac{2\,268\pi}{27} + \dfrac{32\pi}{27} = \dfrac{32\pi}{27}\ [2\pi]$

Exemple 7

Sachant que $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{200\pi}{3}$. Déterminer la mesure principale α de l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

Solution

On a : $\alpha = \dfrac{200\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, et $-\pi < \alpha \leq \pi$. Donc, $-\pi < \dfrac{200\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$;

$-1 - \dfrac{200}{3} < 2k \leq 1 - \dfrac{200}{3} \Leftrightarrow \dfrac{-203}{6} < k \leq \dfrac{-197}{6}$. Donc, -33,8 < k ≤ -32,8. ; Or $k \in \mathbf{Z}$, donc k = -33.

D'où $\alpha = \dfrac{200\pi}{3} + 2(-33)\,\pi = \dfrac{200\pi}{3} - 66\pi = \dfrac{200\pi - 198\pi}{3}$. $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

d- Mesure principale d'un angle orienté

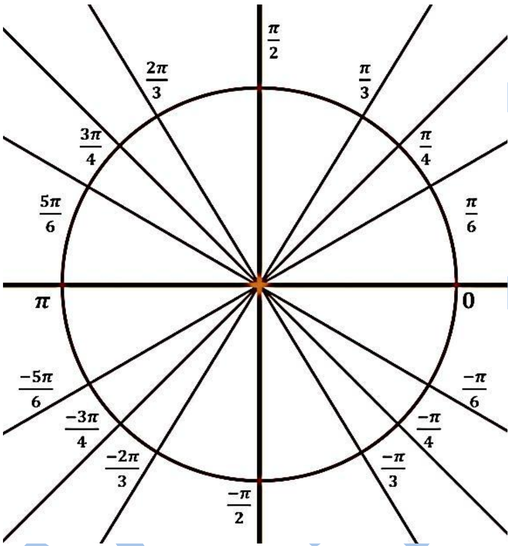
Définition

Soit α un nombre réel positif et $\hat{A}$ un angle orienté de mesure α, on considère x comme mesure principale de l'angle orienté $\hat{A}$ si ;

$$\boldsymbol{\alpha = x\ [2\pi]}$$
$$ou$$
$$\boldsymbol{\alpha = x + 2k\pi} \quad (avec\ k \in \mathbb{R})$$

Tel que ; $-\pi < x \leq \pi$ ou $-180° < x \leq 180°$

(x *comprise entre* $-180°$ *et* $180°$ *ou entre* $-\pi$ *et* π *radians).*



Exemple 8

Donner les mesures principales des angles orientés suivants :

$$\frac{25\pi}{2};\ \frac{-31\pi}{5};\ \frac{7\pi}{4};\ -\frac{121\pi}{3}$$

Solution

☖ $\frac{25\pi}{2} = \frac{24\pi + \pi}{2} = \frac{24\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 12\pi + \frac{\pi}{2}$

$$= 12\pi + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{25\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$$

☖ $\frac{-31\pi}{5} = \frac{-30\pi - \pi}{5} = \frac{-30\pi}{5} + \frac{-\pi}{5}$

$$= -6\pi + \frac{-\pi}{5} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{-31\pi}{5} = \frac{-\pi}{5}\ \ [2\pi]}$$

☖ $\frac{7\pi}{4} = \pi + \frac{3\pi}{4} \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}\ \ [2\pi]}$

☖ $-\frac{121\pi}{3} = \frac{-120\pi - \pi}{3} = -\frac{120\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$

$$= -40\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{\mathbf{121}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\ [\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$$

e) Angles orientés et vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

On désigne par l'écriture $(\vec{u};\vec{v})$, l'angle orienté déterminé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$, sera notée $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

On a :

⊠ $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = 0$ Si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens (*angle orienté nul*).

⊠ $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \pi$ Si, et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires (*angle orienté plat*).

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires.

Soit A un point donné du plan orienté, alors il existe un seul point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, et il existe un seul point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$;

$$(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}).$$

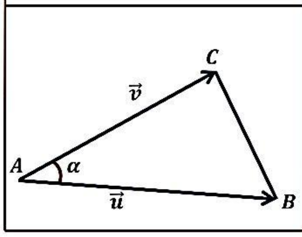
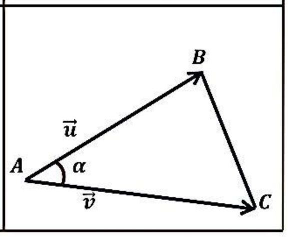
Soit α la mesure de l'angle géométrique $\hat{A}$ du triangle ABC (*On rappelle que* $\alpha \in]0;\ \pi[$).

⌂ $(\widehat{\vec{\boldsymbol{u}};\vec{\boldsymbol{v}}}) = +\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$,

Le triangle ABC est dit direct : $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) > 0$.
La base $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est dite directe.
Le repère $(A;\ \vec{u};\ \vec{v})$ est dit direct.

⌂ $(\widehat{\vec{\boldsymbol{u}};\vec{\boldsymbol{v}}}) = -\boldsymbol{\alpha}$,

Le triangle ABC est dit indirect : $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) < 0$.
La base $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est dite indirecte.
Le repère $(A;\ \vec{u};\ \vec{v})$ est dit indirect.

$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \alpha > 0$	$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -\alpha < 0$
	

Propriétés

⊠ La mesure principale de l'angle orienté associé à deux vecteurs non nuls, appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

⊠ Pour tous deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$; $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = -(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$.

$(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$ sont deux angles orientés opposés

☒ Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{w}}) + (\widehat{\vec{w};\vec{v}})$ (*Relation de Chasles*).

☒ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, soient α et β deux réels non nuls et de même signe.

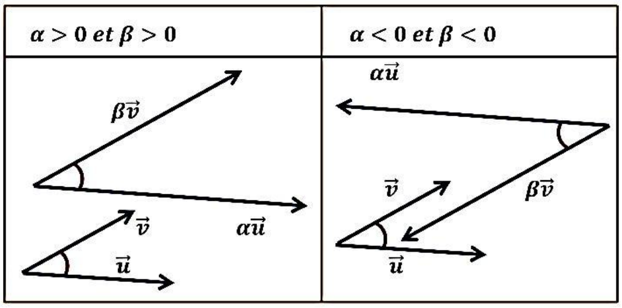
⌂ **Si $\boldsymbol{\alpha} > 0$ et $\boldsymbol{\beta} > 0$;**

L'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et l'angle $(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}})$ sont de la même orientation (*Tous les deux directs, ou tous les deux indirects*).

⌂ **Si $\boldsymbol{\alpha} < 0$ et $\boldsymbol{\beta} < 0$;**

L'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et l'angle $(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}})$ sont d'orientation contraire (*si* $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ *est direct,* $(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}})$ *est indirect, et si* $(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}})$ *est indirect,* $(\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}})$ *est direct*).

Dans les deux cas (α *et* β *tous les deux positifs, ou tous les deux négatifs*) : $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\alpha\vec{u};\beta\vec{v}})$.



Remarque

Si $\boldsymbol{\alpha} < 0$

☒ $(\widehat{\alpha\vec{u};\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v};\vec{u}}) = \pi$

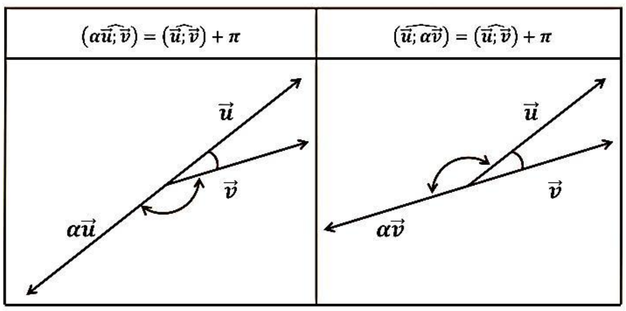
$$\Longrightarrow (\widehat{\alpha\vec{u};\vec{v}}) = \pi - (\widehat{\vec{v};\vec{u}})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{(\widehat{\alpha\vec{u};\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) + \pi}}$$

☒ $(\widehat{\vec{v};\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u};\alpha\vec{v}}) = \pi$

$$\Longrightarrow (\widehat{\vec{u};\alpha\vec{v}}) = \pi - (\widehat{\vec{v};\vec{u}})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{(\widehat{\vec{u};\alpha\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u};\vec{v}}) + \pi}}$$



***ABC* est un triangle direct :**

$$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}) = \pi.$$

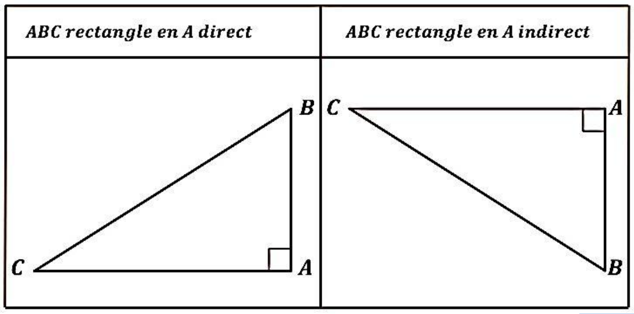
$$(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}) = -\pi$$

ABC est un triangle rectangle en A, direct, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2}$ (*Angle orienté droit*).

ABC est un triangle rectangle en A, indirect, tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ (*Angle orienté droit*).



Exemple 9

ABC est un équilatéral direct de centre O, A' milieu de $[BC]$; ABD est un triangle indirect rectangle et isocèle en A, I milieu de $[BD]$

Donner la mesure principale pour chacun des angles orientés suivant :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA'}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{AA'}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AA'}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}}\right)$;

$\left(\widehat{\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AC}}\right)$;

Solution

$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{-\pi}{6}$;

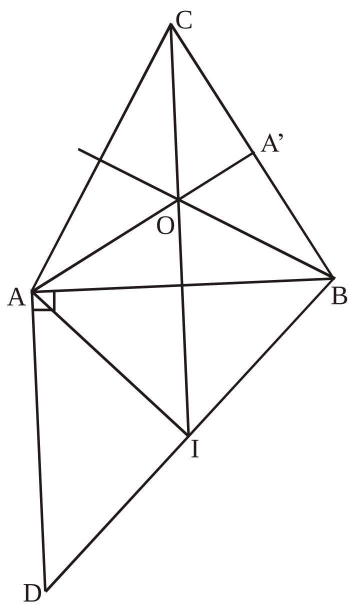
$\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right) = \frac{-\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{2}$;

$\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right) = \frac{2\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right) = \frac{-\pi}{4}$;

$\left(\overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OA'}\right) = \frac{\pi}{3}$; $\left(\overrightarrow{IB}\ ;\ \overrightarrow{IA}\right) = \frac{\pi}{2}$;

$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AA'}\right) = \frac{\pi}{6}$; $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OA'}\right) = \pi$;

$$\left(\overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$



Exemple 10

ABC est un triangle tel que ;

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{4}, et\ \left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{-2\pi}{3}$$

I et J étant les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)$, puis montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AJ}}\right) = \frac{\pi}{4}$

Solution

On a : $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)=\pi$

Or, $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{BC}\ ;\overrightarrow{BA}\right)=-\left(\overrightarrow{BA}\ ;\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

Donc ; $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)=\pi$;

Donc $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)=\pi-\frac{11\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$.

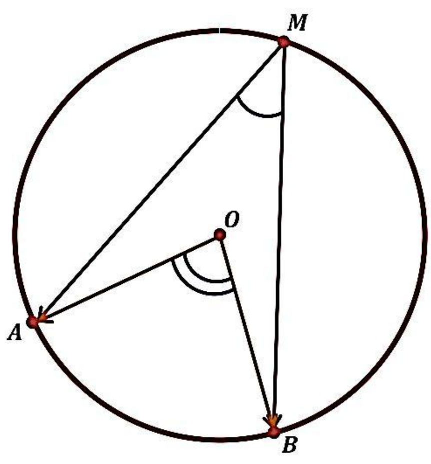
On a : $\left(\overrightarrow{AI}\ ;\ \overrightarrow{AJ}\right)=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}$.

f) Théorème de l'angle inscrit

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et A, B deux points distincts de $(\mathcal{C})$. Pour tout point $M \in (\mathcal{C})$ et distinct de A et B, on a :

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\ [\boldsymbol{2\pi}]$$

$[\boldsymbol{2\pi}]$ se lit « **modulo 2π** » ou « **congru 2π** »



Démonstration

OAM est un triangle isocèle en O :

$$\Longrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM}}\right)$$

Dans le triangle OAM, on a ;

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AM}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right)=\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbf{2}\left(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{MA}};\overrightarrow{\boldsymbol{MO}}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{OM}};\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}}\right)=\boldsymbol{\pi}}\ \boxed{1}$$

OBM est un triangle isocèle en O, de même on a :

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbf{2}\left(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{MO}};\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{OB}};\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}\right)=\boldsymbol{\pi}}\ \boxed{2}$$

$$\boxed{1}+\boxed{2}\Longrightarrow$$

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}}\right)+2\left(\widehat{\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OM}}\right)=\pi+\pi$$

$$\Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}\right)=2\pi$$

$$\Longrightarrow 2\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)+2\pi$$

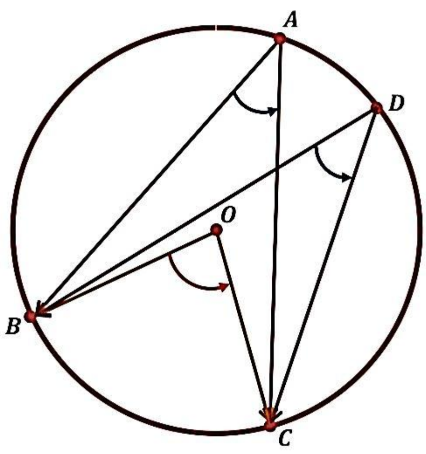
$$\Longrightarrow \boxed{\mathbf{2}\left(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{MA}};\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{\boldsymbol{OA}};\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}}\right)\ \ [\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]}$$

Propriété

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O, et soit $A, B, C\ et\ D$ quatre points distincts de $(\mathcal{C})$, alors on a :

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=2\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)$$

Les points B et C sont appelés les points de base.



Exercice

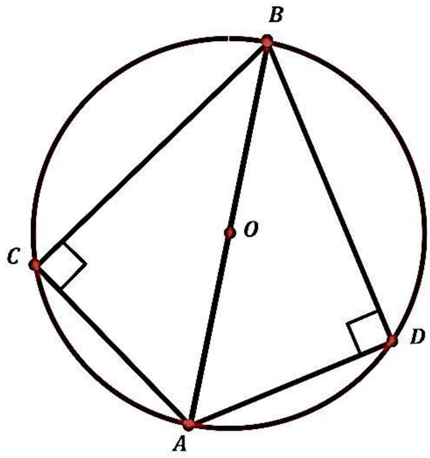
Démontrer la propriété précédente

Remarque 1

Inversement, si on a quatre points, A, B, C et D tels que ; $2\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=2\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)$, alors , A, B, C et D sont situés sur un même cercle.

Remarque 2

Si ABC et ABD sont deux triangles rectangles ayant le même hypoténuse, alors A, B, C et D sont sur un même cercle.



Exercice

Soit ABC un triangle et soir $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit.

Et soit M un point de $\mathcal{C}$ distinct de A, de B et de C.

Soit P, Q et R les projetés orthogonaux de M respectivement sur $(BC), (AB)$ et (AC).

1° Faire une figure ;

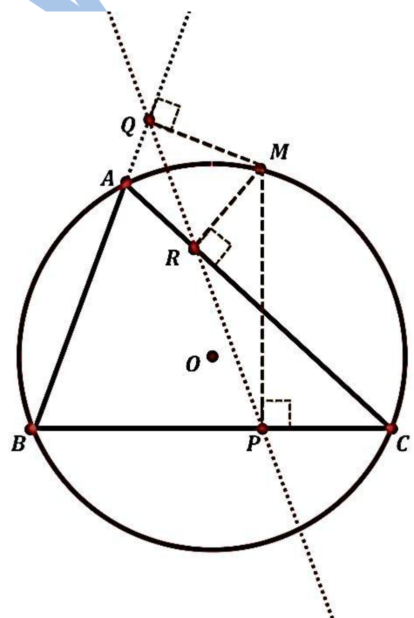
2° Montrer que P, Q et R sont alignés.

g) Théorème (*droite de Simson – Wallace*)

Dans un triangle ABC, soit M un point du plan et U, V et W les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (AC) et (AB). Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- M est sur le cercle circonscrit au triangle ;
- U, V et W sont alignés.

Dans ce cas, la droite portant les points U, V et W s'appelle la droite de **Simson** (*ou droite de **Wallace***) associée au point M.



En particulier :

- la droite de Simson associée à un sommet est la hauteur issue de ce sommet ;
- la droite de Simson du point diamétralement opposé à un sommet sur le cercle circonscrit est le côté opposé à ce sommet.

h) Théorème de la tangente

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O, A et B deux points distincts de $(\mathcal{C})$. Si (D) est la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ en A, alors $\forall\, T \in (D)$, on a ;

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{AT};\overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \ \ [2\pi]$$

Exercice

Démontrer le théorème de la tangente

2- Trigonométrie

a) Trigonométrie dans le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A ;

$$\cos\hat{B} = \frac{côté\ adjacent\ à\ \hat{B}}{hypoténuse} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin\hat{B} = \frac{côté\ opposé\ à\ \hat{B}}{hypoténuse} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{côté\ opposé\ à\ \hat{B}}{coté\ adjacent\ à\ \hat{B}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$$

$$\operatorname{cotan}\hat{B} = \frac{côté\ adjacent\ à\ \hat{B}}{côté\ opposé\ à\ \hat{B}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\cos\hat{B}}{\sin\hat{B}}$$

$\cos\hat{C} = \sin\hat{B}$

$\sin\hat{B} = \cos\hat{C}$

$\tan\hat{C} = \operatorname{cotan}\hat{B}$

$\operatorname{cotan}\hat{C} = \tan\hat{B}$

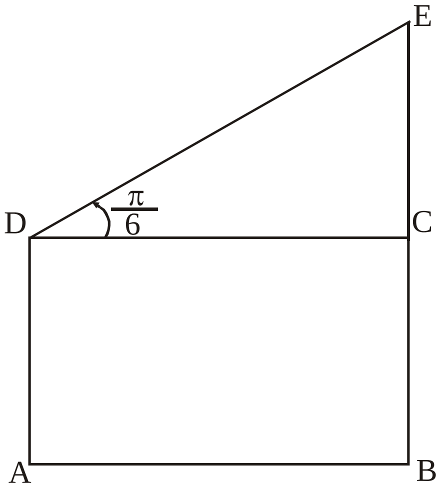
$AB^2 + AC^2 = BC^2$ (*Relation de Pythagore*)

$\hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ (*Angles complémentaires*).

Exemple 11

$ABCD$ est un rectangle direct tel que $AB = 5$ et $AD = 3$. DCE est un triangle direct rectangle en C tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DE}}\right) = \frac{\pi}{6}$. Calculer BE.

Solution



On a BE = BC + CE ; Or BC = AD = 3 ; et tan $\frac{\pi}{6} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow$

CE = CD tan $\frac{\pi}{6}$ = AB tan $\frac{\pi}{6}$ = $5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$= \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Donc, BE = 3 + $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$$= \frac{9+5\sqrt{3}}{3}.$$

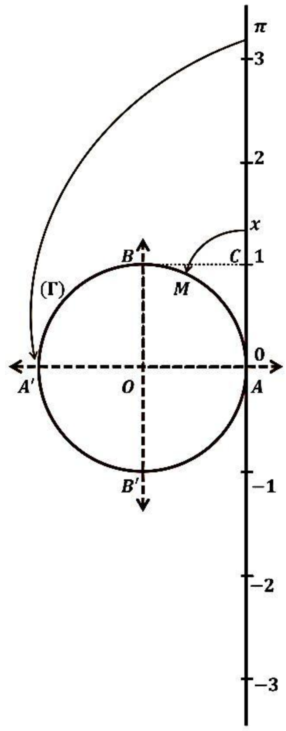
b) Représentation des réels sur le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un cercle (Γ) de rayon 1.

Son périmètre est donc égal à 2π.

A tout réel x, on associe un point M de (Γ) de la façon suivante :

Au réel 0, on associe le point A (*voir figure*)



A un réel $x > 0$, on associe le point M tel que l'arc $\widehat{AM}$ parcouru dans le sens positif sur (Γ), ait pour longueur x.

A un réel $x < 0$, on associe le point M tel que l'arc $\widehat{AM}$ parcouru dans le sens négatif sur (Γ), ait pour longueur $|x|$.

Pour visualiser cette fonction de $\mathbb{R}$ dans (Γ), soit (Δ) la tangente à (Γ) en A.

Munissons (Δ) du repère $(A; C)$ tel que $OACB$ soit un carré.

On peut considérer que (Δ) est un fil gradué représentant $\mathbb{R}$ que l'on enroule sur (Γ).

A tout réel x correspond bien un seul point M du cercle trigonométrique (Γ) (*voir figure*).

Soit x un réel et M le point correspondant du cercle trigonométrique, on dit que x est une mesure en radian de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}}\right)$.

L'ensemble des mesures en radian de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}}\right)$ est l'ensemble des réels de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}\right) = x \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}\right) = x + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

c) Cosinus et sinus d'un réel

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}}\right) = x$

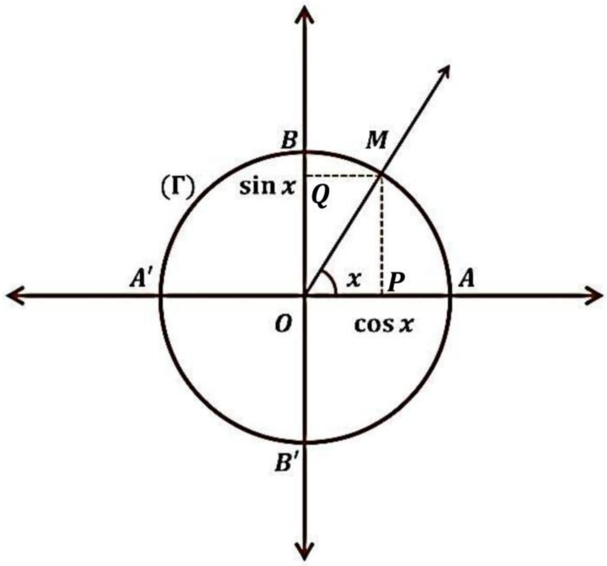
Dans le repère orthonormal direct $(O; A; B)$, on a

$\cos x$ est l'abscisse du point M.
$\sin x$ est l'ordonnée du point M.

Avec P et Q projetés orthogonaux de M respectivement sur (OA) et (OB).

On a :

$$\cos x = \overline{OP} \text{ et } \sin x = \overline{OQ}.$$



d) Propriétés :

☒ Des réels x et y vérifient $\begin{cases} \cos x = \cos y \\ \sin x = \sin y \end{cases}$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que : $x = y + 2k\pi$.

☒ Pour tout réel x, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

☒ $\forall\, x \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$

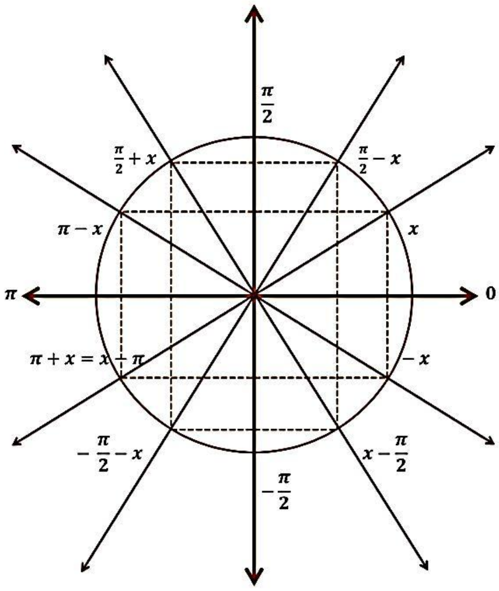
☒ $\forall\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x \geq 0$

☒ $\forall\, x \in [0\,;\, \pi]$; $\sin x \geq 0$.

e) Lignes trigonométriques ; Angles associés – Angles remarquables

Soit $\hat{A}$ un angle orienté de mesure α ;

Les angles : $-\alpha,\ \pi - \alpha,\ \pi + \alpha,\ \frac{\pi}{2} + \alpha$; sont habituellement appelés angles associés à $\hat{A}$.



f) Propriétés

Pour tout réel x (*fig. ci-dessus*) on a :

☒ $\cos(-x) = \cos(x)$, et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

☒ $\cos(\pi + x) = -\cos x$, et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

☒ $\cos(\pi - x) = -\cos x$, et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Pour tout réel x (*fig. ci-dessus*) on a :

☒ $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

☒ $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

Remarques

Les tangentes des angles associés se déduisent des formules précédentes ;

Ainsi :

$$tan(\pi - \alpha) = \frac{sin(\pi - \alpha)}{cos(\pi - \alpha)} = \frac{sin\,\alpha}{-\,cos\,\alpha} = -\,tan\,\alpha.$$

Exemple 12

Sachant que ; $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, calculer ;

$\mathbf{1}°\ \cos\frac{5\pi}{6}$; $\qquad \sin\frac{5\pi}{6}$

$\mathbf{2}°\ \cos\frac{7\pi}{6}$; $\qquad \sin\frac{7\pi}{6}$

$\mathbf{3}°\ \cos\frac{\pi}{3}$; $\qquad \sin\frac{\pi}{3}$

$\mathbf{4}°\ \cos\frac{2\pi}{3}$; $\qquad \sin\frac{2\pi}{3}$

Solution

$1°\ \cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$2°\ \cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$3°\ \cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$4°\ \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple 13

A/ Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$
$cos\,x$			
$sin\,x$			
$tan\,x$			
$cotan\,x$			

B/ Déterminer θ dans chacun des cas suivants :

a) $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{1}{2} \\ sin\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ sin\,\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$; d) $\begin{cases} cos\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ sin\,\theta = \frac{-1}{2} \end{cases}$.

Solution

A) Voici le tableau complété

x	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$
cosx	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$
sinx	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
tanx	$\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
cotanx	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	-1	$\sqrt{3}$

- $\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;
- $\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$;
- $\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)} = \dfrac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$.
- $\text{cotan}\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \dfrac{\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.

On a : $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$.

- $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\tan\frac{3\pi}{4} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$; $\text{cotan}\frac{3\pi}{4} = \dfrac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

On a : $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$. Donc,

- $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;
- $\tan\frac{7\pi}{6} = \dfrac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{cotan}\frac{7\pi}{6} = \dfrac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-}{2}} = \sqrt{3}$

B) a) on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin\theta = \sin\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$; b) $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\frac{-\pi}{4} \\ \sin\theta = \sin\frac{-\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{-\pi}{4}$

c) $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;

d) $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\left(-\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) \\ \sin\theta = \sin\left(-\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{5\pi}{6}$.

g) Tableau de valeurs trigonométriques de certains angles remarquables

1°/ Pour les mesures principales directes positives

α en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	⊠	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	0
cotan x	⊠	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	⊠

2°/ Pour les mesures principales indirectes négatives

α en radian	0	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$-\pi$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1
sin x	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0
tan x	0	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	⊠	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	0
cotan x	⊠	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	⊠

Fonctions circulaires

❖ Fonction $x \mapsto \sin x$:

- elle est définie sur $\mathbb{R}$
- elle a pour période 2π c'est –à- dire que $\forall$ x $\in \mathbb{R}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- elle est impaire, car $\sin(-x) = -\sin x$

Tableau de variation sur [0 ; π]

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	↗	1	↘	0

La courbe de représentative $\mathscr{C}$ de sinx , dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est donnée à la figure 1.

La courbe $\mathscr{C}$ est appelée une sinusoïde.

❖ Fonction $x \mapsto \cos x$:

- elle est définie sur $\mathbf{R}$
- elle a pour période 2π c'est –à- dire que $\forall x \in \mathbf{R}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- elle est paire, car $\cos(-x) = \cos x$

Tableau de variation sur [0 ; π]

x	0		π
cosx	1	↘	-1

La courbe de représentative $\mathscr{C}'$ de cosx , dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est donnée à la figure 2.

On peut démontrer que la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$ transforme $\mathscr{C}'$ en $\mathscr{C}$. Donc $\mathscr{C}'$ est une sinusoïde.

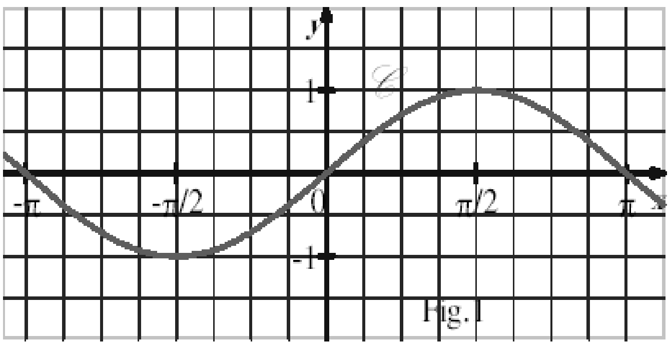


Fig.1

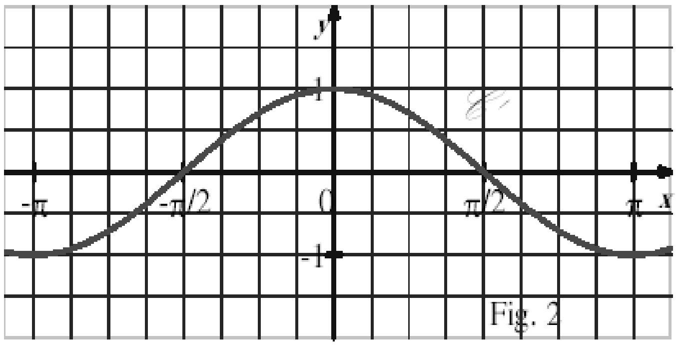


Fig. 2

h) Formules trigonométriques

Formules d'addition

Pour tous nombres réels a et b :

1) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
2) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
3) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;
4) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Démonstrations au chapitre 12 (*Produit scalaire*)

Exemple 14

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer l'égalité : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Solution

$$1 + \tan^2 x = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Exemple 15

En utilisant les formules d'addition, calculer ;

$$\cos\frac{7\pi}{12} \ \ et \ \sin\frac{7\pi}{12} \ ; \ \cos\frac{\pi}{12} \ \ et \ \sin\frac{\pi}{12}$$

Solution

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}$$

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$$

Exercice généraux

Exercice 1

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont deux cercles sécants en A et B.

M est un point de $(\mathcal{C})$ distinct de A et B. La droite (AM) recoupe $(\mathcal{C}')$ en N. Les tangentes respectives aux cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ en M et N se coupent en T.

1° Faire une figure ;

2° Montrer que M, T, N et B sont sur un même cercle.

Exercice 2

Soit deux cercle $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ de centres respectifs, O et O' sécants en I et J, et soit $A \in (\mathcal{C})$ et $A' \in (\mathcal{C}')$ tels que ;

$$(\overrightarrow{OI};\ \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{O'I};\ \overrightarrow{O'A'})$$

1° Faire une figure ;

2° Montrer que A, J et A' sont alignés ;

Exercice 3

$(\mathcal{C})$ est un cercle de diamètre $[AB]$, (Δ_1) et (Δ_2) sont deux droites parallèles passant respectivement par A et B. M est un point de $(\mathcal{C})$ qui se projette orthogonalement sur $(AB), (\Delta_1)$ et (Δ_2) respectivement en I, J et K.

1° Faire une figure ;

2° Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{JK};\ \overrightarrow{JI}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AB}}\right)$;

3° Montrer que $2\left(\widehat{\overrightarrow{KI};\ \overrightarrow{KJ}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{BM}}\right)$;

4° En déduire que IJK est rectangle en I.

Exercice 4

$ABCD$ est un quadrilatère, I est le point d'intersection des diagonales. P, Q, R et S sont les projetés orthogonaux respectifs de I sur $(AB), (BC), (CD)$ et (DA).

1° Faire une figure ;

2° Montrer que ;

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{PS};\ \overrightarrow{PQ}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AC}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{BC}}\right)$$

3° Montrer que ;

$$2\left(\widehat{\overrightarrow{RQ};\ \overrightarrow{RS}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\ \overrightarrow{CA}}\right) + 2\left(\widehat{\overrightarrow{DB};\ \overrightarrow{DA}}\right)$$

4° En déduire que P, Q, R et S sont sur le même cercle si, et seulement si ; $2\left(\widehat{\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{CA}}\right) = 0$

Repères orthonormaux

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}$).

Exercice 5

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}$).

Soit x un nombre réel. On considère les deux points ; A(1 ; x) et B(x ; 1).

Déterminer x pour que mes $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 6

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}$).

On considère les points A(-1 ; 1) , B($\frac{5}{2}$; 4), C(-2 ; 3) , D($\frac{-11}{2}$, 0).

a) Démontrer que ABCD est un losange.

b) Evaluer mes $\widehat{ABC}$ et mes $\widehat{ABD}$

Exercice 7

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On se propose de calculer la distance du point A (5 ; -2) à la droite $\mathcal{D}$ d'équation

4x –y -5 = 0.

a) Donner une équation de la droite $\mathcal{D}$' passant par A et orthogonal à $\mathcal{D}$.
b) Calculer les coordonnées du point d'intersection H de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$'.
c) En déduire la distance AH.

Exercice 8

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par A(3 ; 5) et de vecteur normal $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre

Ω(-1 ; 2) et de rayon $2\sqrt{2}$.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Faire une figure.

Exercice 9

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On considère les points A(-1 ; $\frac{1}{2}$) , B(1 ; $\frac{5}{2}$), et C(2 ; $\frac{3}{2}$).

Vérifier que $\widehat{ABC}$ = 90°.

Déterminer une équation du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de (Γ) avec les axes du repère.

Exercice 10

Soit ABC un triangle. On donne AB = 5,4 cm, AC = 3,6 cm et $\hat{A}$= 62°.

Faire une figure.

Calculer BC à 1 mm près.

Calculer $\hat{B}$ et $\hat{C}$ à 1° près.

Exercice 11

Soit ABC un triangle et I le milieu de [BC].

On donne AB = 6,5, AI = 4,5 et AC = 3,5.

a) Calculer la valeur exacte de BC.

b) Calculer une valeur approchée de $\widehat{BAC}$ à 0,1° près.

c) Calculer l'aire S du triangle ABC à 10^{-1} près.