XII- PRODUIT SCALAIRE

Faire savoir

Le cours

1. Les différentes expressions du produit scalaire

a- Expression avec un $cosinus$

Définition 1

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le nombre réel défini par ;

- $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = 0}$ **si** $\boldsymbol{\vec{u} = \vec{0}}$ **ou** $\boldsymbol{\vec{v} = \vec{0}}$ **;**
- $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}\right)}$ **si** $\boldsymbol{\vec{u} \neq \vec{0}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{v} \neq \vec{0}}$**.**

b- Fixation par des points

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$ tels que ;

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} \; et \; \overrightarrow{AC} = \vec{v}$$

On appelle produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel défini par :

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos \widehat{BAC}}$$

Remarque

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit " $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ "

c- Cas particuliers

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls ;

1° Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il y a deux cas de figure ;

$$\begin{cases} \alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}) = 0 \Longrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont même sens} \\ \qquad \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \\ \qquad ou \\ \alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}) = \pi \Longrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont sens contraires} \\ \qquad \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \end{cases}$$

2° Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors ; $\vec{u}.\vec{v} = 0$

3° $Si\ \vec{u} \perp \vec{v}$, alors ; $\alpha = (\widehat{\vec{u};\ \vec{v}}) = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0.$

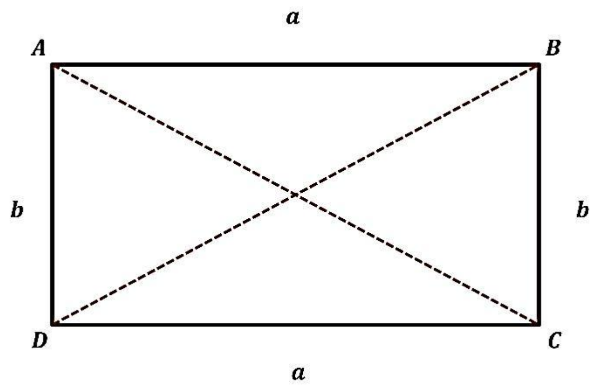
Exemple 1

Soit $ABCD$ un rectangle tel que ;

$$L = AB = CD = a \text{ et } l = AD = BC = b$$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$,

Solution



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{CD}\| \times -1 = -a \times a = -a^2$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{DC}\| \times 1 = a \times a = a^2$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AD}\|.\|\overrightarrow{BC}\| \times 1 = b \times b = b^2$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BB}\| = 0$$

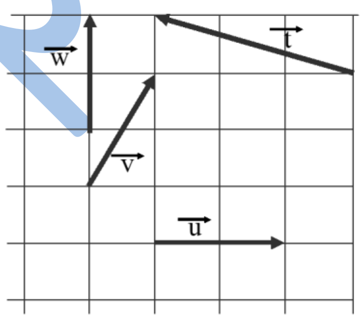
Exemple 2

Les carrés du quadrillage de la figure ci-contre

ont des côtés de longueur 1.

Lire sur la figure les valeurs des produits scalaires.

$\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{w}$; $\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{t}$; $\vec{v}.\vec{w}$; $\vec{t}.\vec{w}$.



Solution

Sur la figure ci-contre, on place les points nécessaires

à la représentation des vecteurs donnés.

Puis, on utilise l'expression des projetés orthogonaux comme suit :

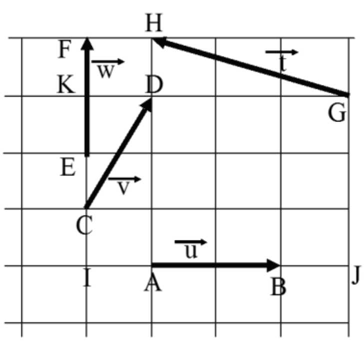
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IA} = AB \times IA = 2 \times 1 = 2;$

$\vec{u}.\vec{w} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{II} = 0$ (car $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EF}$)

$\vec{u}.\vec{t} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{JA} = -AB \times JA = -2 \times 3 = -6;$

$\vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{v} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{CK} = EF.CK = 2 \times 2 = 4;$

$\vec{t}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{t} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{KF} = EF \times KF = 2 \times 1 = 2.$



Exemple 3

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;

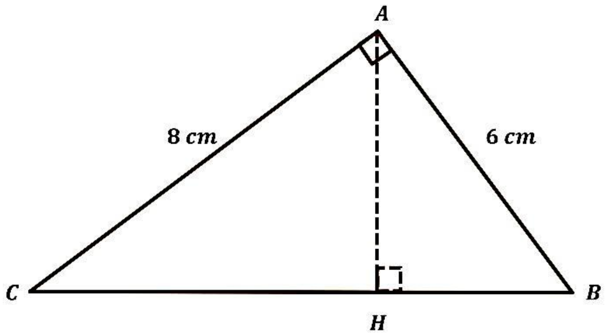
$AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1° Calculer AH, BH et CH

2° Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

3° Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

Solution



1° $AB \times AC = AH \times BC$

$$\Longrightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{6 \times 8}{10} = 4{,}8\ cm$$

$$BH = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = \sqrt{36 - 23{,}04}$$

$$= \sqrt{12{,}96} = 3{,}6\ cm$$

$$CH = BC - BH = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$$

2° $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = 3{,}6 \times 10 = 36$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = 6{,}4 \times 10 = 64$$

3° $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA} = AB \times 0 = 0$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ car $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Conclusion

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$

d- Carré scalaire

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan

Le réel $\vec{u}.\vec{u}$ s'appelle le carré scalaire de $\vec{u}$ et se note $\vec{u}^2$

On a ; $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

En particulier, pour tous points A et B du plan $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$$

e- Propriétés du produit scalaire

1° Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$;

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$

2° Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

3° $\vec{u} \perp \vec{v} = 0 \Longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

4° Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{V}$ et tout nombre réel k ;

1. $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$
2. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
3. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
   $= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
4. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
   $= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
5. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
   $= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

f- Produit scalaire et norme

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Exercice

Montrer cette propriété.

Exemple 4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que ;

$$\|\vec{u}\| = 5, \|\vec{v}\| = 4 \ et\ \vec{u}.\vec{v} = -6$$

1° Calculer $(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v})$;

2° Calculer $(3\vec{u} - \vec{v})^2$, puis en déduire $\|3\vec{u} - \vec{v}\|$;

3° Calculer $\cos(\vec{u};\ \vec{v})$.

Solution

1° $(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v})$

$$= \vec{u}.3\vec{u} + \vec{u}.(-\vec{v}) + 3\vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.(-\vec{v})$$
$$= 3\vec{u}^2 - \vec{u}.\vec{v} + 3\vec{u}.\vec{v} - \vec{v}^2$$
$$= 3\|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} - \|\vec{v}\|^2$$
$$= 3 \times 5^2 + 2 \times -6 - 4^2$$
$$= 75 - 12 - 16 = 47$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{(\vec{u} + \vec{v})(3\vec{u} - \vec{v}) = 47}.$$

2° $(3\vec{u} - \vec{v})^2 = (3\vec{u})^2 - 2(3\vec{u}.\vec{v}) + \vec{v}^2$

$$= 9\vec{u}^2 - 6\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$= 9\|\vec{u}\|^2 - \vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$= 9 \times 5^2 - 6 \times (-6) + 4^2$$

$$= 225 + 36 + 16 = 277$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(3\vec{u} - \vec{v})^2 = 277 \Longrightarrow \|3\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{277}}$$

3° $\cos(\vec{u};\ \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \dfrac{-6}{5 \times 4} = -\dfrac{6}{20} = -\dfrac{3}{10}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{\cos(\vec{u};\ \vec{v}) = -\dfrac{3}{10}}$

g- Conséquence sur le parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Si on pose ; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, on a ;

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right)}$$

h- Interprétation géométrique

Pour tout point A et tous points B et C distincts de A on a ;

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC.\cos\widehat{BAC}.$$

En effet ;

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB\ ;\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = AC\ ;$$

$$\text{et } \cos\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \cos\widehat{BAC} = \cos\hat{A}$$

b) Expression avec des projetés orthogonaux

Définition 2

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel ;

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}}$$

Où ; $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et C' est le projeté orthogonal de C sur (AB).

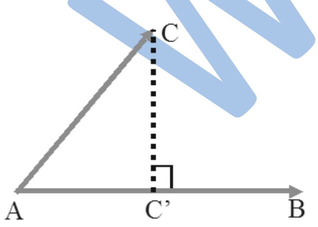


Fig.1

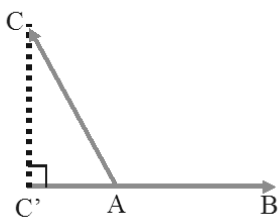


Fig.2

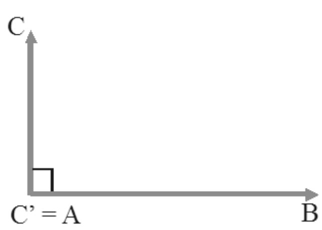


Fig.3

a- Conséquence pratique

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur.

En posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = AC$.

En notant C' le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$.

Par conséquent ;

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de même sens.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AC$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont de sens contraires
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ si $C' = A$ ($\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont orthogonaux*).

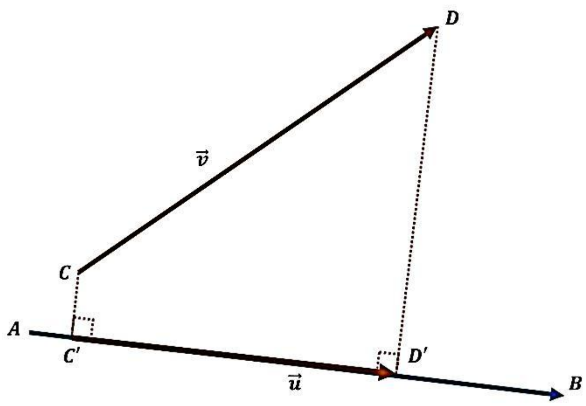
b- Produit scalaire et projection

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\vec{v}$ un vecteur.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. On note C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et de D sur la droite (AB).

On a ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sur la droite (AB).



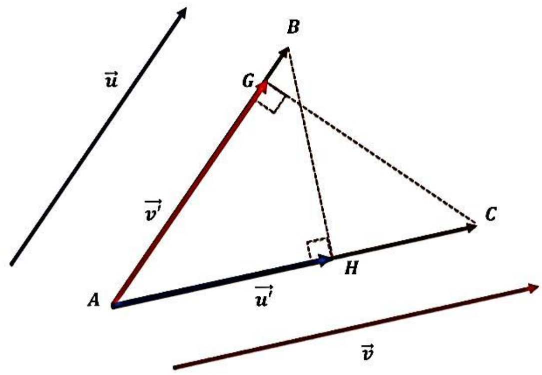
c- Généralisation

Exercice

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, montrer que l'on a ;

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{u'}.\vec{v}$$

Où $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont respectivement les projetés orthogonaux des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sur $\vec{v}$ et $\vec{u}$.



2. Le produit scalaire en géométrie analytique

a) L'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

1°/ Orthogonalité de deux vecteurs

A°) Rappel

Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ est orthonormée si, et seulement si, $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$

B°) Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux si et seulement si ; Il existe deux bipoints représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ portés par des droites perpendiculaires.

Remarque

Le vecteur nul $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur.

C°) Orthogonalité et norme

Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a ;

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$$

Cette relation permet de démontrer le théorème de Pythagore et sa réciproque ;

$$\boldsymbol{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$$

Exemple 5

$ABCD$ est un rectangle dont la longueur et la largeur mesurent respectivement ;

$$AB = 9 \quad et \quad AC = 5$$

Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

Solution

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)$$

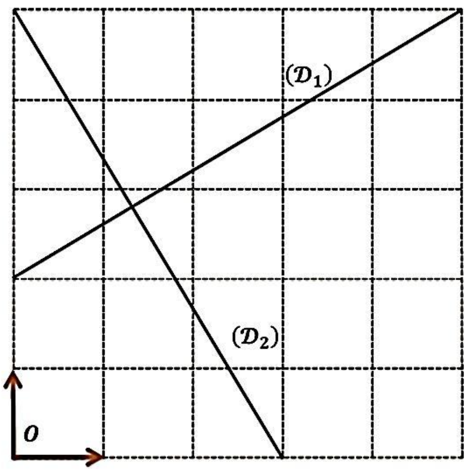
$$= AB^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} - BC^2$$

$$= 9^2 + 0 + 0 - 5^2 = 81 - 25 = 56$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 56}$$

Exemple 6

Sur la figure suivante, les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont-elles perpendiculaires ?



Solution

D'après la figure, les droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ ont respectivement pour vecteurs directeurs ;

$$\vec{u}\binom{5}{3} \; et \; \vec{v}\binom{-3}{5}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant orthogonaux car,

$$5 \times (-3) + 3 \times 5 = -15 + 15 = 0$$

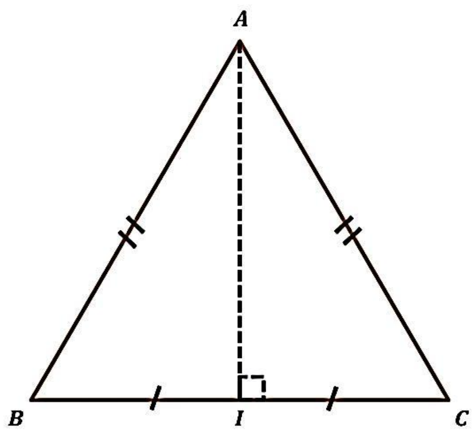
Il en résulte que $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$ sont perpendiculaires.

Exemple 7

ABC est un triangle isocèle en A.

Montrer que la médiane issue de A est aussi une médiatrice.

Solution



Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que (AI) est la médiatrice de $[BC]$, revient à montrer que ; $(AI) \perp (BC)$, qui revient à montrer que ;

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 0$$

On a ;

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})}\ \boxed{1}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}\ \boxed{2}$$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on a ;

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2}_{0}\right) = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = 0 \Longrightarrow (AI) \perp (BC)$$

Exemple 8

Que peut-on dire des points $A, B\ et\ C$ lorsque ;

$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$?

Solution

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 0$$

Les points $A, B\ et\ C$ sont soit confondus, soit alignés et A est le milieu de $[BC]$.

D°) L'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que ;

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

L'expression analytique du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par ;

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

Exercice

Montrer l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs.

Propriété

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = 0}$$

2°/ L'expression analytique de la norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit le vecteur ;

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

On a ; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple 9

Calculer le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

1°) $\vec{u}\begin{pmatrix}3,6\\-4,8\end{pmatrix}$, $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}-6,4\\-4,5\end{pmatrix}$

2°) $\vec{u}\begin{pmatrix}6,4\\4,8\end{pmatrix}$, $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$

3°) $\vec{u}\begin{pmatrix}-3,6\\-4,8\end{pmatrix}$, $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$

4°) $\vec{u}\begin{pmatrix}3,6\\0\end{pmatrix}$, $\quad\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-4,5\end{pmatrix}$

Solution

1°) $\vec{u}.\vec{v} = 3,6 \times (-6,4) + (-4,8) \times (-4,5)$

$$= -23,04 + 23,04 = 0$$

2°) $\vec{u}.\vec{v} = 6,4 \times 10 + 4,8 \times 0 = 64$

3°) $\vec{u}.\vec{v} = -3,6 \times 0 + (-4,8) \times (-10) = 48$

4°) $\vec{u}.\vec{v} = 3,6 \times 0 + 0 \times (-4,5) = 0 + 0 = 0$

Exemple 10

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points :

$A(2,4);\ B(-3,-1); C(4,-2); D(9,3)$

1° Démontrer que $ABCD$ est un losange ;

2° Evaluer $mes(\widehat{ABC})$, et $mes(\widehat{BAD})$ en degré.

Solution

1° $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-2\\-1-4\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\begin{pmatrix}\mathbf{-5}\\\mathbf{-5}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}4-9\\-2-3\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}\begin{pmatrix}\mathbf{-5}\\\mathbf{-5}\end{pmatrix}$

Donc ; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ d'où ; $ABCD$ est un parallélogramme.

On a d'autre part les diagonales (AC) et (BD) dirigées par ;

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\-2-4\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{-6}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}9-(-3)\\3-(-1)\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BD}}\begin{pmatrix}\mathbf{12}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}$

Sont perpendiculaires car ;

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 2 \times 12 + (-6) \times 4 = 24 - 24 = 0$$

$ABCD$ est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires, c'est donc un losange.

2° on a ; $\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{5}}, \overrightarrow{BC}\binom{4+3}{-2+1} \Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}\binom{\mathbf{7}}{\mathbf{-1}}$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 2\sqrt{5} = \|\overrightarrow{BC}\|$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 5 \times 7 + 5 \times (-1) = 30$$

$$\Longrightarrow \cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{30}{(5\sqrt{5})^2} = \frac{30}{125} = \frac{6}{25} = 0{,}24 \Longrightarrow \widehat{\boldsymbol{ABC}} \approx \mathbf{76}°$$

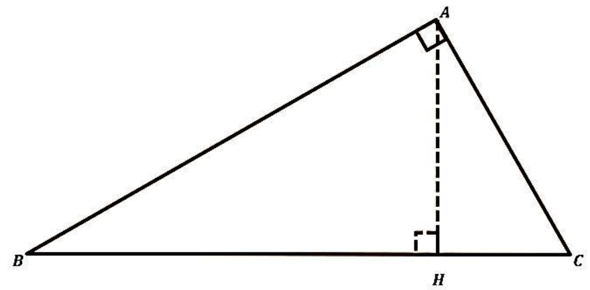
D'autre part, comme $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAD}$ sont deux angles voisins dans un parallélogramme, leur somme est donc égale à $180°$

Une mesure approximative de $\widehat{BAD}$ est donc ;

$$\widehat{\boldsymbol{BAD}} \approx \mathbf{180° - 76° \approx 104°}$$

3. Relations métriques dans le triangle

a) Relations caractéristiques du triangle rectangle



Relation 1

ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, si et seulement si $\boldsymbol{AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}}$.

Relation 2

ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$, si et seulement si $\boldsymbol{AH^2 = -\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}}$.

Exercice

Montrer les deux relations précédentes.

b) Théorème de la médiane

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit A et B deux points, et soit I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a ;

$$\begin{cases} \boldsymbol{MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}} \\ \boldsymbol{MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}} \\ \boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}} \end{cases}$$

Exercice

Démontrer les relations du théorème de la médiane.

Remarque

Les relations du théorème de la médiane s'appliquent aussi lorsqu'on a un triangle AMB, avec I milieu de $[AB]$.

c) Formule d'Al-Kashi (*Pythagore généralisé*)

Pour tous trois points non alignés A, B et C du plan $\mathcal{P}$ on a ;

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2}} \quad \boxed{1}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2}} \quad \boxed{2}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2}} \quad \boxed{3}$$

Exemple 11

ABC est un triangle dont les côtés mesurent ;

$$AB = 7; \quad BC = 9 \quad et \quad AC = 5$$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution

D'après la propriété d'*Al-Kashi* ;

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos\hat{A}$$

$$\Longrightarrow 9^2 = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\cos\hat{A}$$

$$\Longrightarrow 81 = 49 + 25 - 70\cos\hat{A}$$

$$\Longrightarrow 7 = -70\cos\hat{A} \Longrightarrow \cos\hat{A} = \frac{-7}{70} = -\frac{1}{10}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7 \times 5 \times -\frac{1}{10} = \frac{-35}{10}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3,5}$$

Exercice

1°/ Démontrer les formules d'Al-Kashi,

2°/ En utilisant la définition du produit scalaire et les formules d'Al-Kashi, montrer les égalités ;

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}} \quad \boxed{4}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{AC}^2}{2.\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}} \quad \boxed{5}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2.\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}} \quad \boxed{6}$$

Exemple 12

Soit A, B et C trois points tels que ;

$AB = 6, AC = 5, BC = 10.$

Calculer ; $\cos \hat{A}$, $\cos \hat{B}$, $\cos \hat{C}$.

Solution

$$\cos \hat{A} = \frac{5^2 + 6^2 - 10^2}{2 \times 6 \times 5} = \frac{25 + 36 - 100}{60} = \frac{-39}{60} = -\frac{13}{20}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{10^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times 10 \times 6} = \frac{100 + 36 - 25}{120} = \frac{111}{120} = \frac{37}{40}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{5^2 + 10^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 10} = \frac{25 + 100 - 36}{100} = \frac{89}{100}$$

Exemple 13

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;

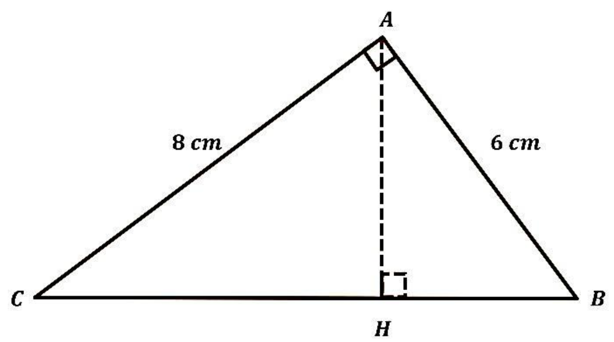
$AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1° Calculer AH, BH et CH

2° Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

3° Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

Solution



1° $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\| \times \cos \hat{B}$

$$= 6 \times 10 \times \cos \hat{B}$$

Or, on sait que ;

$$\cos \hat{B} = \frac{c.adjacent}{hypoténuse} = \frac{\overline{AH}}{\overline{BA}} = \frac{3,6}{6} = \frac{3}{5}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 6 \times 10 \times \frac{3}{5} = 60 \times 0,6 = 36$$

2° $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\| \times \cos \hat{C}$

$$= 8 \times 10 \times \cos \hat{C}$$

Or, on sait que ;

$$\cos \hat{C} = \frac{c.adjacent}{hypoténuse} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CA}} = \frac{6,4}{8} = \frac{4}{5}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 8 \times 10 \times \frac{4}{5} = 80 \times 0,8 = 64$$

3° $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A}$

$$= 8 \times 10 \times \cos 90° = 80 \times 0 = 0$$

4. Produit scalaire et relations trigonométriques

a) $\boldsymbol{sinus}$ de l'angle de deux vecteurs

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tel que $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Alors ; $\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}}) = \|\vec{\boldsymbol{u}}\| \times \|\vec{\boldsymbol{v}}\| \times \mathbf{sin}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})$

$$\Longrightarrow \mathbf{sin}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}}) = \frac{\mathbf{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})}{\|\vec{\boldsymbol{u}}\| \times \|\vec{\boldsymbol{v}}\|}$$

Exemple 14

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, calculer $\sin(\vec{u};\ \vec{v})$.

Solution

$$\sin(\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u};\ \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}}{\sqrt{4^2 + (-7)^2} \times \sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{41}{\sqrt{2\,210}}$$

b) Formules trigonométriques

a- Formules d'addition

Exercice

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique et M et N deux de points de $(\mathcal{C})$, on pose ;

$$a = \left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}}\right)\ ; b = \left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)$$

1° Faire une figure ;

2° Montrer que, pour tous nombres réels a et b :

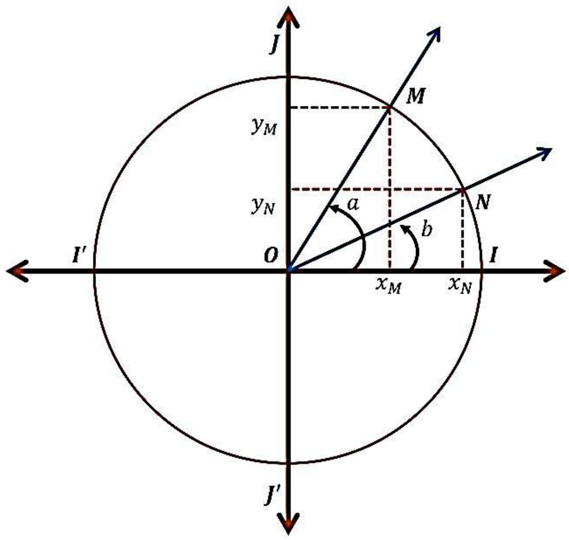
A/ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;

B/ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;

C/ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$;

D/ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Démonstrations



Les points M et N, étant les images respectives des nombres réels a et b sur le cercle trigonométrique,

On a ; $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{ON} = x_N\vec{\imath} + y_N\vec{\jmath}$

$$\cos a = \frac{y_M}{OM} = y_M \; ; \; \cos b = \frac{y_N}{ON} = y_N$$

$\Longrightarrow M\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

a et b sont des mesures respectives de $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{ON}}\right)$.

Donc $b-a$ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$.

Calculons de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$;

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}}\right)$

$$= OM.ON\cos(b-a) = 1\times 1\times\cos(b-a)$$

$$= 1\times 1\times\cos(b-a) = \cos(a-b)$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos(a-b)}\ \boxed{A}$$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = x_M x_n + y_M y_N$

$$= \begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix} = \cos a\cos b + \sin a \sin b.$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = \cos a\cos b + \sin a\sin b}\ \boxed{B}$$

$\boxed{A} = \boxed{B} \Longrightarrow$

$$\mathbf{\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b\ (1)}$$

En remplaçant b par $-b$ dans la formule (1) on obtient la formule (2), en effet ;

$$\cos\big(a-(-b)\big) = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b)$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b + \sin a(-\sin b)$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b\ (2)}$

Etablissons maintenant la formule (3).

Méthode 1

$$\sin(a-b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a-b)) = \cos\ (\left(\frac{\pi}{2}+b\right) - a)$$

$$= \cos\ (\frac{\pi}{2}+b)\cos\ a + \sin\ (\frac{\pi}{2}+b)\sin\ a$$

$$Or, \cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right) = -\sin b \quad et\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+b\right) = \cos b$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b\ (3)}$.

En remplaçant b par $-b$ dans la formule (3), on obtient la formule (4).

$$\sin\big(a-(-b)\big) = \sin a\cos(-b) - \cos a\sin(-b)$$

$$= \sin(a+b) = \sin a\cos b - \cos a\ (-\sin b)$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b\ (4)}$

Méthode 2

On a ; $\det\big(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\big) = \|\overrightarrow{OM}\|.\|\overrightarrow{ON}\|\sin(b-a)$

$$\Longrightarrow \det\big(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\big) = 1\times 1\times\sin(a-b)$$

$$\Longrightarrow \mathbf{\det\big(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\big) = \sin(a-b)}\ \boxed{A}$$

$$\det\big(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\big) = \begin{vmatrix}\cos a & \cos b\\ \sin a & \sin b\end{vmatrix}$$

$$\mathbf{\det\big(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{ON}\big) = \cos a\sin b - \sin a\cos b}\ \boxed{B}$$

$\boxed{A} = \boxed{B} \Longrightarrow$

$$\mathbf{\sin(a-b) = \cos a\sin b - \sin a\cos b}\ \boxed{3}$$

En remplaçant b par $-b$ dans la formule (3), on obtient la formule (4).

b- Formules de duplication

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\Longrightarrow \cos(\alpha+\alpha) = \cos(2\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$\mathbf{\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha}$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\Longrightarrow \sin(\alpha+\alpha) = \sin(2\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Exemple 15

En utilisant les formules de duplication, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$; $\cos\frac{\pi}{8}$; $\sin\frac{\pi}{8}$

Solution

Méthode 1

☒ $\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)$

$$= cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos^2\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{\pi}{12} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ cos^2\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{\pi}{12} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2cos^2\frac{\pi}{12} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}}$$

$$\Rightarrow sin\ \frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \boldsymbol{sin\ \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}}$$

Méthode 2

$$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{12}\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\sin\frac{\pi}{12}\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{12}\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{12} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \boxed{1} \\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}}\ \boxed{2} \end{cases}$$

En remplaçant par $\boxed{2}$ dans $\boxed{1}$, on a ;

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4\sin\frac{\pi}{12}}\right)^2 - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{16\sin^2\frac{\pi}{12}} - sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

En multipliant l'équation par $16\sin^2\frac{\pi}{12}$ on a ;

$$\Rightarrow 1 - 16sin^4\frac{\pi}{12} = 8\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow 16sin^4\frac{\pi}{12} + 8\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi}{12} - 1 = 0$$

Posons $X = \sin^2\frac{\pi}{12}$

$$\Rightarrow 16X^2 + 8\sqrt{3}X - 1 = 0$$

$$\Delta = \left(8\sqrt{3}\right)^2 + 64 = 256 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 16$$

$$X_1 = \frac{-8\sqrt{3} - 16}{32} < 0\ (rejetée)$$

$$X_2 = \frac{-8\sqrt{3} + 16}{32} > 0\ (retenue)$$

$\sin^2\frac{\pi}{12}$ étant supérieur à 0.

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \mathbf{sin}\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}}$$

Méthode 1

☒ $\mathbf{cos}\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} = \mathbf{cos}\left(\mathbf{2}\times\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}\right)$

$$= cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{\pi}{8} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ cos^2\frac{\pi}{8} + sin^2\frac{\pi}{8} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2cos^2\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{cos}\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}}$$

$$\Rightarrow sin\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow \boldsymbol{sin\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}$$

Méthode 2

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\frac{\pi}{8}\ \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\frac{\pi}{8}\ \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\frac{\pi}{8}\ \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2\frac{\pi}{8} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \boxed{\mathbf{1}} \\ \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\pi}{8}}\ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases}$$

En remplaçant par $\boxed{\mathbf{2}}$ dans $\boxed{\mathbf{1}}$, on a ;

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\pi}{8}}\right)^2 - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{16\sin^2\frac{\pi}{8}} - sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En multipliant l'équation par $16\sin^2\frac{\pi}{8}$ on a ;

$$\Rightarrow 2 - 16sin^4\frac{\pi}{8} = 8\sqrt{2}\sin^2\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow 16sin^4\frac{\pi}{8} + 8\sqrt{2}\sin^2\frac{\pi}{8} - 2 = 0$$

Posons $X = \sin^2\frac{\pi}{8}$

$$\Rightarrow 16X^2 + 8\sqrt{2}X - 2 = 0$$

$$\Delta = \left(8\sqrt{2}\right)^2 + 128 = 256 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 16$$

$$X_1 = \frac{-8\sqrt{2} - 16}{32} < 0\ (rejetée)$$

$$X_2 = \frac{-8\sqrt{2}+16}{32} > 0\ (retenue)$$

$\sin^2\frac{\pi}{8}$ étant supérieur à 0.

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow \boldsymbol{\sin\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2-\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}}$$

5. Complément de cours sur les relations métriques

a) Application aux aires du triangle

Soit ABC un triangle tel que ;

$$AB = c, \qquad AC = b, \qquad BC = a$$

1- L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{Base \times Hauteur}{2}$$

Avec la relation d'*Al-Kashi* appliquée au triangle, on a aussi ;

2- La formule des aires

$$\boldsymbol{\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}b.c.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}c.a.\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}a.b.\sin\widehat{C}}$$

On en déduit que ;

3- La formule des sinus

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Exemple 16

Soit ABC un triangle non aplati tel que $AB = c = 8$, $AC = b = 4$, $\sin\hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{7}$,

1°/ Calculer $\sin\hat{C}$, en déduire les valeurs des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$, puis $\hat{A}$, $\sin\hat{A}$ et $BC = a$

2°/ Calculer de trois façons l'aire du triangle ABC.

Solution

$$1°/\ \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Longrightarrow \frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{7}} = \frac{8}{\sin\hat{C}} \Longrightarrow \sin\hat{C} = \frac{8\sqrt{5}}{7} \div 4 = \frac{8\sqrt{5}}{7} \times \frac{1}{4} \Longrightarrow \boldsymbol{\sin\widehat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{7} \approx 0.64}$$

$$\sin\hat{B} = \frac{\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \hat{A} = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \boldsymbol{\widehat{B} \approx 18.63°}$$

$$\sin\hat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \hat{C} = \arcsin\frac{2\sqrt{5}}{7} \Longrightarrow \boldsymbol{\widehat{C} \approx 39.71°}$$

$\hat{A} \approx 180° - (18.63° + 39.71°) \approx 180° - 58.34° \Longrightarrow \boldsymbol{\hat{A} \approx 121.66°} \Longrightarrow \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\hat{A}} \approx \mathbf{0.85}$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Longrightarrow \frac{a}{0.85} = \frac{4}{\frac{\sqrt{5}}{7}} \Longrightarrow a = \frac{4 \times 0.85 \times 7}{\sqrt{5}} = \frac{23{,}8}{\sqrt{5}} \Longrightarrow \boldsymbol{a = 10.64}$$

2°/ $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} b.c.\sin \hat{A} = \frac{1}{2} c.a.\sin \hat{B} = \frac{1}{2} a.b.\sin \hat{C}$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} b.c.\sin \hat{A} \approx \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times 0.85 \approx \mathbf{13.6}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} c.a.\sin \hat{B} \approx \frac{1}{2} \times 8 \times 10.64 \times 0.32 \approx \mathbf{13.61}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} a.b.\sin \hat{C} \approx \frac{1}{2} \times 10.64 \times 4 \times 0.64 \approx \mathbf{13.62}$$

4- Expression du sinus en fonction du périmètre et des côtés d'un triangle et formule de Héron

Soit ABC un triangle non aplati, tel que ; $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$, on a ;

$$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\hat{A}} = \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{bc}} \sqrt{\boldsymbol{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}_{ABC}} = \sqrt{\boldsymbol{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

(Où p est le demi-périmètre)

Exemple 17

Soit ABC un triangle non aplati tel que $AB = c = 13$, $AC = b = 9$ et $BC = a = 5$

1°/ Calculer $\sin \hat{A}$, $\sin \hat{B}$, $\sin \hat{C}$ puis en déduire $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$;

2°/ Calculer l'aire du triangle ABC.

Solution

1°/ $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+9+13}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5$

$$\sin \hat{A} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{13 \times 9}\sqrt{13{,}5(13{,}5-5)(13{,}5-9)(13{,}5-13)}$$

$$= \frac{2}{117}\sqrt{13{,}5 \times 8{,}5 \times 4{,}5 \times 0{,}5} = \frac{2}{117}\sqrt{258.1875} \approx \frac{2 \times 16.06}{117} \approx \frac{32.12}{117} \approx \mathbf{0.27}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{13 \times 5}\sqrt{258.1875}$$

$$= \frac{2\sqrt{258.1875}}{65} \approx \frac{32.12}{65} \approx \mathbf{0.49}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{9 \times 5}\sqrt{258.1875}$$

$$= \frac{2\sqrt{258.1875}}{45} \approx \frac{32.12}{45} \approx \mathbf{0.71}$$

$$\sin \hat{A} \approx 0.27 \Longrightarrow \hat{A} \approx \arcsin 0.27 \approx \mathbf{15.66}°$$

$$\sin \hat{B} \approx 0.49 \Longrightarrow \hat{B} \approx \arcsin 0.49 \approx \mathbf{29.34}°$$

$\sin \hat{C} \approx \mathbf{0.71} \Longrightarrow \hat{C} \approx \arcsin \mathbf{0.71} \approx 180° - 45.23° \approx \mathbf{134.77}°$ (*L'angle $\hat{C}$ étant obtus*)

Vérification : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 15.66° + 29.34° + 134.77° = \mathbf{179.77}° \approx \mathbf{180}°$

2°/ $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\sqrt{13{,}5(13{,}5-5)(13{,}5-9)(13{,}5-13)}$

$$\sqrt{13{,}5 \times 8{,}5 \times 4{,}5 \times 0{,}5} = \sqrt{258.1875} \approx \mathbf{16.06}$$

b) Equation de cercle dans un repère orthonormé

1- Equation d'un cercle par l'utilisation du produit scalaire

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$

On a déjà vu dans le chapitre du calcul vectoriel et de la géométrie analytique, que le cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon R est l'ensemble des points équidistants de A.

Pour tout point $M(x, y) \in \mathcal{C}$ on a :

$$\mathcal{C} : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A})^2 = \boldsymbol{R}^2$$

L'équation cartésienne peut aussi être calculée par le produit scalaire.

$[AB]$ étant un diamètre du cercle $\mathcal{C}$, pour tout point $M \in \mathcal{C}$, on a ;

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_A})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_B}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_A})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_B}) = \mathbf{0}$$

Exemple 18

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux points $A(4; 7)$ et $B(-5; 3)$.

Donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Solution

Pour tout point $M(x; y)$ de $\mathcal{C}$, on a : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ perpendiculaire donc $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x+5 \\ y-3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow (x-4)(x+5) + (y-7)(y-3) = 0$$

$$\Longrightarrow x^2 + x - 20 + y^2 - 10y + 21 = 0$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}} :\ \boldsymbol{x^2 + x + y^2 - 10y - 1 = 0}$$

2- Equation d'un cercle à partir des extrémités d'un diamètre

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soient deux points ; $A(a, b)$; $B(a', b')$ et soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

Soit I le milieu de $[AB]$, I est le centre du cercle $(\mathcal{C})$, et pour tout point $M(x, y) \in (\mathcal{C})$, on a ;

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_I})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_I})^2 = \boldsymbol{R}^2$$

Exemple 19

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux points $A(-9;10)$ et $B(7;4)$.

Donner l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Solution

Soit le I centre du cercle $\mathcal{C}$, on a ; $I = A * B$.

$$\Rightarrow \mathcal{C}:\ \left(x - \frac{-9+7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{10+4}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}:\ (x+1)^2 + (y-7)^2 = \left(\frac{\sqrt{292}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}:\ (x+1)^2 + (y-7)^2 = \frac{292}{4} \Rightarrow \mathcal{C}:\ (x+1)^2 + (y-7)^2 = 73$$

$$\mathcal{C}:\ x^2 + 2x + 1 + y^2 - 14y + 49 = 73$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}:\ x^2 + 2x + y^2 - 14y - 23 = 0}$$

c) Equation d'une droite dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Pour tout point $M(x,y) \in (\mathcal{D})$, on a ;

$$\boldsymbol{(\mathcal{D}) : a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0}$$

Exemple 20

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(4,-7)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$.

Donner l'équation cartésienne de $(\mathcal{D})$.

Solution

Pour tout point $M(x,y) \in (\mathcal{D})$, on a ;

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y-7\end{pmatrix}.\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -3(x-4) + 5(y+7) = 0$$

$$\Rightarrow -3x + 12 + 5y + 35 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{(\mathcal{D}) : 3x - 5y - 47 = 0}$$

d) Distance d'un point à une droite dans un repère orthonormé

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit (Δ) la droite d'équation cartésienne ;

$ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est le vecteur normal à (Δ), soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et soit A' le projeté orthogonal de A sur (Δ).

La distance de A à (Δ) est notée ;

$$d(A;\ \Delta) = AA' \Longrightarrow \boldsymbol{AA'} = \frac{|\boldsymbol{ax_0 + by_0 + c}|}{\sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}}$$

Exemple 21

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit (Δ) la droite d'équation cartésienne ;

$5x - 3y + 4 = 0$, le vecteur $\vec{n}\binom{7}{-6}$ est le vecteur normal à (Δ), soit $A(1, 2)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et soit A' le projeté orthogonal de A sur (Δ).

Calculer $d(A;\ \Delta)$ la distance de A à (Δ).

Solution

$$d(A;\ \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5 \times 1 - 3 \times 2 + 4|}{\sqrt{7^2 + (-6)^2}}$$

$$= \frac{|3|}{\sqrt{85}} \Longrightarrow \boldsymbol{d(A;\ \Delta)} = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{85}}}$$

e) Produit scalaire et lieu géométrique

Notion de lignes de niveau

Soit f une application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ et k un réel.

On appelle ligne de niveau k de l'application f l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$.

On note en général L_k la ligne de niveau k ; ainsi :

$$L_k = \{M \in \mathcal{P} / f(M) = k\}$$

Exemple

1° Soit O un point fixé et ;

$$\boldsymbol{f} \quad : \boldsymbol{\mathcal{P}} \longmapsto \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{M} \longmapsto \boldsymbol{OM}$$

La ligne de niveau 4 est l'ensemble des points M tels que $OM = 4$: il s'agit donc du cercle de centre O et de rayon 4.

2° Préciser la ligne de niveau k selon que l'on a ;

$$k > 0 : \qquad k = 0 ; \qquad k < 0$$

Si $k > 0 \Longrightarrow$ l'ensemble M est le cercle de centre O et de rayon k, si $k = 0 \Longrightarrow$ l'ensemble $M = O$, si $k < 0 \Longrightarrow$ l'ensemble $M = \phi$.

Exercices généraux

Formule d'Al-Kashi appliquée au triangle

Exercice 1

Soit ABC un triangle. On pose ;

$$BC = a, CA = b, AB = c.$$

Les longueurs $a, b\ et\ c$ sont ceux des côtés opposés respectivement aux angles ; $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$.

Montrer que l'on a ;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\hat{C}$$

Exercice 2

Soit ABC un triangle non aplati tel que ;

$AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$

1° Donner l'expression de $\cos\hat{A}$ en fonction des longueurs des côtés.

2° En déduire des expressions analogues pour $\cos\hat{B}$ et $\cos\hat{C}$.

Exercice 3

Soit A, B et C trois points tels que ;

$AB = 7$, $AC = 12$, $BC = 8$.

Calculer ; $\cos\hat{A}$, $\cos\hat{B}$, $\cos\hat{C}$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;

$AB = 13\ cm$, $AC = 9\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1° Calculer AH, BH et CH

2° Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

3° Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?

Exercice 5

ABC est un triangle tel que ; $AB = 8\ cm$, $AC = 12\ cm$ et $\hat{A} = 30°$

1° Calculer la mesure du côté BC ;

2° Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, quelle est la nature du triangle OBC ?

3° En déduire la mesure du rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 6

ABC est un triangle tel que ;

$$AB = 6cm, \qquad AC = 10cm, \qquad BC = 12cm$$

Calculer les mesures des angles de ce triangle

Exercice 7

Déterminer les angles $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ dans chacun des cas suivants :

1°) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}$

2°) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\sqrt{3}\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix}$

3°) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

4°) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

Exercice 8

Soit ABC un triangle tel que $AB = 9cm, AC = 13cm, BC = 15cm$.

1° Calculer $\sin\hat{A}\,;\ \sin\hat{B}\,;\ \sin\hat{C}$.

2° Calculer de trois façons l'aire du triangle ABC.

Expression du sinus en fonction du périmètre et des côtés d'un triangle et formule de Héron

Exercice 9

Soit ABC un triangle tels que ;

$AB = 7, AC = 9\,, BC = 14$

Calculer $\sin\hat{A}$ puis aire ABC.

Exercice 10

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne la droite $(\mathcal{D})$ d'équation ;

$(\mathcal{D}) : 5x - 4y + 7 = 0$ et le point $A(-3,2\ )$

Calculer $d(\mathcal{D};\ A)$.

Positions relatives de droites et de cercles

Exercice 11

Etudier les positions relatives du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\mathcal{D})$ dans chacun des cas suivants, puis déterminer les points d'intersection éventuels.

1°) $(\mathcal{D}) : 3x + 4y - 25 = 0$, et $\mathcal{C}(O; 5)$

2°) $(\mathcal{D}) : 2x + 3y - 5 = 0$, et $\mathcal{C}(I(-1,1); 3)$

3°) $(\mathcal{D}) : x + 3y - 10 = 0$, et $\mathcal{C}(I(1,3); 2)$

Perpendicularité de deux droites

Exercice 12

Soit un carré $ABCD$ et soit I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

1° Faire une figure ;

2° Montrer par trois méthodes que $(DI) \perp (AJ)$.

Exercice 13

Le triangle OAB est rectangle en O. H est le projeté orthogonal de O sur (AB).

Une droite $(\mathcal{D})$ passant par A coupe (OH) en M et le cercle de diamètre $[AB]$ en N.

1° Faire une figure ;

2° Montrer que $AO^2 = AM.AN$.

Exercice 14

OAB est un triangle isocèle en O.

C et D appartiennent respectivement à $[AO]$, $[OB]$ tels que $OC = OD$.

1° Faire une figure ;

2° Montrer que la médiane issue de O dans le triangle OBC est une hauteur issue de O dans OAD.

Exercice 15

ABC est un triangle tel que les médianes issues de B et de C sont perpendiculaires ;

1° Faire une figure ;

2° Montrer que ; $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

Produit scalaire et barycentre

Exercice 16

Soit ABC un triangle tel que ;

$AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$.

1° Construire le point $R = bar$

A	B
2	-1

2° Calculer CR ;

3° a) D est le point tel que R soit le centre de gravité de ACD, construire D ;

b) La parallèle à (AC) passant par B coupe la parallèle à (AD) passant par R en S, construire S ;

Déterminer les réels a, b et c tels que ;

$S = bar$

A	B	C
a	b	c

Exercice 17

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit la droite $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(2, -3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\binom{1}{4}$.

1° Donner une équation de $(\mathcal{D})$;

2° Représenter $(\mathcal{D})$.

Equation d'un cercle à partir des extrémités d'un diamètre

Exercice 18

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(3,-2)$ et $B(-5,8)$.

Calculer par deux méthodes l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

Equation de médiatrice

La médiatrice du segment $[AB]$ de milieu I est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{AB}$ est le vecteur normal de la médiatrice.

Exercice 19

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(3,-4)$ et $B(-7,2)$.

Calculer l'équation cartésienne de la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.

Equation de hauteur

Dans le triangle ABC, le support de la hauteur issue de A, est l'ensemble des points M tels que ;

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$$

Exercice 20

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(5,2)$, $B(-8,7)$ et $C(-3,1)$

Calculer l'équation cartésienne du support (d) de la hauteur issue de A.

Droite d'Euler

Exercice 21

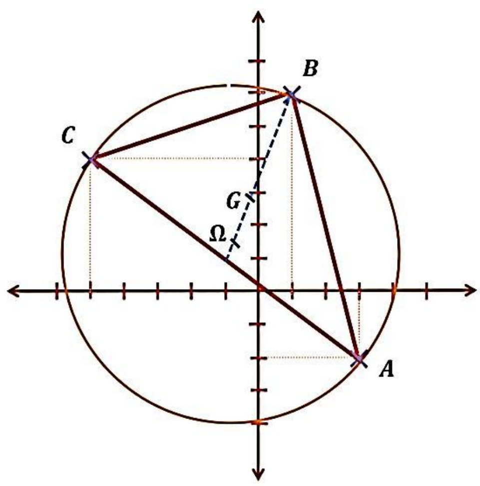
Dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les points $A(-5,6)$, $B(4,3)$, $C(3,-4)$.

1° Déterminer les coordonnées des points G, H et Ω respectivement, centre de gravité, orthocentre et centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Vérifier que G, H et Ω sont alignés (*cette droite s'appelle la droite d'Euler*).

3° Ecrire une équation de la droite d'*Euler* relative à ce triangle.

Exercice 22



1° A partir de la figure ci-dessus, donner des mesures approchées à un degré près des angles du triangle ABC.

2° Ecrire une équation du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.

Equations trigonométriques

1° Type : $\sin x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$\mathbf{1)}$ $\sqrt{3}\sin x = \dfrac{3}{2}$

$\mathbf{2)}$ $3\sin 2x = 0$

$\mathbf{3)}$ $5\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{75}{4}}$

2° Type : $\cos x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$

Exercice 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$\mathbf{1)}$ $4\cos x = \sqrt{12}$

$\mathbf{2)}$ $10\cos(5x) = 5$

$\mathbf{3)}$ $4\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{8}$

3° Type : $a\cos x + b\sin x = c$

Exercice 25

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$\mathbf{1)}$ $\sqrt{12}\cos x + 2\sin x = 2$

$\mathbf{2)}$ $4\cos x - 4\sin x = 4$

$\mathbf{3)}$ $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -1$

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$\mathbf{1)}$ $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\mathbf{2)}$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4° Type : $\tan x = a$

Exercice 27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ;

1) $\tan x = \sqrt{3}$

2) $-2\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$

3) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = -1$

5° Types : $\cos^2 x = a$; $\sin^2 x = a$; $\tan^2 x = a$

Exercice 28

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos^2 x = 1$

2) $4\sin^2(x + \pi) = 3$

3) $9\tan^2\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right) = 3$

6° Types : $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$;

$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$

$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0.$

Exercice 29

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$

2) $\sin^2(x - 3\pi) + 2\sin(x - 3\pi) - 4 = 0$

3) $\tan^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) + (1 - \sqrt{3})\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$

Exercice 30

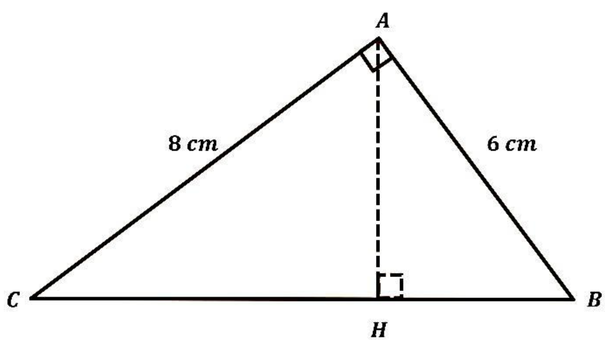
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ;

$AB = 6\ cm$, $AC = 8\ cm$, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

1° Calculer AH, BH et CH

2° Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

3° Que vaut $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et pourquoi ?



Exercice 31

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points ;

$A(2,3)$; $B(-1,2)$ et $C(0,-1)$

1° Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2° Montrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

3° Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{BC}\|$.

4° Représenter $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 32

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les deux vecteurs $\vec{u}\binom{-5}{3}$ et $\vec{v}\binom{4}{2}$.

Calculer $\sin(\vec{u};\ \vec{v})$.

Exercice 33

En utilisant les formules d'addition, calculer ;

$$\cos\frac{7\pi}{12}\ \ et\ \ \sin\frac{7\pi}{12}\ ;\ \cos\frac{\pi}{12}\ \ et\ \ \sin\frac{\pi}{12}$$

Exercice 34

En utilisant les formules de duplication, calculer ;

$$\text{Calculer}\ \cos\frac{\pi}{12}\ ;\ \sin\frac{\pi}{12}\ ;\ \cos\frac{\pi}{8}\ ;\ \sin\frac{\pi}{8}$$

Exercice 35

$ABCD$ est un carré de centre O. M est un point de la diagonale $[BD]$ qui se projette orthogonalement sur $[AB]$ en P, et sur $[AD]$ en Q.

1° Faire une figure

2° Montrer que le triangle OPQ est isocèle rectangle en O.

Exercice 36

ABC est un triangle rectangle en A non isocèle.

H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

P et Q sont les projetés orthogonaux de H sur $[AB]$ et $[AC]$, A' est le milieu de $[BC]$.

1° Faire une figure

2° Montrer que $(AA') \perp (PQ)$.

Exercice 37

ABC est un triangle.

A l'extérieur de ce triangle, on construit deux carrés, $ABDE$ et $ACFG$.

Soit I le milieu de $[BC]$.

1° Faire une figure

2° Montrer que $(AI) \perp (GE)$.

Exercice 38

$ABCD$ est un carré de côté $12\ cm$. M est un point de $[AB]$ tel que ; $AM = 5\ cm$, N est un point de $[AD]$ tel que ; $DN = 9\ cm$.

1° Faire une figure

2° Calculer $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MN}$, le triangle CMN est-il rectangle en M ?

Exercice 39

Dans le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit les points $A(-2\ ;\ -1)$, $B(-1;\ -4)$ et $C(4;\ 1)$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en A :

1° En calculant AB^2, BC^2 et CA^2 et en utilisant le théorème de Pythagore.

2° En appliquant le produit scalaire de deux vecteurs.

Exercice 40

Soit les points ;

$$P(-3,-4);\ Q(3,2);\ R\left(-3\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}-1\right).$$

1° Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

Soit S le projeté orthogonal de P sur $[QR]$;

2° Calculer $\overrightarrow{QS}$, puis $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PS}$ et $\overrightarrow{QR}.\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{PS}.\overrightarrow{QR}$.

Exercice 41

1° Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$\cos 5x = \cos x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$$

Et

$$1 - \cos 5x = (1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2$$

2° a/ En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation ; $4x^2 + 2x - 1 = 0$

b/ Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{30}$

Exercice 42

1° Montrer que ;

$$16\sin\frac{\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}.\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24} = 1$$

2° Soit ;

$$a = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}\ ;$$

$b = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$;

A/ Calculer $a + b$; $a - b$;

B/ En déduire les valeurs de a et b.

Exercice 43

1° Déterminer le centre et le rayon de chacun des cercles définis par les équations suivantes :

$$(\mathcal{C}_1) : x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$$

$$(\mathcal{C}_2) : x^2 + y^2 - x - 6y + \frac{1}{4} = 0$$

2° Quelle est la position relative de ces deux cercles ?

Expressions du produit scalaire

Exercice 44

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = -2$

Calculer $(2\vec{u} + 3\vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$.

Déterminer un réel x tel que : $(2\vec{u} + x\vec{v})$ soit orthogonal à $\vec{u} - \vec{v}$.

Exercice 45

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 5$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{3}$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

On pose $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$ et $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$.

a) Calculer $\vec{w}.\vec{t}$, $\|\vec{w}\|$ et $\|\vec{t}\|$.

b) Vérifier que $\cos(\vec{w} ; \vec{t}) = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

Exercice 46

Dans une base orthonormé $(\vec{i} ; \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$.

Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

A-t-on $\vec{u} \perp \vec{v}$?

Déterminer le réel a tel que le vecteur $\vec{w} = \vec{i} + a\vec{j}$ soit orthogonal à $\vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 47

1) Soient A, B et C des points. Démontrer que, pour tout point M du plan :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

2) Soit ABC un triangle. On note H le point d'intersection des hauteurs issues de A et B.

A l'aide de la relation du 1), démontrer que la hauteur issue de C passe aussi par H.

Exercice 48

On considère les triangles rectangles isocèles de la figure ci-dessous.

Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$.

En déduire que : $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$ = 0.

Soit I le milieu de [BE]. Démontrer à l'aide du 2) que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

Exercice 49

Soit ABC un triangle. On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Démontre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AC^2 - \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}$.

En déduire que le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $AC^2 = CH \times CB$ et les vecteurs sont de même sens.

Exercice 50

Soit ABC un triangle d'orthocentre H.

On note A', B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C.

Démontrer que : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{HC'}$.

Exercice 51

Soit A et B deux points du plan tels que

AB = 2.

a) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 3$.

b) Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -3$

2) *Généralisation*

Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel. On note D $_k$ l’ensemble des points M du plan tels que $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM}$ = k. Démontrer que, pour tout réel k, l’ensemble D $_k$ est une droite de vecteur normal $\vec{u}$.

Exercice 52

Soit A, B, C, D des points. On note I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD].

Démontrer que :

$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$.

Indication : on pourra utiliser plusieurs fois le théorème de la médiane.

2) En déduire qu’un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, la somme des carrés de ses côtés est égale à la somme des carrés de ses diagonale.

Lignes de niveau

Exercice 53

A et B sont deux points distincts du plan ;

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer l’ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = k$:

(c’est -à- dire la ligne de niveau k)

de l’application du plan dans $\mathbf{R}$: $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$).

a) k = $2a^2$:

b) k = $4a^2$;

c) k = $-a^2$.

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer l’ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ (c’est -à- dire la ligne de niveau k de l’application du plan dans $\mathbf{R}$: $M \mapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$:

a) k = a^2 :

b) k = $-2a^2$;

c) k = $-a^2$.

Exercice 54

ABC sont trois points non alignés du plan ;

Dans chacun des cas suivants, déterminer l’ensemble des points M du plan vérifiant l’égalité proposée.

Etude de configurations classiques

Exercice 55

ABCD est un carré, I est le milieu du côté [AB] et J celui du côté [BC].

Montrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

Exercice 56

ABC est un triangle tel que les médianes issues de B et de C soient perpendiculaires.

Montrer que : $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Exercice 57

C est un cercle, de centre O et de rayon R.

M est un point du plan. Une droite passant par M coupe C en deux points P et Q.

1) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = OM^2 - R^2$

(On pourra faire intervenir le point P' de C diamétralement opposé à P).

Le produit scalaire $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ}$ est indépendant de la sécante choisie, il ne dépend que des points M, O, et du réel R ; on l'appelle puissance du point M par rapport au cercle C et on note ici ce réel :

P(M, C).

2) Etudier le signe de P(M, C) suivant la position de M par rapport au cercle C .

3) C' et un cercle, de rayon R' et de centre un point O' distinct de O.

a) Déterminer l'ensemble Δ des points du plan ayant la même puissance par rapport à C et C' .

b) Tracer Δ lorsque C et C' sont s sécants.