XIII- FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES USUELLES

Faire savoir

Le cours

1. Les fonctions circulaires

1°/ La fonction $f(x) = \sin x$

a) Domaine de définition

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Domaine d'étude

a- Périodicité

La fonction f a pour période 2π c'est-à-dire que ; $\forall\ x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x$.

b- Parité

La fonction f est impaire car,

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

Compte-tenu de **a-** et **b-**, le domaine d'étude de f est l'intervalle $[0;\ \pi]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O. On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ;

$$\vec{u}_k \binom{2k\pi}{0}\ tel\ k \in \mathbb{Z}$$

c) Variations

a- Croissance et décroissance

Si $0 \leq a \leq b \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin a \leq \sin b$

$\Rightarrow f$ est $\nearrow$ sur $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$

Si $\dfrac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \pi \Rightarrow \sin a \geq \sin b$

$\Rightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$

b- Tableau de variation sur $[0;\ \pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c- Extrémums

Du fait que $-1 \leq \sin x \leq 1$, la fonction f admet un minimum $m = -1$ et un maximum $M = 1$.

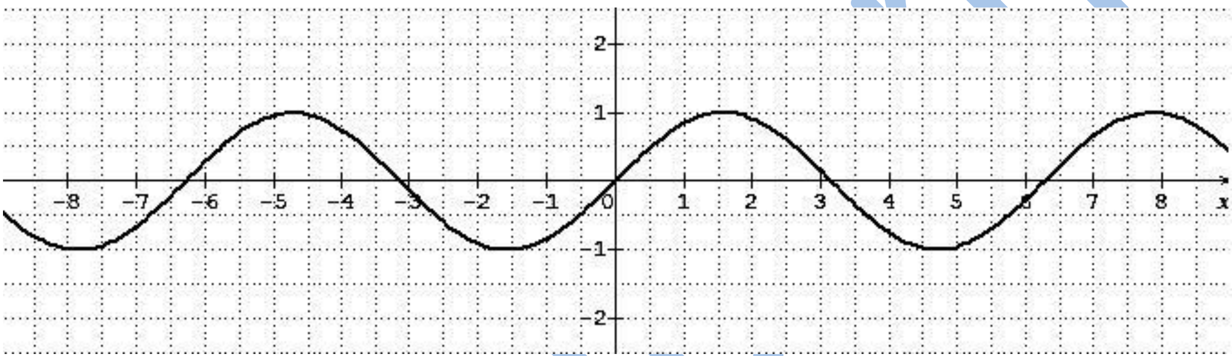
d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

b- Courbe de f

On peut tracer la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de $\sin x$, point par point sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et obtenir à la figure suivante.



2°/ La fonction $f(x) = \cos x$

a) Domaine de définition

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Domaine d'étude

a- Périodicité

La fonction f a pour période 2π c'est-à-dire que $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x$.

b- Parité

La fonction f est paire car,

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

Compte-tenu de **a-** et **b-**, le domaine d'étude de f est l'intervalle $[0;\ \pi]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O. On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ;

$$\vec{u}_k \binom{2k\pi}{0} \; tel \; k \in \mathbb{Z}$$

c) Variations

a- Croissance et décroissance

Si $0 \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos a \geq \cos b$

$\Longrightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Si $\frac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \pi \Longrightarrow \cos a \geq \cos b$

$\Longrightarrow f$ est $\searrow$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

b- Tableau de variation sur $[0; \pi]$

x	0	π
$f(x)$	0 $\searrow$	-1

c- Extrémums

Du fait que $-1 \leq \cos x \leq 1$, la fonction f admet un minimum $m = -1$ et un maximum $M = 1$.

d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

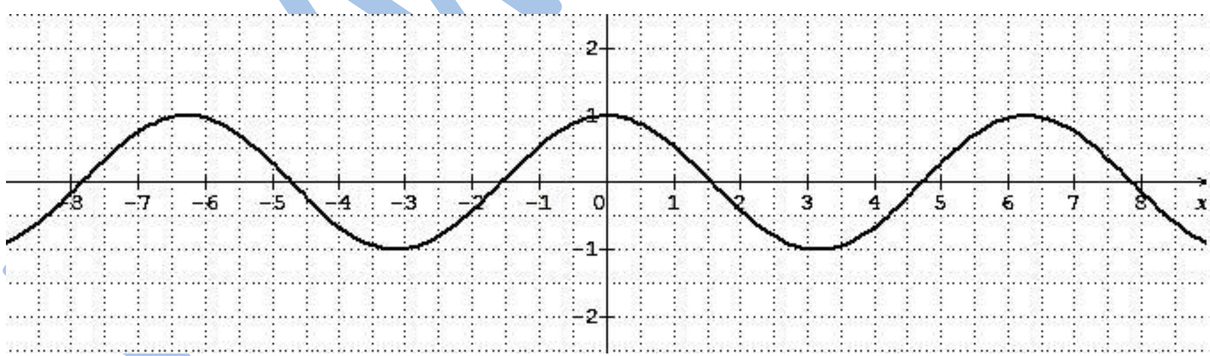
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1

b- Courbe de f

On peut tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de $\cos x$, point par point sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et obtenir à la figure suivante.

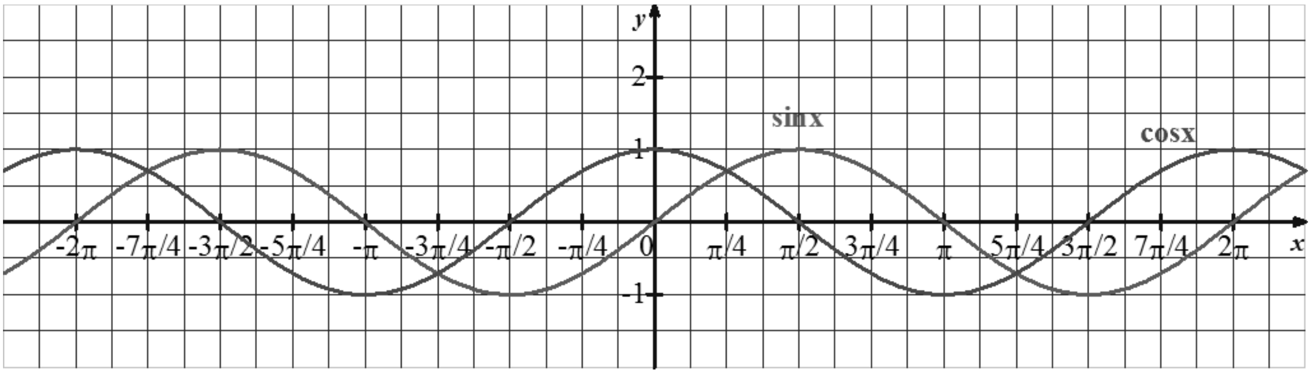
On peut démontrer que la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$.

Donc $(\mathcal{C}')$ est une sinusoïde.



Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions périodiques de période 2π comme nous l'avons vu.

Pour vérifier que les deux courbes correspondent à une sinusoïde, on peut représenter graphiquement leurs courbes sur un même graphique et les comparer.



3°/ La fonction $f(x) = \tan x$

a) Domaine de définition

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction f est définie pour $\cos x \neq 0$; c'est-à-dire si

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{tel que k} \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{tel que } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Domaine d'étude

a- Périodicité

La fonction f a pour période π c'est-à-dire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x+\pi) = \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}$$

$$= \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = f(x)$$

b- Parité

La fonction f est impaire car,

$$f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = -\tan x = -f(x)$$

Compte-tenu de **a-** et **b-**, le domaine d'étude de f est l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On étudie f sur la moitié de sa période, puis, on complète son graphique sur sa période en opérant par symétrie par rapport à O. On obtient ensuite toute la courbe en procédant à la reproduction de la courbe obtenue, ou par translations répétitives de vecteurs ;

$$\vec{u}_k \begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix} \; tel \; k \in \mathbb{Z}$$

c) Variations

a- Croissance et décroissance

Si $0 \leq a \leq b \leq \dfrac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow 0 \leq \sin a \leq \sin b$, et $\cos a \geq \cos b$

$0 \leq \dfrac{1}{\cos a} \leq \dfrac{1}{\cos b} \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{\sin a}{\cos a} \leq \dfrac{\cos b}{\cos b}$

$\Longrightarrow 0 \leq \tan a \leq \tan b \Longrightarrow f$ est $\nearrow$ sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

b- Tableau de variation sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$0 \nearrow$	$+\infty$ $\|$

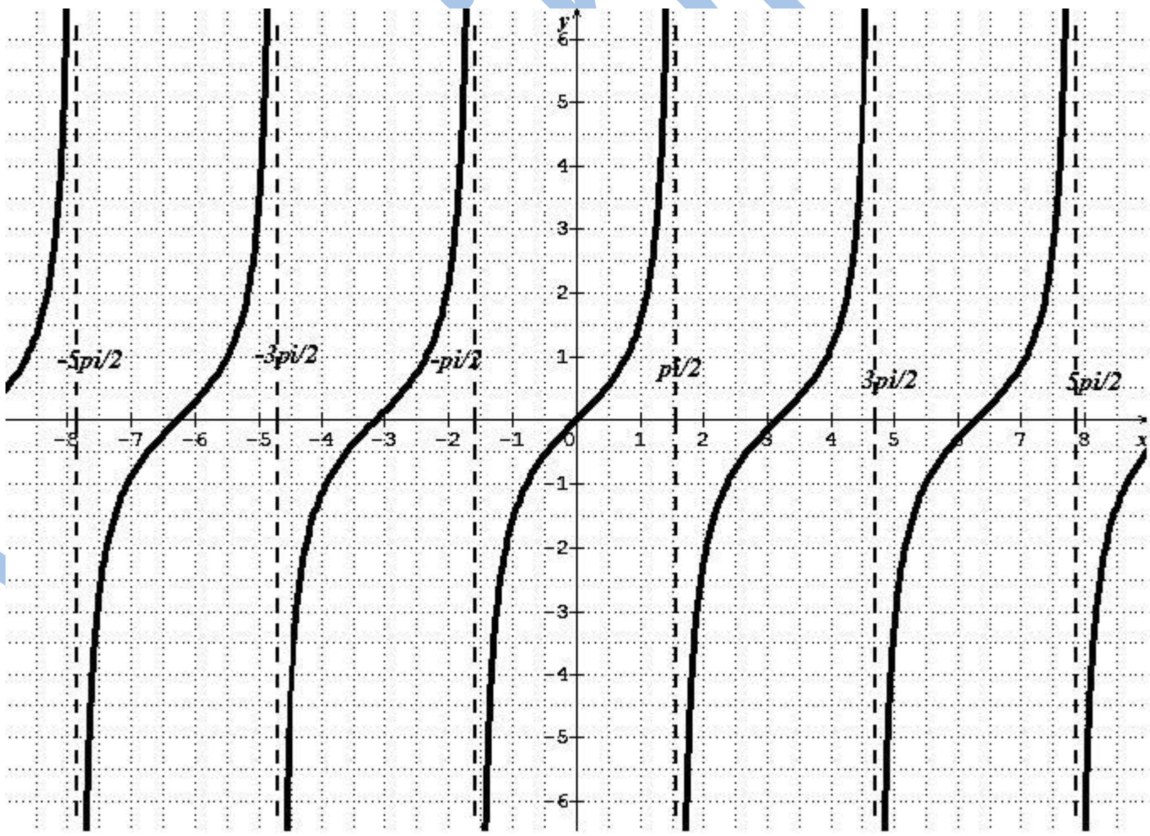
d) Représentation graphique

a- Tableau de valeurs

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$

b- Courbe de f

La courbe représentative $(\mathcal{C}'')$ de $\tan x$, dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est donnée par la figure suivante.



Propriété

Les périodes des fonctions des formes ;

$$f(x) = \sin ax, g(x) = cos\ ax \text{ est} : T = \frac{2\pi}{a}$$

Les fonctions des formes ; $h(x) = \tan ax$ sont

périodiques et leurs périodes est : $T = \frac{\pi}{a}$

Exercice

Démontrer cette propriété.

2. Les fonctions associées par translation aux fonctions trigonométriques usuelles

Les fonctions ayant les formes suivantes ;

$$f_1(x) = \sin(a_1x + \alpha_1) + \beta_1$$
$$g_1(x) = \cos(a_2x + \alpha_2) + \beta_2$$
$$h_1(x) = \tan(a_3x + \alpha_3) + \beta_3$$

sont appelées fonctions associées par translations aux fonctions trigonométriques de base, ou fonction déduites par translations des fonctions trigonométriques de base :

Remarque

Les fonctions associées par translations ont même sens de variations

Exemple 1

Etudier et représenter graphiquement sur le même repère les fonctions ***f***(x) = sin x et ***g***(x) = cos x.

Par quelle transformation simple obtient-on C_g de C_f.

Solution

- ***f***(x) = sin x
- D***f*** = **R**
- ***f*** est périodique ; impaire.
- Il suffit d'étudier f sur [o ; π]
- Sens de variation

$u < v \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin u < \sin v$

f est croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

$\frac{\pi}{2} \leq u < v \Rightarrow \sin u > \sin v$

f et décroissante sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

- ***g***(x) = cos x
- D***g*** = **R**
- ***g*** est périodique ; paire.
- Il suffit d'étudier f sur [o ; π]
- Sens de variation

$u < v \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos u > \cos v$

g est décroissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

$\frac{\pi}{2} \leq u < v \Rightarrow \cos u > \cos v$

g et décroissante sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

- **Tableau de variation**

- **Tableau de variation**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f(x)	0	↗	1	↘	0

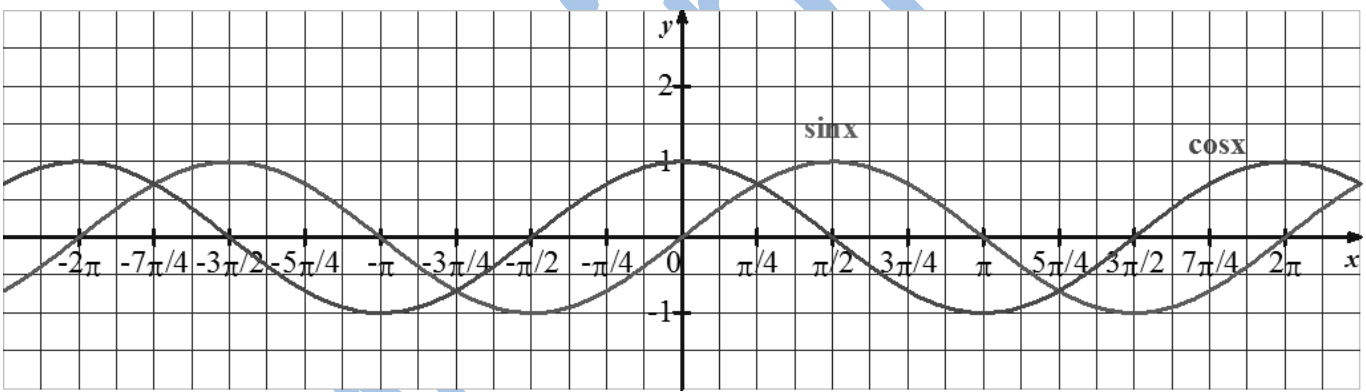
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
g(x)	1	↘	0	↘	-1

- **Tableau de valeurs**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
f(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- **Tableau de valeurs**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
f(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



La translation t de vecteur $\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ transforme C_f en C_g.

Exercices généraux

Exercice 1

Soit la fonction ; $f(x) = \sin 2x$.

1° Montrer que f est périodique.

2° Montrer que f est impaire.

3° Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.

4° Construire $\mathcal{C}_f$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit la fonction ; $h(x) = \cos 5x$.

1° Montrer que h est périodique et donner sa période.

2° Montrer que h est paire.

3° Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_h$ avec les axes de coordonnées.

4° Construire $\mathcal{C}_h$ sur $\mathbb{R}$.

5° En déduire la courbe de $|h|$ dans le même graphique.

Exercice 3

Soit la fonction $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1° f est-elle paire ?

2° f est-elle périodique ?

3° Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.

4° Montrer que $\mathcal{C}_f$ est l'image d'une courbe usuelle par une translation à caractériser.

5° Construire $\mathcal{C}_f$.

Exercice 4

Soit la fonction ;

$$g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1° g est-elle impaire ?

2° g est-elle périodique ?

3° Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec les axes de coordonnées.

4° Montrer que $\mathcal{C}_g$ est l'image d'une courbe usuelle par une translation que l'on caractérisera.

5° Construire $\mathcal{C}_g$.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition et la parité des fonctions ci-dessous :

$f(x) = \frac{\sin x}{9-x^2}$; $g(x) = x^3 - 6x$; $h(x) = \frac{3x^2-6}{\sin x}$;

$k(x) = \frac{3x^2-6x+1}{\cos x}$.

Exercice 6

Soit la fonction $f(x) = sin2x + 1$.

1) Montrer que f est π périodique.
2) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.
3) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est l'image de la courbe de $p(x) = sin2x$, par une translation à caractériser.
4) Construire $\mathcal{C}_f$.

Exercice 7

Soit la fonction ; $h(x) = cos3x$.

1) Montrer que f est périodique.
2) Montrer que f est paire.
3) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées
4) Construire $\mathcal{C}_f$ sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 8

Soit la fonction ; $f(x) = sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

1) Montrer que f est périodique.
2) Montrer que f est impaire.
3) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.
4) Construire $\mathcal{C}_f$ sur $[0;\ \pi]$.

Exercice 9

Soit la fonction $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1) f est-elle paire ?
2) f est-elle périodique ?
3) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes de coordonnées.
4) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est l'image d'une courbe usuelle par une translation à caractériser.
5) Construire $\mathcal{C}_f$.