XIV- TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

Faire savoir

Le cours

Définition

Les transformations géométriques planes sont des applications du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même.
Les transformations qui seront objet d'étude sont ; la translation, l'homothétie, la symétrie centrale, la symétrie axiale et la rotation.

1. La Translation

Définition

On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ et on note $t_{\vec{u}}$ la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point M fait correspondre le point M' tel que ; $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{t_{\vec{u}}} : \boldsymbol{\mathcal{P}} \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}} \\ \quad \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M'} \end{cases} \text{tel que } \overrightarrow{\boldsymbol{MM'}} = \vec{\boldsymbol{u}}.$$

Exemple 1

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $A(7;\ 5)$, $B(-4; 1)$ et $C(-3; -6)$.

Déterminer les coordonnées des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Solution

$t_{\vec{u}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{u}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'} - x_A \\ y_{A'} - y_A \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} x_{A'} - 7 \\ y_{A'} - 5 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} - 7 = 2 \\ y_{A'} - 5 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 + 7 = 9 \\ y_{A'} = -9 + 5 = -4 \end{cases}$

Donc ; $\boldsymbol{A'(9; -4)}$

$t_{\vec{u}}(B) = B' \Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} x_{B'} - x_B \\ y_{B'} - y_B \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix} x_{B'} + 4 \\ y_{B'} - 1 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{B'} + 4 = 2 \\ y_{B'} - 1 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = 2 - 4 = -2 \\ y_{B'} = -9 + 1 = -8 \end{cases}$

Donc ; $\boldsymbol{B'(-2; -8)}$

$t_{\vec{u}}(C) = C' \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = \vec{u}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} x_{C'} - x_C \\ y_{C'} - y_C \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} x_{C'} + 3 \\ y_{C'} + 6 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{C'} + 3 = 2 \\ y_{C'} + 6 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = 2 - 3 = -1 \\ y_{C'} = -9 - 6 = -15 \end{cases}$

Donc ; $\boldsymbol{C'(-1; -15)}$

a) Expression analytique d'une translation

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Soit les points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ tels que ;

$t_{\vec{u}}(M) = M'$.

Il en résulte que ; $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = x + a} \\ \boldsymbol{y' = y + b} \end{cases}$ est appelée expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple 2

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1°/ Déterminer l'expression analytique de la translation $t_{\vec{u}}$.

2°/ Utiliser cette expression pour calculer les coordonnées des points A' et B' image des points $A(4\ ;\ 0)$ et $B(-7, -8)$.

Solution

1°/ $\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = y + 6 \end{cases}$

2°/ $\begin{cases} x_{A'} = 4 + 5 = 9 \\ y_{A'} = 0 + 6 = 6 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{B'} = -7 + 5 = -2 \\ y_{B'} = -8 + 6 = -2 \end{cases}$

Donc, $\boldsymbol{A'(9\ ;\ 6)}$ et $\boldsymbol{B'(-2\ ;\ -2)}$.

Définition

On appelle isométrie, toute transformation qui conserve la distance.

b) Propriétés

1°/ $\begin{cases} t_{\vec{u}}: (A) = A' \\ t_{\vec{u}}: (B) = B' \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. La translation conserve la distance ; c'est une isométrie.

2°/ L'image d'une droite $(\boldsymbol{d})$ par une translation est une droite $(\boldsymbol{d'})$ qui lui est parallèle.

3°/ La translation transforme un cercle $(\mathcal{C})$ en un cercle $(\mathcal{C}')$ de même rayon, le centre O de $(\mathcal{C})$ a pour image le centre O' de $(\mathcal{C}')$.

Exemple 3

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit D la droite d'équation ;

$7x + 5y - 2 = 0$.

Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{4}{-3}$.

Solution

Déterminons un point de la droite (D) en donnant une valeur pour x comme -4, et en calculant la valeur correspondante de y ;

On a ; $7 \times -4 + 5y - 2 = 0 \Longrightarrow y = 6$.

Le point $A(-4\,;\ 6) \in (D)$ a pour image par la translation $t_{\vec{u}}$, le point $A' \in (D')$ dont les coordonnées sont calculées par l'expression analytique ; $\begin{cases} x_{A'} = -4 + 4 = 0 \\ y_{A'} = 6 - 3 = 3 \end{cases} \Longrightarrow A'(0; 3)$.

$(D)//(D')$, elles ont le même vecteur directeur $\vec{v}\binom{-5}{7}$.

$(D'): 7x + 5y + c = 0$. pour déterminer c, on remplace par les coordonnées de A' ;

$7 \times 0 + 5 \times 3 + c = 0 \Longrightarrow c = -15$

D'où ; $(\boldsymbol{D'}): \mathbf{7x + 5y - 15 = 0}$.

On peut aussi utiliser la représentation paramétrique de (D') qui est ;

$\begin{cases} x = -5t \\ y = 3 + 7t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{x}{5} \\ t = \dfrac{y-3}{7} \end{cases} \Longrightarrow$

$-\dfrac{x}{5} = \dfrac{y-3}{7} \Longrightarrow -7x = 5(y - 3) \Longrightarrow$

$7x + 5y - 15 = 0$

$\Longrightarrow (\boldsymbol{D'}): \mathbf{7x + 5y - 15 = 0.}$

Exemple 4

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit la droite (D) d'équation cartésienne ;

$2x - 5y + 3 = 0$.

1° Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $\vec{u}\binom{-4}{7}$;

2° Déterminer une équation du cercle (C') image du cercle $\mathcal{C}(A, 5)$ tel que $(8, -13)$.

Solution

Méthode 1

$(D)//(D') \Longrightarrow D': 2x - 5y + c = 0$. Cherchons à déterminer c.

$\boldsymbol{E(1,1) \in (D) \Longrightarrow t_{\vec{u}}(E) = E' \in (D')}$;

$\Longrightarrow \overrightarrow{EE'} = \vec{u}\binom{-4}{7} \Longrightarrow \binom{x_{E'} - 1}{y_{E'} - 1} = \binom{-4}{7}$;

$\begin{cases} x_{E'} = -3 \\ y_{E'} = 8 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{E'(-3, 8)}$.

E' vérifie l'équation de D'

$\Longrightarrow 2(-3) - 5 \times 8 + c = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{c = 46}$.

$(\boldsymbol{D'}): \mathbf{2x - 5y + 46 = 0}$.

Méthode 2

Le point $M'(x', y') \in (D') \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 7 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} x = x' + 4 \\ y = y' - 7 \end{cases} \Longrightarrow 2(x' + 4) - 5(y' - 7) + 3 = 0$

$\Longrightarrow 2x' + 8 - 5y' + 35 + 3 = 0$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(D') : 2x' - 5y' + 46 = 0}.$$

Méthode 3

$E(1, 1) \in (D) \Longrightarrow t_{\vec{u}}(E) = E' \in (D')$,

Soit $M(x, y) \in (D') \Longrightarrow \overrightarrow{E'M}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ;

$det(\overrightarrow{E'M}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x + 3 & 5 \\ y - 8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$2x + 6 - 5y + 40 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{(D') : 2x - 5y + 46 = 0}.$

2° $\begin{cases} x_{A'} = 8 - 4 = 4 \\ y_{A'} = -3 + 7 = 4 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{A'(4, 4)}.$

$(\mathcal{C}') : (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$

$\Longrightarrow \boldsymbol{(\mathcal{C}') : x^2 - 8x + y^2 - 8y - 25 = 0}.$

Remarque

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) alors (d) est globalement invariante par $t_{\vec{u}}$.

c) La translation conserve ;

a- Le parallélisme :

$(d_1)//(d_2)\ et \begin{cases} t_{\vec{u}}(d_1) = d'_1 \\ t_{\vec{u}}(d_2) = d'_2 \end{cases} \Longrightarrow d'_1 // d'_2.$

b- L'orthogonalité :

$(d_1) \perp (d_2)\ et \begin{cases} t_{\vec{u}}(d_1) = d'_1 \\ t_{\vec{u}}(d_2) = d'_2 \end{cases} \Longrightarrow d'_1 \perp d'_2$

c- L'alignement :

Les points $A, B\ et\ C$ sont alignés et $\begin{cases} t_{\vec{u}}(A) = A' \\ t_{\vec{u}}(B) = B' \\ t_{\vec{u}}(C) = C' \end{cases} \Longrightarrow$ A', B' et C' sont alignés.

d- Le contact :

$$E = F_1 \cap F_2\ et \begin{cases} t_{\vec{u}}(F_1) = F'_1 \\ t_{\vec{u}}(F_2) = F'_2 \\ t_{\vec{u}}(E) = E' \end{cases} \Longrightarrow F'_1 \cap F'_2 = E'$$

e- Le barycentre :

$\boldsymbol{G = bar}$ $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$ $\Longrightarrow$

	α	β	γ	

$\boldsymbol{t_{\vec{u}}(G) = bar}$

$t_{\vec{u}}(A)$	$t_{\vec{u}}(B)$	$t_{\vec{u}}(C)$
α	β	γ

4°/ La translation $t_{\vec{u}}$ est une bijection sa bijection réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$ et on écrit ; $\boldsymbol{(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}}$;

Car, $t_{\vec{u}}(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{u} \Longrightarrow t_{-\vec{u}}(M') = M.$

e) La composée de deux translations

$t_{\vec{v}} : M \longrightarrow M' \ et \ t_{\vec{u}} : M' \longrightarrow M''$

$\Longrightarrow t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} : \ M \longrightarrow M''$

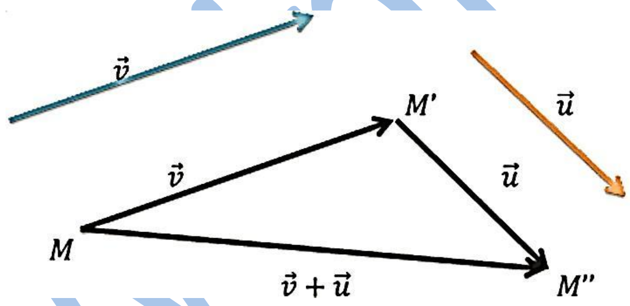
$t_{\vec{v}}(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v},$

$t_{u}(M') = M'' \Longrightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{u},$

$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} + \vec{u}.$

La composée de deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

$$\boldsymbol{t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}}$$



Remarques

- La translation de vecteur nul est appelée l'identité du plan, et on la note $Id_{\mathcal{P}}$;

$t_{\vec{0}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Leftrightarrow M = M'.$

- Une translation de vecteur non nul n'a pas de points invariants.

Exemple 5

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit (D) une droite d'équation ; $4x + 3y - 2 = 0$ et $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation de (D') image de (D) par la translation $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$.

Solution

On a $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$;

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{u}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix} + \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix} = \boldsymbol{\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}}.$

$\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = x' + 4 \\ y = y' + 2 \end{cases};$

$\Longrightarrow 4(x' + 4) + 3(y' + 2) - 2 = 0$;

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{(D')}$: $\boldsymbol{4x' + 3y' + 20 = 0}$.

Exemple 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

Construire l'image de $ABCD$ par la translation

$t_{\overrightarrow{AO}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

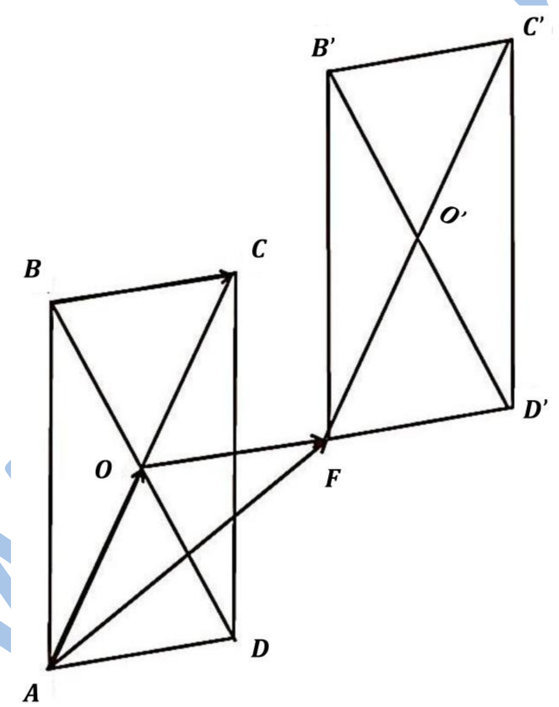
Solution

On a ; $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AF} \Longrightarrow t_{\overrightarrow{AO}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{AF}}$.

Donc ; $t_{\overrightarrow{AF}}(A) = F$; $t_{\overrightarrow{AF}}(B) = B'$;

$t_{\overrightarrow{AF}}(C) = C'$; $t_{\overrightarrow{AF}}(D) = D'$; $t_{\overrightarrow{AF}}(O) = O'$;

$t_{\overrightarrow{AF}}(ABCD) = FB'C'D'$ (*figure*).



2. L'Homothétie

Définition

Soit k un nombre réel non nul et distinct de 1 $(k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\})$, et Ω un point fixé du plan $\mathcal{P}$.

On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k que l'on note $h_{(\Omega,k)}$, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point Ω invariant, et qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$.

On note ; $\boldsymbol{h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}}$.

Exemple 7

Soit ABC est un triangle non aplati et h l'homothétie de centre A et de rapport $k = 2$. Construire l'image de ABC par $h_{(\mathrm{A},2)}$.

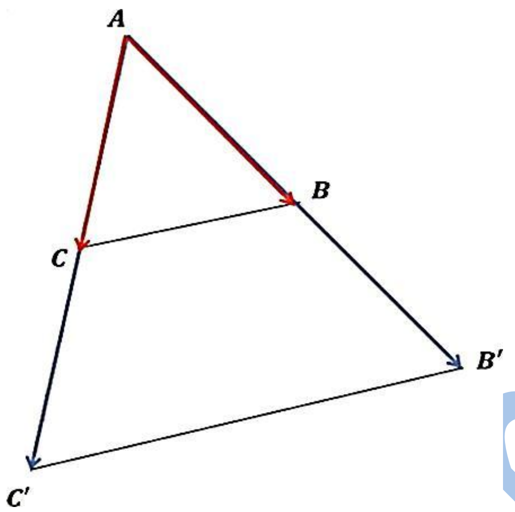
Solution

$h_{(\mathrm{A},2)}(A) = A$ (A est le centre de h)

$h_{(\mathrm{A},2)}(B) = B' \Longrightarrow \overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$;

$h_{(\mathrm{A},2)}(C) = C' \Longrightarrow \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$.

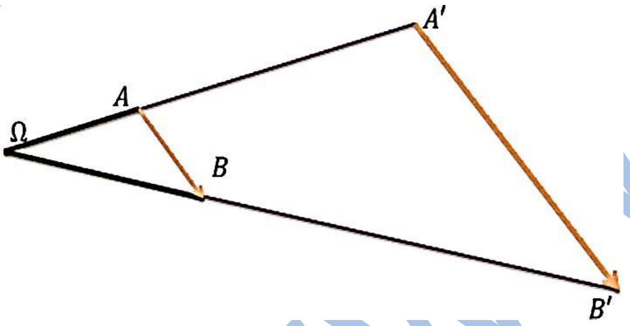
$h_{(\mathrm{A},2)}(ABC) = AB'C'$ (*figure*).



a) Propriétés

1°/ Le centre Ω d'une homothétie, un point M et son image M', sont alignés.

2°/ Si $\begin{cases} h_{(\Omega,k)}(A) = A' \\ h_{(\Omega,k)}(B) = B' \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$



Exercice

Démontrer la propriété **2°/**.

3°/ $h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$,

$\Longrightarrow \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'} \Longrightarrow h_{\left(\Omega,\frac{1}{k}\right)}(M') = M$.

L'homothétie $h(\Omega, k)$est une bijection, et sa bijection réciproque est l'homothétie $h(\Omega,\frac{1}{k})$ et on écrit ; $\left(h_{(\Omega,k)}\right)^{-1} = h_{\left(\Omega,\frac{1}{k}\right)}$.

4°/ Si $k = 0 \Longrightarrow M' = \Omega$.

5°/ Si $k = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M} \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} + \overrightarrow{\Omega M} = \vec{0}$

$\Longrightarrow \Omega = \mathrm{M} * \mathrm{M}' \Longrightarrow \mathrm{M}' = S_{\Omega}(M)$.

Donc, l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est une symétrie de centre Ω. $\boldsymbol{h_{(\Omega,-1)} = S_{\Omega}}$.

6°/ Si $k = 1 \Longrightarrow \Omega M' = \Omega M$

$\Longrightarrow M' = M \Longrightarrow \boldsymbol{h_{(\Omega,1)}} = \boldsymbol{Id_{\mathcal{P}}}$.

7°/ L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

8°/ L'homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$ et les aires par k^2.

Exemple 8

Soit ABCD un parallélogramme,

et I un point de la diagonale [BD] autre que B et D, (AI) coupe (BC) en E et (CD) en F.

Soit h l'homothétie de centre I qui transforme D en B.

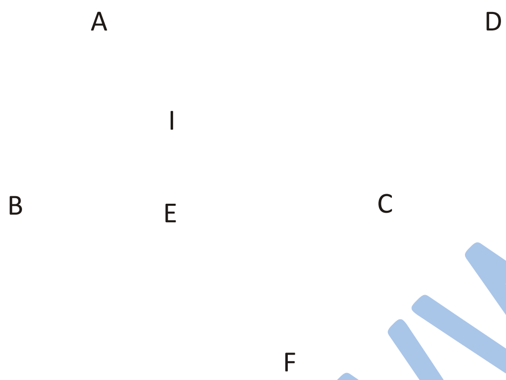
1) Montrer que h transforme A en E.

2) Montrer que h transforme F en A

3) Déduire des questions précédentes l'égalité $IA^2 = \overline{IE} \times \overline{IF}$.

Solution

1) Les triangles IAD et IEB sont une configuration de Thalès,



donc l'homothétie de centre I qui transforme D en B transforme A en E.

2) Les triangles IDF et IBA sont aussi une configration de Thalès, donc l'homothétie de centre I qui transforme D en B transforme F en A.

3) Soit k le rapport de h, d'après les questions 1) et 2) on a :

$\overrightarrow{IE} = k\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IF}$.

Il en résulte que : $\overline{IE} = k\overline{IA}$ et $\overline{IA} = k\overline{IF}$,

d'où k = $\dfrac{\overline{IE}}{\overline{IA}} = \dfrac{\overline{IA}}{\overline{IF}}$ et par suite $\overline{IA}^2 = \overline{IE} \times \overline{IF}$.

C'est a- dire $IA^2 = \overline{IE} \times \overline{IF}$.

b) L'homothétie conserve ;

a- Le parallélisme :

$$(d_1)//(d_2)\ et \begin{cases} h_{(\Omega,k)}(d_1) = d_1' \\ h_{(\Omega,k)}(d_2) = d_2' \end{cases} \Longrightarrow d_1'//d_2'$$

b- L'orthogonalité :

$$(d_1) \perp (d_2)\ et \begin{cases} h_{(\Omega,k)}(d_1) = d_1' \\ h_{(\Omega,k)}(d_2) = d_2' \end{cases} \Longrightarrow d_1' \perp d_2'$$

c- L'alignement :

A, B et C sont trois points alignés, alors ;

$h_{(\Omega,k)}(A), h_{(\Omega,k)}(B)$ et $h_{(\Omega,k)}(C)$ sont alignés ;

d- Le contact :

$E = F_1 \cap F_2 \Longrightarrow$

$h_{(\Omega,k)}(E) = h_{(\Omega,k)}(F_1) \cap h_{(\Omega,k)}(F_2)$.

e- Le barycentre :

$$G = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \Longrightarrow$$

$$h_{(\Omega,k)}(G) = bar \begin{array}{|c|c|c|} \hline h_{(\Omega,k)}(A) & h_{(\Omega,k)}(B) & h_{(\Omega,k)}(C) \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array}$$

f- Les angles orientés :

Soit α un nombre réel, et $\widehat{ABC} = \alpha \Longrightarrow h_{(\Omega,k)}\left(\widehat{ABC}\right) = \alpha$.

10°/ Soit trois points O, A et B alignés et distincts deux-à-deux. Il existe une homothétie de centre O qui transforme A en B, le rapport de cette homothétie est $\frac{OB}{OA}$.

11°/ Soit A, B ; A' et B' quatre points du plan vérifiant $(A'B')//(AB)$ et $A'B' \neq AB$, alors, il existe une homothétie qui transforme A en A' et B en B'. Le centre de cette homothétie est ;

$O = (AA') \cap (BB')$, et son rapport est $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.

Remarques 1

Si une droite (D) passe par le centre Ω d'une homothétie h, alors elle est globalement invariante par h.

Remarques 2

Une homothétie est caractérisée par :

- Un centre et un rapport ;
- Un centre, un point et son image ;
- Un rapport, un point et son image ;
- Une des configurations de *Thalès*.

Exemple 9

P et Q sont deux points.

$G = bar$

P	Q
-3	1

Soit la fonction $f(M) = M'$ tel que ;

$\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$.

Démontrer que f est une homothétie dont on caractérisera *(centre et rapport)*.

Solution

$G = bar$

P	Q
-3	1

et $\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$

-

On a $G = bar$

P	Q
-3	1

$\Longrightarrow -3\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$

$\overrightarrow{PM'} = \left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ}\right) + 3\left(\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GM}\right)$;

$= -\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} - 3\overrightarrow{GP} + 3\overrightarrow{GM}$;

Comme $\overrightarrow{GQ} - 3\overrightarrow{GP} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{PM'} + \overrightarrow{GP} = 3\overrightarrow{GM}$;

$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{GM'} = 3\overrightarrow{GM} \Longrightarrow f = h_{(G,3)}}$.

c) Expression analytique d'une homothétie

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit l'homothétie h de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport le réel k et notée $h_{(\Omega,k)}$. Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan $\mathcal{P}$, et $M'(x', y')$ son image par l'homothétie h.

On a ; $h_{(\Omega,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k.\overrightarrow{\Omega M}$,

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}\begin{pmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{pmatrix} = k.\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix} kx - kx_0 \\ ky - ky_0 \end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x' - x_0 = kx - kx_0 \\ y' - y_0 = ky - ky_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x_0 + kx - kx_0 \\ y' = y_0 + ky - ky_0 \end{cases},$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = kx + (1-k)x_0} \\ \boldsymbol{y' = ky + (1-k)y_0} \end{cases}.$$

Cette écriture est l'expression analytique de l'homothétie de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rapport le réel k, dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exemple 10

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les points $A(-7, 5)$ et $B(3, -6)$.

1°/ Donner les coordonnées de A' et B' images des point A et B par l'homothétie h de centre $\Omega(-2, 4)$ et de rapport $k = \frac{5}{4}$;

2°/ Donner une équation de (AB) ;

3°/ Donner une équation de (Δ) image de (AB) par l'homothétie h.

Solution

1°/ $\begin{cases} x_{A'} = \dfrac{5}{4} \times (-7) + \left(1 - \dfrac{5}{4}\right) \times (-2) = \dfrac{-35}{4} + \dfrac{2}{4} = -\dfrac{33}{4} \\ y_{A'} = \dfrac{5}{4} \times 5 + \left(1 - \dfrac{5}{4}\right) \times 4 = \dfrac{25}{4} - 1 = \dfrac{21}{4} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A'}\left(-\frac{33}{4}, \frac{21}{4}\right)$$

$\begin{cases} x_{B'} = \dfrac{5}{4} \times 3 + \left(1 - \dfrac{5}{4}\right) \times (-2) = \dfrac{15}{4} + \dfrac{2}{4} = \dfrac{17}{4} \\ y_{B'} = \dfrac{5}{4} \times (-6) + \left(1 - \dfrac{5}{4}\right) \times 4 = \dfrac{-30}{4} - 1 = -\dfrac{34}{4} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{B'}\left(\frac{17}{4}, -\frac{34}{4}\right)$$

2°/ Soit $M(x, y) \in (AB) \Longrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires.

$\Longrightarrow \begin{vmatrix} x+7 & 10 \\ y-5 & -11 \end{vmatrix} = 0\,;$

$\Longrightarrow -11(x+7) - 10(y-5) = 0\,;$

$\Longrightarrow -11x - 10y - 27 = 0\,;$

$\Longrightarrow (\boldsymbol{AB}): \mathbf{11}\boldsymbol{x} + \mathbf{10}\boldsymbol{y} + \mathbf{27} = \mathbf{0}.$

3°/ a) Méthode 1 :

$(\Delta)//(AB)$, soit $M(x, y)$ un point de Δ, on a ;

$h: M \longmapsto M'\,;$

$\Longrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{2}{4} \\ y' = \dfrac{5}{4}y - 1 = \dfrac{5}{4}y - \dfrac{4}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x' = 5x + 2 \\ 4y' = 5y - 4 \end{cases};$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4x' - 2}{5} \\ y = \dfrac{4y' + 4}{5} \end{cases}$

$\Longrightarrow : 11\left(\dfrac{4x' - 2}{5}\right) + 10\left(\dfrac{4y' + 4}{5}\right) + 27 = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{44x' - 22}{5} + \dfrac{40y' + 40}{5} + \dfrac{135}{5} = 0$

$\Longrightarrow 44x' - 22 + 40y' + 40 + 135 = 0$

$\Longrightarrow (\Delta): \mathbf{44}\boldsymbol{x'} + \mathbf{40}\boldsymbol{y'} + \mathbf{153} = \mathbf{0}$

b) Méthode 2 :

La droite $(\Delta) = (A'B')$, cherchons l'équation de $(A'B')$.

$M(x, y) \in (A'B') \Longrightarrow \overrightarrow{A'M}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires.

$\Longrightarrow \begin{vmatrix} x + \dfrac{33}{4} & \dfrac{50}{4} \\ y - \dfrac{21}{4} & -\dfrac{55}{4} \end{vmatrix} = -\dfrac{55}{4}\left(x + \dfrac{33}{4}\right) - \dfrac{50}{4}\left(y - \dfrac{21}{4}\right) = 0$

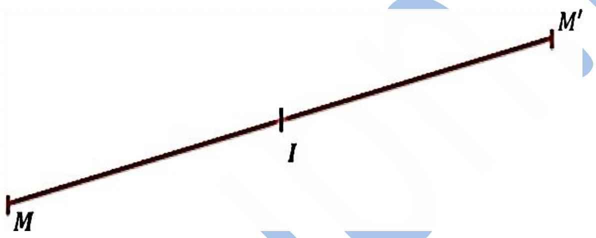
$$\Longrightarrow -\frac{55}{4}x - \frac{1\,815}{16} - \frac{50}{4}y + \frac{1\,050}{16} = 0$$
$$\Longrightarrow -\frac{220}{16}x - \frac{1\,815}{16} - \frac{200}{16}y + \frac{1\,050}{16} = 0$$
$$\Longrightarrow -220x - 200y - 765 = 0$$
$$\Longrightarrow 44x + 40y + 153 = 0$$
$$\Longrightarrow (\Delta) = (A'B') : \boldsymbol{44x + 40y + 153 = 0}$$

3. La Symétrie centrale

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit I un point fixé, on appelle symétrie centrale de centre I et on note S_I, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point I invariant, et qui à tout point M associe l'unique point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$.

$$\boldsymbol{S_I(M) = M' \Leftrightarrow I = M * M' \Leftrightarrow \begin{cases} S_I(M) = M' \\ et \\ S_I(I) = I \end{cases}}$$



Exemple 11

Soit ABC un triangle quelconque.

1°/ Construire l'image de ABC par la symétrie S_A.

2°/ Quelle est la nature du quadrilatère $BCB'C'$? Prouvez-le.

Solution

1°/ $S_A(A) = A$; $S_A(B) = B'$; $S_A(C) = C'$.

$S_A(ABC) = AB'C'$.

2°/ A étant le milieu $[BB']$ et de $[CC']$, les deux diagonales de $BCB'C'$ on le même milieu A, donc $BCB'C'$ est un parallélogramme.

Remarque

La symétrie centrale de centre Ω est une homothétie de centre Ω et de rapport -1

$\boldsymbol{S_\Omega = h_{(\Omega,-1)}}$.

a) Propriétés

1° $S_I(M) = M' \Leftrightarrow S_I(M') = M$.

S_I est une bijection et sa bijection réciproque est $(S_I)^{-1} = S_I$.

2° Si une droite (Δ) passe par I, alors (Δ) est globalement invariante par S_I.

3° La symétrie centrale conserve la mesure d'un angle orienté ;

(Un angle direct aura pour image un angle direct, et un angle indirect aura pour image un angle indirect) ;
$S_I(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

4° Une symétrie centrale transforme un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$ en un cercle $\mathcal{C}'(\Omega', R)$ tel que Ω' est l'image de Ω.

b) La symétrie centrale conserve ;

a- La distance : (*la symétrie centrale est une isométrie*)

$S_I(M, N) \longrightarrow (M', N') \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

b- Le parallélisme :

$$(\Delta_1) \,//\, (\Delta_2) \; et \; S_I: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \,//\, (\Delta'_2)$$

c- L'orthogonalité :

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \; et \; S_I: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2)$

$$\Longrightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$$

d- L'alignement

A, B et C trois points alignés, $\Longrightarrow$ $S_I(A)$, $S_I(B)$ et $S_I(C)$ sont alignés.

e- Le contact

$F = E \cap G \Longrightarrow S_I(F) = S_I(E) \cap S_I(G)$.

f) Le barycentre de deux points ou plus

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Longrightarrow$

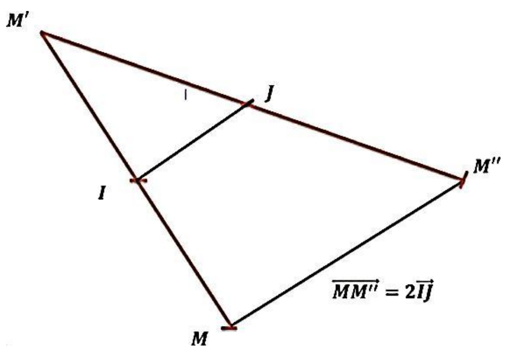
$S_I(G) = bar$

$S_I(A)$	$S_I(B)$	$S_I(C)$
α	β	γ

c) La composée de deux symétries centrales

$M: S_I \longrightarrow M': S_J \longrightarrow M''$

$\Longrightarrow M \longrightarrow S_J \circ S_I \longrightarrow M''$



$S_I(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}$,

$S_J(M') = M'' \Longrightarrow M'M'' = 2M'J$

$\Longrightarrow \overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{IM'} + 2\overrightarrow{M'J}$

$= 2\left(\overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'J}\right) = 2\overrightarrow{IJ}$.

Donc ; $\boldsymbol{S_J \circ S_I = t_{2\overrightarrow{IJ}}}$.

Exemple 12

$ABCD$ est un parallélogramme.

Caractériser $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$.

Solution

$S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D = t_{2\overrightarrow{BA}} \circ t_{2\overrightarrow{DC}} = t_{2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})} = t_{\vec{0}}$.

$\Longrightarrow \boldsymbol{S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D = Id_{\mathcal{P}}}$.

d) Expression analytique d'une symétrie centrale

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit le point $I(x_I, y_I)$.

Un point $M(x, y)$ du plan a pour image un point $M'(x', y')$ par la symétrie S_{I}, signifie que ;

$S_{\mathrm{I}}(M) = M' \Longrightarrow \mathrm{I} = M * M'$;

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x' + x}{2} \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y' + y}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x' = 2x_{\mathrm{I}} - x} \\ \boldsymbol{y' = 2y_{\mathrm{I}} - y} \end{cases}$$

Cette écriture est l'expression analytique de la symétrie centrale de centre $\mathbf{I}$.

Exemple 13

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite d'équation $(D): 5x - 6y + 3 = 0$, et le cercle d'équation ; $(\mathcal{C}): x^2 + 8x + y^2 - 2y - 152 = 0$.

1°/ Déterminer une équation de (D') image de (D) par la symétrie S_B tel que $B(4; -7)$;

2°/ Donner une équation de $(\mathcal{C}') = S_B(\mathcal{C})$.

Solution

1°/ $(D): 5x - 6y + 3 = 0$.

I- Première méthode

$\begin{cases} x' = 8 - x \\ y' = -14 - y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 8 - x' \\ y = -14 - y' \end{cases}$;

$\Longrightarrow 5(8 - x') - 6(-14 - y') + 3 = 0$;

$\Longrightarrow 40 - 5x' + 84 + 6y' + 3 = 0$;

$\boldsymbol{(D'): 5x' - 6y' - 127 = 0}$.

II- Deuxième méthode

On a d'une part ; $(D)//(D') \Longrightarrow 5x - 6y + c = 0$.

D'autre part ; $E\left(0, \frac{1}{2}\right) \in (D) \Longrightarrow S_B(E) = E' \in (D')$.

$\begin{cases} x_{E'} = 8 - 0 = 8 \\ y_{E'} = -14 - \frac{1}{2} = -\frac{29}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \boldsymbol{E'\left(8, -\frac{29}{2}\right)}$.

E' vérifie l'équation de (D');

$5(8) - 6\left(-\frac{29}{2}\right) + c = 0 \Longrightarrow 40 + 87 + c = 0$;

$\Longrightarrow c = -127 \Longrightarrow \boldsymbol{(D'): 5x - 6y - 127 = 0}$.

2°/ $(\mathcal{C}): x^2 + 8x + y^2 - 2y - 152 = 0$;

I- Première méthode

$(8 - x')^2 + 8(8 - x') + (-14 - y')^2 - 2(-14 - y') - 152 = 0$;

$\Longrightarrow 64 - 16x' + x'^2 + 64 - 8x' + 196 + 28y' + y'^2 + 28 + 2y' - 152 = 0$;

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}' : x'^2 - 24x' + y'^2 + 30y' + 56 = 0}$;

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}' : (x' - 12)^2 - 144 + (y + 15)^2 - 225 + 200 = 0}$;

$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}' : (x' - 12)^2 + (y' + 15)^2 - 169 = 0}$;

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}' : (x' - 12)^2 + (y' + 15)^2 = 169 = 13^2 \Longrightarrow \mathcal{C}'_{(H'(12,-15);\,13)}}.$$

II- Deuxième méthode

$$(\mathcal{C}): x^2 + 8x + y^2 - 2y - 152 = 0$$

Déterminons les coordonnées de H centre de $(\mathcal{C})$.

$(x + 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 - 152 = 0 \Longrightarrow$;

$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 - 169 = 0 \Longrightarrow$;

$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 169 = 13^2 \Longrightarrow H(-4, 1)$.

Soit H' le centre de $\mathcal{C}'$ tq $H' = S_B(H) \Longrightarrow$;

$\begin{cases} x_{H'} = 8 - (-4) = 12 \\ y_{H'} = -14 - 1 = -15 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{H'(12, -15)} \Longrightarrow$;

$$(\boldsymbol{\mathcal{C}'}): (\boldsymbol{x'} - \mathbf{12})^2 + (\boldsymbol{y'} + \mathbf{15})^2 = 169 = 13^2 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}'_{(H'(12,-15);\,13)}}$$

4. La Symétrie axiale ou réflexion

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$ soit la droite fixée (Δ).

On appelle symétrie axiale (*ou réflexion*) d'axe (Δ) (*ou par rapport à la droite* (Δ)) et on la note S_Δ, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse les points de (Δ) invariants, et qui à tout point M de $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à (Δ), associe l'unique point M' de $\mathcal{P}$ tel que (Δ) soit la médiatrice de $[MM']$.

$$\boldsymbol{S_\Delta(M)} = \begin{cases} \boldsymbol{M \ si \ M} \in (\Delta) \\ \boldsymbol{M'} / (\Delta) = \boldsymbol{med}[\boldsymbol{MM'}] \ \boldsymbol{si \ M} \notin (\Delta) \end{cases}.$$

Exemple 14

Soit $ABCD$ un carré. Construire les images de $ABCD$ par les réflexions ; $S_{(AB)}, S_{(AC)}$.

Solution

$S_{(AB)}(A) = A$ (*car* $A \in (AB)$),

$S_{(AB)}(B) = B$ (*car* $B \in (AB)$),

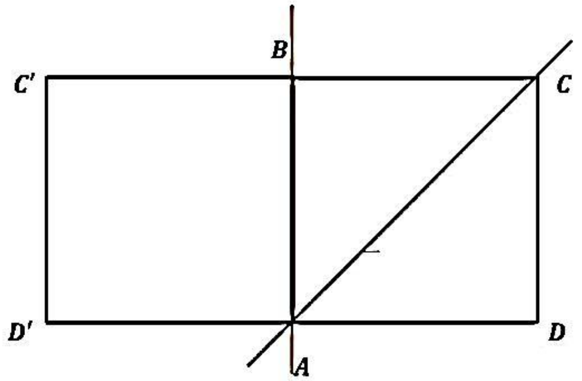
$S_{(AB)}(C) = C'/\ (AB) = med[CC'],$

$S_{(AB)}(D) = D'/\ (AB) = med[DD']$

Donc, l'image du carré $ABCD$ par la réflexion $S_{(AB)}$ est le carré $ABC'D'$.

$S_{(AC)}(A) = A,\ S_{(AC)}(B) = D,\ S_{(AC)}(C) = C,\ S_{(AC)}(D) = B,$

Donc, l'image du carré $ABCD$ $S_{(AC)}$ est lui-même.



Exemple 15

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Construire l'image de $ABCD$ par $S_{(BD)}$.

Solution

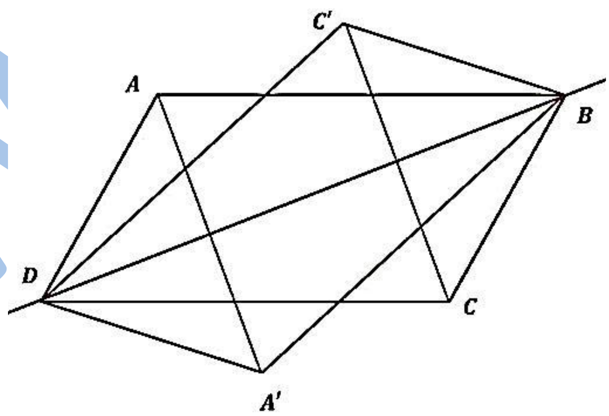
$S_{(BD)}(B) = B$ (*car* $B \in (BD)$),

$S_{(BD)}(D) = D$ (*car* $D \in (BD)$),

$S_{(BD)}(A) = A'/\ (BD) = med[AA'],$

$S_{(BD)}(C) = C'/\ (BD) = med[CC'].$

$S_{(BD)}: ABCD \longmapsto A'BC'D$ (*figure*).



a) Propriétés

1° $\boldsymbol{S_d(M) = M' \Leftrightarrow S_d(M') = M.}$

S_d est une bijection et sa bijection réciproque est $(S_d)^{-1} = S_d$.

2° $S_d \circ S_d = Id_{\mathcal{P}}$ (*$Id_{\mathcal{P}}$ est l'application identique dans le plan $\mathcal{P}$*).

3° Si une droite (Δ) est perpendiculaire à (d), alors (Δ) est globalement invariante par S_d.

4° La réflexion change la mesure d'un angle orienté en son opposée :

(*Un angle direct aura pour image un angle indirect, et un angle indirect aura pour image un angle direct*).
$S_d(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

b) La réflexion conserve ;

a- La distance : *(la réflexion est une isométrie)*

$S_d(M,N) \longrightarrow (M',N') \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

b- Le parallélisme :

$$(\Delta_1) \,//\, (\Delta_2) \; et \; S_d\!: (\Delta_1,\Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1,\Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \,//\, (\Delta'_2)$$

c- L'orthogonalité :

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \; et \; S_d\!: (\Delta_1,\Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1,\Delta'_2)$

$$\Longrightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$$

d- L'alignement :

A, B et C trois points alignés, $\Longrightarrow$ $S_d(A)$, $S_d(B)$ et $S_d(C)$ sont alignés.

e- Le contact :

$F = E \cap G \Longrightarrow S_d(F) = S_d(E) \cap S_d(G)$.

f- Le barycentre :

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

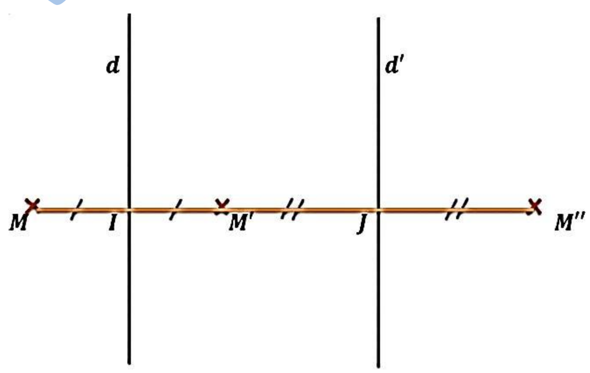
$\Longrightarrow$

$S_d(G) = bar$

$S_d(A)$	$S_d(B)$	$S_d(C)$
α	β	γ

c) Composée de deux réflexions ;

a- D'axes parallèles :



Soit S_d la réflexion d'axe (d) et $S_{d'}$ la réflexion d'axe (d').

$$M\!: S_d \longrightarrow M'\!: S_{d'} \longrightarrow M''$$
$$M \longrightarrow S_{d'} \circ S_d \longrightarrow M''$$

$S_d(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}$

$S_{d'}(M') = M'' \Longrightarrow \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'J}$

Donc ; $MM'' = 2\overrightarrow{IJ} \Longrightarrow t_{2\overrightarrow{IJ}}(M) = M''$.

D'où, $\boldsymbol{S_{d'} \circ S_d = t_{2\overrightarrow{IJ}}}$, avec I un point de (d) et J son projeté orthogonal sur (d').

La composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.

Exemple 16

$ABCD$ est un carré.

Déterminer la nature des transformations $S_{(AB)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$.

Solution

$S_{(AB)} \circ S_{(DC)} = t_{2\overrightarrow{DA}}$; et $S_{(BC)} \circ S_{(AD)} = t_{2\overrightarrow{AB}}$.

b- D'axes perpendiculaires :

Soit (Δ) et (Δ') deux droites perpendiculaires en I, et soit S_Δ la réflexion d'axe (Δ) et $S_{\Delta'}$ la réflexion d'axe (Δ').

Cherchons à déterminer $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$;

$$M : S_\Delta \longrightarrow M' : S_{\Delta'} \longrightarrow M''$$
$$M \longrightarrow S_{\Delta'} \circ S_\Delta \longrightarrow M''$$

$S_\Delta(M) = M' \Longrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{KM'}$

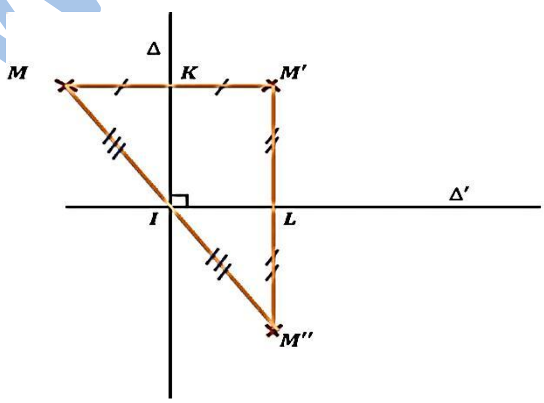
$S_{\Delta'}(M') = M'' \Longrightarrow \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'L}$

Donc ; $MM'' = 2\overrightarrow{KL}$.

Comme $(MM') \perp (M'M'') \Longrightarrow ABC$ est rectangle en M' et $I = M * M''$ (*propriété des milieux*).

Donc ; $S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) = M''$ / $I = M * M''$.

Donc, la composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale de centre I, point d'intersection des deux droites.



Exemple 17

ABC est un triangle non aplati et A' est le pied de la hauteur issue de A.

Caractériser $S_{(AA')} \circ S_{(BC)}$.

Solution

On a $(AA') \perp (BC) \Longrightarrow S_{(AA')} \circ S_{(BC)} = S_{A'}$.

Exemple 18

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O, caractériser les transformations $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$;

Puis ; $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$.

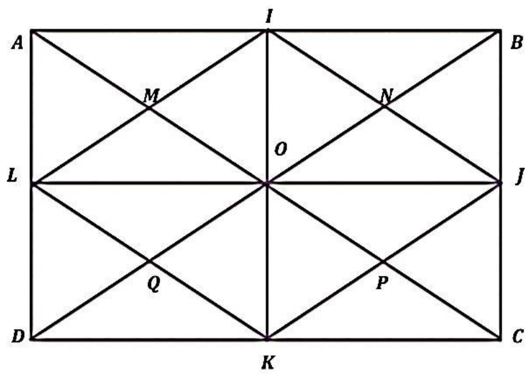
Solution

$S_{(AB)} \circ S_{(CD)} = t_{2\overrightarrow{CB}}$;

$S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DA)} = S_B \circ S_D = t_{2\overrightarrow{DB}}$.

Exemple 19

Sur la figure ci-dessous, déterminer la nature de chacune des transformations suivantes ;



a) $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AM}}$; $t_{\overrightarrow{AM}} \circ t_{\overrightarrow{JP}}$, $t_{\overrightarrow{MN}} \circ t_{\overrightarrow{PQ}}$;
b) $S_M \circ S_N$, $S_N \circ S_P$, $S_J \circ S_K$;
c) $S_{(MN)} \circ S_{(PQ)}$, $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$, $S_{(BC)} \circ S_{(IK)}$

Solution

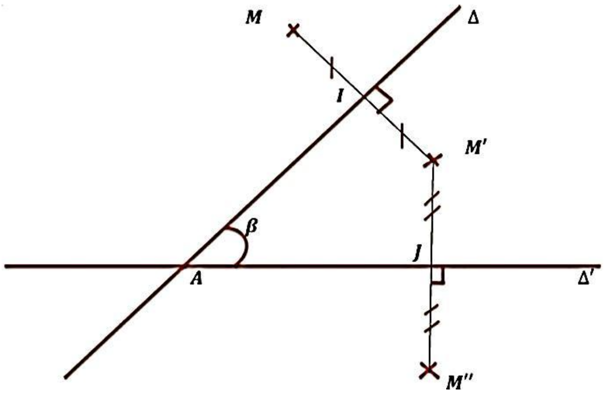
a) $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AM}} = t_{\overrightarrow{AN}}$;
$t_{\overrightarrow{AM}} \circ t_{\overrightarrow{JP}} = t_{\overrightarrow{AL}}$;
$t_{\overrightarrow{MN}} \circ t_{\overrightarrow{PQ}} = Id_{\mathcal{P}}$;
b) $S_M \circ S_N = t_{\overrightarrow{BA}}$;
$S_N \circ S_P = t_{\overrightarrow{CB}}$;
$S_J \circ S_K = t_{\overrightarrow{DB}}$;
c) $S_{(MN)} \circ S_{(PQ)} = t_{\overrightarrow{KI}}$;
$S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = S_A$;
$S_{(BC)} \circ S_{(IK)} = t_{\overrightarrow{AB}}$.

c- D’axes sécants :

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en A avec $(\widehat{\Delta,\ \Delta'}) = \beta$.

Posons $M' = S_\Delta(M)$ et $M'' = S_{\Delta'}(M')$.

Etudions $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$



$\begin{cases} S_\Delta(M) = M' \\ M \notin (\Delta) \end{cases} \Longrightarrow (\Delta) = med[MM']$

$\Longrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = 2\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM'}\right) \boxed{1} \end{cases}$

((Δ) *étant la bissectrice de* $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right)$).

$S_{\Delta'}(M') = M'' \Longrightarrow (\Delta') = med[M'M'']$

$\Longrightarrow \begin{cases} AM' = AM'' \\ \left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}\right) = 2\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AJ}\right) \boxed{2} \end{cases}$

((Δ') *étant la bissectrice de* $\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}\right)$).

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on a ;

$\begin{cases} AM = AM' = AM'' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) + \left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}\right) = \end{cases}$

$$= 2\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM'}\right) + 2\left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AJ}\right)$$

$$= 2\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right) = 2\beta$$

Donc, $S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) = M''$ tel que ;

$AM = AM''$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM''}\right) = 2\beta$

Avec $\beta = (\widehat{\Delta, \Delta'})$.

La transformation $R = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ est appelé une rotation de centre A et d'angle 2β.

Exemple 20

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

Déterminer à chaque fois la nature de la transformation f et construire l'image du carré $ABCD$ par f

1°/ $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$;

2°/ $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$;

3°/ $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$;

4°/ $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$.

Solution

1°/ $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} = r_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)} \Longrightarrow f(ABCD) = ADC'D'$ *(fig. 1).*

2°/ $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)} = r_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} \Longrightarrow f(ABCD) = A'D'CD$ *(fig. 2)*.

3°/ $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{AD}} \Longrightarrow f(ABCD) = A'D'C'D'$ *(fig. 3)*.

4°/ $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)} = S_O \Longrightarrow f(ABCD) = ABCD$.

$ABCD$ est globalement invariant par S_O *(fig. 4)*.

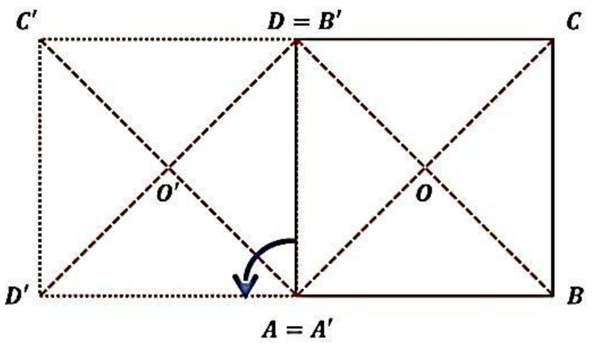


Figure 1

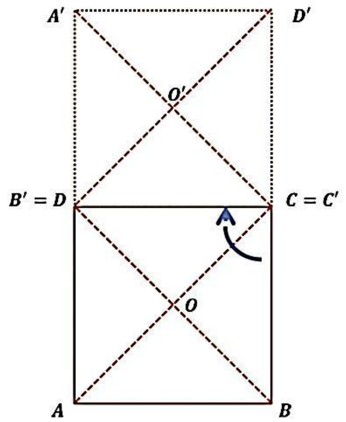


Figure 2

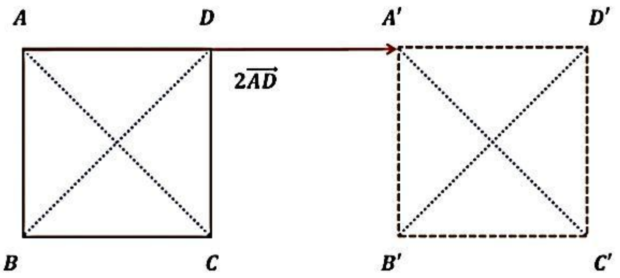


Figure 3

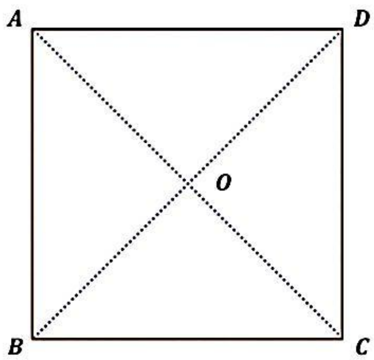


Figure 4

5. La rotation

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$, Soit un point A fixé et soit α un réel donné.

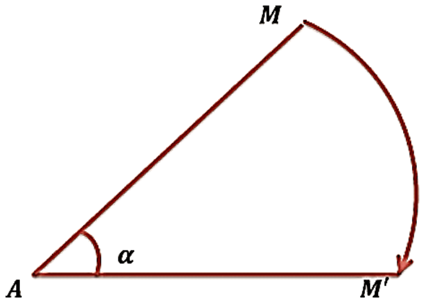
On appelle une rotation de centre A et d'angle α et on la note $R_{(A,\alpha)}$, la transformation dans le plan $\mathcal{P}$ qui laisse le point A invariant, et qui à tout point M distinct de A associe le point M' tel que ;

$AM' = AM$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha$.

On écrit ;

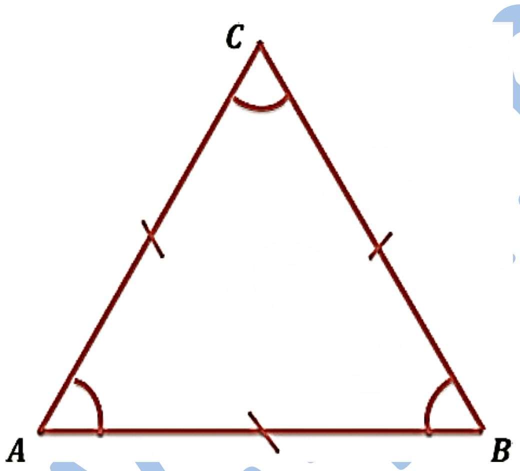
$$\boldsymbol{R_{(A,\alpha)}(A) = A \ \ et}$$

$$\boldsymbol{R_{(A,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha \end{cases}}.$$



Exemple 21

Soit ABC un triangle équilatéral direct



$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(B) = C$$

$$\begin{cases} CA = CB \\ (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow R_{\left(C;-\frac{\pi}{3}\right)}(B) = A$$

Exemple 22

Soit ABC un triangle non aplati. Construire l'image de ABC par $R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

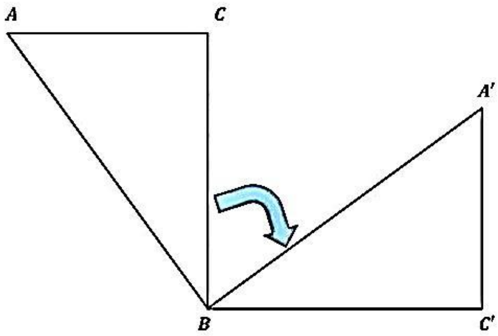
Solution

$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(B) = B$;

$$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(A) = A' \Longrightarrow \begin{cases} BA = BA' \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} ;$$

$$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(C) = C' \Longrightarrow \begin{cases} CA = CA' \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} ;$$

$R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}(ABC) = A'BC'\ (figure)$.



Exemple 23

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

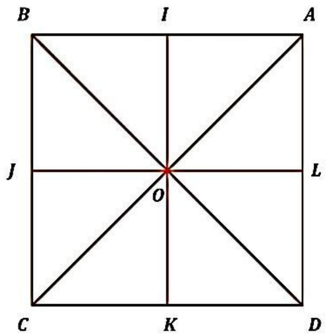
I, J, K et L sont les milieux respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Déterminer le centre et les angles des rotations R_1 et R_2 tel que ;

$R_1(A) = B$, $R_1(B) = C$, $R_1(C) = D$ et $R_1(D) = A$

$R_2(I) = L$, $R_2(L) = K$, $R_2(K) = J$ et$R_2(J) = I$

Solution



Soit $R_1 = R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$, il en résulte que ;

$R_1(A) = B$ car $\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_1(B) = C$ car $\begin{cases} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_1(C) = D$ car $\begin{cases} OC = OD \\ \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_1(D) = A$ car $\begin{cases} OD = OA \\ \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Soit $R_2 = R_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$, il en résulte que ;

$R_2(I) = L$ car $\begin{cases} OI = OL \\ \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OL}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_2(L) = K$ car $\begin{cases} OL = OK \\ \left(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OK}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_2(K) = J$ car $\begin{cases} OK = OJ \\ (\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OJ}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$R_2(J) = I$ car $\begin{cases} OJ = OI \\ (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OI}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$.

a) Propriétés

1° $R_{(A,\alpha)}(M) = M' \Longrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \alpha \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} AM' = AM \\ \left(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM}\right) = -\alpha \end{cases} \Longrightarrow R_{(A,-\alpha)}(M') = M.$

La rotation $R_{(A,\alpha)}$ est une bijection et sa bijection réciproque est une rotation de même centre et d'angle $-\alpha$ (opposé de α) ; $\left(R_{(A,\alpha)}\right)^{-1} = R_{(A,-\alpha)}$.

2° Si un cercle $(\mathcal{C})$ a pour centre le point A, alors $(\mathcal{C})$ est globalement invariante par $R_{(A,\alpha)}$.

b) La rotation conserve ;

a- La distance : *(la rotation est une isométrie)*

$R_{(A,\alpha)}(M, N) \longrightarrow (M', N') \Longrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

b- Le parallélisme :

$$(\Delta_1) \mathbin{//} (\Delta_2) \; et \; R_{(A,\alpha)}: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \mathbin{//} (\Delta'_2)$$

c- L'orthogonalité :

$(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \; et \; R_{(A,\alpha)}: (\Delta_1, \Delta_2) \longrightarrow (\Delta'_1, \Delta'_2) \Longrightarrow (\Delta'_1) \perp (\Delta'_2)$

d- Le contact :

$F = E \cap G \Longrightarrow$

$R_{(A,\alpha)}(F) = R_{(A,\alpha)}(E) \cap R_{(A,\alpha)}(G)$.

e- L'alignement :

A, B et C trois points alignés $\Longrightarrow$ $R_{(A,\alpha)}(A)$, $R_{(A,\alpha)}(B)$ et $R_{(A,\alpha)}(C)$ sont alignés.

f- Le barycentre :

$G = bar$

A	B	C
α	β	γ

$\Longrightarrow$

$R_{(A,\alpha)}(G) = bar$

$R_{(A,\alpha)}(A)$	$R_{(A,\alpha)}(B)$	$R_{(A,\alpha)}(C)$
α	β	γ

g) L'orientation d'un angle :

La réflexion conserve la mesure d'un angle orienté;

(*Un angle direct a pour image un angle direct, et un angle indirect a pour image un angle indirect*).

$R_{(A,\alpha)}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Propriété angulaire

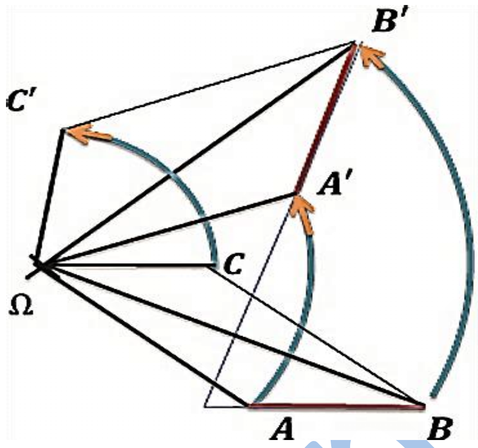
Si $R_{(\Omega,\alpha)}: (A, B) \longrightarrow (A', B')$,

Alors ; $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) = \alpha$

Démonstration

Soit C le point tel que ΩABC est un parallélogramme. Donc $C' = R_{(\Omega,\alpha)}(C)$ est le point tel que $\Omega A'B'C'$ est un parallélogramme, d'où ;

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega C'}\right) = \alpha.$



Remarques

A- Si Ω est le centre d'une rotation R, telle que ;

$R(M) = M'$,

Alors Ω est situé sur la médiatrice de $[MM']$.

B- Une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ s'appelle un quart de tour direct.

C- Une rotation d'angle π est une symétrie centrale dont le centre est le celui de la rotation.

$$\boldsymbol{R_{(\Omega,\pi)} = S_{\Omega}}.$$

D- Une rotation d'angle 0 est l'identité du plan $Id_{\mathcal{P}}$.

Exemple 24

A. Soient A et B deux points distincts d'un cercle Γ de centre O non diamétralement opposés.
Pour tout point M de Γ autre que A et B on désigne par H l'orthocentre de AMB. Soit enfin C le symétrique de A par rapport à O.
1) a) Montrer que (MH) / / ((BC).
b) Montrer que (BH) / / (CM).
c) En déduire la nature du quadrilatère MHBC.
2) a) Quelle est l'image d M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$?
b) Quel est l'ensemble des points H lorsque M décrit Γ sauf A et B ? Dessiner cet ensemble.

B. Soit ABCD un parallélogramme de centre O ; soit I un point du segment [AB] et J un point du segment [BC].
On note s la symétrie de centre O, soient K et L les images respectives de I et J par s.
Montrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.
Quelle est l'image de la droite (AB) par s ?
1) Montrer que K appartient à (CD).
2) Montrer que L appartient à (AD).

C. ABCD étant un parallélogramme, on note A' et C' les symétriques respectifs de A et C par rapport à (BD).

1) Faire une figure.

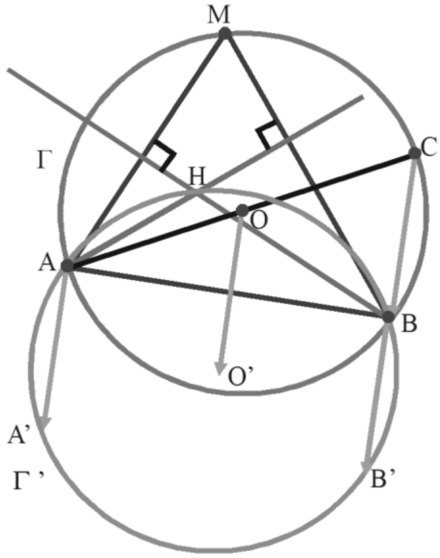
2) Montrer que le milieu de [AC] est encore celui de [A'C'], que peut-on déduire pour AA'CC' ?

3) Montrer que AC = A'C', que peut-on déduire pour AA'CC' ?

Solution

A. 1) (CB) et (MH) sont perpendiculaires à la même droite (AB).
Donc (MH) // (CB).

b) De façon analogue (BH) et (CM)



sont perpendiculaires à la même droite (AM), donc (BH) // (CM).

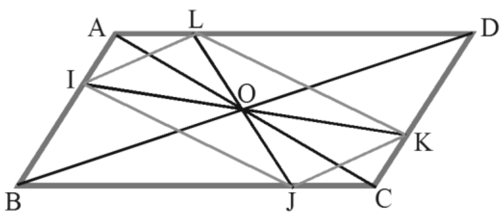
c) MHBC a ses côtés deux à deux parallèles, donc c'est un parallélogramme.

2°) a) MHBC est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow t_{\overrightarrow{BC}}(M) = H$.

b) Lorsque M décrit Γ, H décrit t(Γ) qui est un cercle Γ' de centre O' = t(O) et qui a le même rayon.

B. 1) La symétrie S de centre O transforme I en K et J en L.
Donc O est le milieu commun de [IK] et [JL],
d'où IJKL est un parallélogramme de centre O.

2) a) le centre O de ABCD est le milieu commun de [AC] et [BD].
S transforme donc A en C ; B en D et par suite (AB) en (CD).

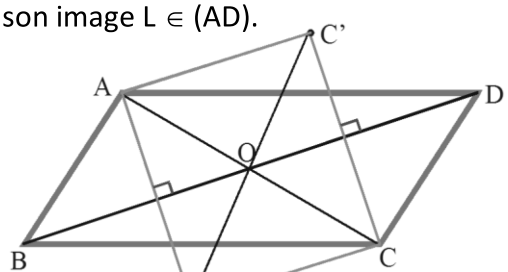


b) I est un point de (AB), donc son image K par s est un point de l'image de (AB).
C'est- à dire de (CD) ; K $\in$ (CD).

3) utilisons un procédé analogue à celui de la question 2° ; on a vu que S transforme A en C ; donc C en A ; B en D.
Elle transforme donc (BC) en (AD), d'autre part J $\in$ (BC) et son image L $\in$ (AD).

C. 1) Construction :

2) une réflexion conserve les milieux.



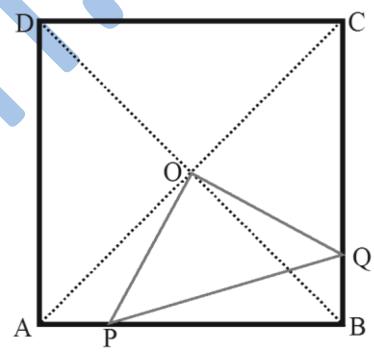
Le milieu de [AC] a pour image le milieu de [A'C'].
Or le milieu de [AC] est le centre O
du parallélogramme ABCD,
il appartient à la diagonale (BD),
il est donc sa propre image dans
la réflexion d'axe (BD).
Donc O est encore le milieu de [A'C'], le quadrilatère AA'CC4 est donc un parallélogramme.
3) une réflexion conserve les distances ; A a pour image A' ; C a pour image C' donc AC = A'C'.
Le parallélogramme AA'CC' a ses diagonales de même longueur c'est un rectangle.

Exemple 25

Soit ABCD un carré direct $\left(\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{+\pi}{2}\right)$; Soit P un point de [AB] et B le point du segment [BC] tel que BQ = AP ; On note O le centre de ABCD ; On désigne par r le quart de tour direct de centre O.

1) a) Quelle est l'image de A par r ?
   b) Quelle est l'image de B par r ?
   c) Déduire de a) et b) l'image par r du segment [AB].
2) a) Quelle est l'image de P par r ?
   b) Montrer que le triangle OPQ est rectangle isocèle en O.

Solution



1) a) O est le centre du carré direct ABCD ; on a donc :
$$\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}\ ;\overrightarrow{OB}\right) = \frac{+\pi}{2} \end{cases}$$
L'image de A par r est donc B.

b) On a de même $\begin{cases} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OB}\ ;\overrightarrow{OC}\right) = \frac{+\pi}{2} \end{cases}$; l'image de B est donc C.

c) Il résulte des questions a) et b) que r([AB]) = [BC].

2) a) P $\in$ [AB] $\Rightarrow$ r(P) $\in$ [BC] et comme AP = BQ ; on trouve que r(P) = Q.

b) Puisque r transforme P en Q ; on a : $\begin{cases} OP = OQ \\ \left(\overrightarrow{OP}\ ;\overrightarrow{OQ}\right) = \frac{+\pi}{2} \end{cases}$

Il en résulte que OPQ est isocèle rectangle en O.

Exercices généraux

Exercice 1

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $A(7;\ -2)$, $B(4;5)$ et $C(-1;3)$.

Déterminer les coordonnées des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.

Exercice 2

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

1°/ Déterminer l'expression analytique de la translation $t_{\vec{u}}$.

2°/ Utiliser cette expression pour calculer les coordonnées des points A' et B' image des points $A(1\ ;\ -5)$ et $B(3, -1)$.

Exercice 3

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit D la droite d'équation ;

$5x - 3y + 3 = 0.$

Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

3°/ La translation transforme un cercle $(\mathcal{C})$ en un cercle $(\mathcal{C}')$ de même rayon, le centre O de $(\mathcal{C})$ a pour image le centre O' de $(\mathcal{C}')$.

Exercice 4

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit la droite (D) d'équation cartésienne ;

$3x + 2y - 1 = 0.$

1° Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$;

2° Déterminer une équation du cercle $(\mathcal{C}')$ image du cercle $\mathcal{C}(A, 3)$ tel que $(-4, 1)$.

Exercice 5

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit (d) une droite d'équation ; $4x + 5y - 2 = 0$ et $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation de (d') image de (d) par la translation $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O.

Construire l'image de $ABCD$ par la translation

$t_{\overrightarrow{AO}} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$.

Exercice 7

Soit ABC un triangle non aplati, G son centre de gravité, A' le milieu de $[BC]$, C' le milieu de $[AB]$ et B'le milieu de $[AC]$.

Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie qui transforme les sommets du triangle en milieux de ses côtés.

Exercice 8

ABC est un triangle non aplati, on note Δ_A, Δ_B et Δ_C les hauteurs issues respectivement de A, B et C.

Caractériser une homothétie qui transforme les hauteurs de ABC en médiatrices de ABC.

Exercice 9

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, soit I le milieu $[AB]$, J le milieu $[CD]$ et O le l'intersection de ses diagonales.

Montrer que O, I et J sont alignés.

Exercice 10

Soit $ABCD$ et $AEFG$ deux parallélogrammes tels que ;

$E \in [AB]$, $G \in [AD]$ et $(EG)//(BD)$.

Montrer que A, F et C sont alignés.

Exercice 11

Soit ABC un triangle non aplati.

Et soit $I = B * C$, $J = A * C$ et $K = A * B$.

Soit P le point d'intersection de la parallèle à (BJ) passant par K et la parallèle à (CK) passant par J

1) Faire une figure ;
2) Démontrer que A, P et I sont alignés.

Exercice 12

P et Q sont deux points.

$G = bar$

P	Q
-3	1

Soit la fonction $f(M) = M'$ tel que ;

$\overrightarrow{PM'} = \overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{PM}$.

Démontrer que f est une homothétie dont on caractérisera *(centre et rapport)*.

Exercice 13

ABC est un triangle non aplati.

$A' = B * C$, $B' = A * C$ et $C' = A * B$.

P est un point du plan $\mathcal{P}$.

Les droites (Δ_A), (Δ_B) et (Δ_C) passent respectivement par A, B et C et sont parallèles respectivement à (PA'), (PB') et (PC').

Soit G le centre de gravité de ABC.

1°/ Montrer que les droites (Δ_A), (Δ_B) *et* (Δ_C) sont sécantes en un point Q ;

2°/ Faire une figure ;

3°/ Justifier que P, Q et G sont alignés.

Exercice 14

Soit ABC un triangle non aplati.

$I = B * C$; $P \in [IC]$; $Q \in [BI]$ et $M \in [AI]$, tel que ; $(MP)//(AC)$ et $(MQ)//(AB)$.

1°/ Faire une figure ;

2°/ Soit h l'homothétie de centre I qui transforme A en M, déterminer $h(B)$ et $h(C)$.

3°/ Montrer que $I = P * Q$.

Exercice 15

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit les points $A(5, -3)$ et $B(7, 2)$.

1°/ Donner les coordonnées de A' et B' images des point A et B par l'homothétie h de centre $\Omega(4, -3)$ et de rapport $k = \frac{1}{3}$;

2°/ Donner une équation de (AB) ;

3°/ Donner une équation de (Δ) image de (AB) par l'homothétie h.

Exercice 16

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$ sont donnés $A(2,3)$; $B(1,-2)$; $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

1°/ Vérifier que $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan ;

2°/ Donner une équation de (AB) dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$;

3°/ Donner une équation de (AB) dans le repère $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$;

4°/ Soit h l'homothétie de centre $\Omega(1,-3)$ dans $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et de rapport 2, donner les coordonnées de Ω dans $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$;

5°/ Déterminer de deux façons une équation de la droite (Δ) image de (AB) par $h = h_{(\Omega,2)}$.

Exercice 17

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les droites ;

$$(\Delta_1) : 2x + 3y - 5 = 0 ;$$

$$(\Delta_2) : 4x + 6y + 24 = 0 .$$

1°/ Quelle est la position relative de (Δ_1) et (Δ_2) ?

2°/ Déterminer le rapport k_1 de l'homothétie h_1 de centre $I(3,4)$ transformant (Δ_1) en (Δ_2).

3°/ Déterminer le centre J d'abscisse nul de l'homothétie h_2 de rapport $k_2 = 2$ transformant (Δ_1) en (Δ_2).

Exercice 18

Soit $ABCD$ un carré.

On définit l'application f par $f(M) = M'$ tel que ;

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$$

1°/ Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(D)$;

2°/ Construire A', B', C' et D' ;

3°/ Quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$;

4°/ Soit $G = bar$

A	B	C	D
1	-1	1	1

Exprimer $f(M)$ en fonction $\overrightarrow{MG}$;

Quelle est la nature de f ?

Exercice 19

$ABCD$ est un losange tel que ;

$$AB = 3 \ et \ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{2\pi}{3} \ [2\pi]$$

C' est l'image de C par le quart de tour direct de centre B. O est le point commun entre (CC') et (BD). A' est l'image de A par l'homothétie h de centre O qui transforme C en C'.

1°/ Montrer que (BD) est la médiatrice de $[A'C']$;

2°/ Déterminer la nature du quadrilatère $AC'A'C$;

3°/ Déterminer le rapport k de l'homothétie h.

Exercice 20

Soit ABC un triangle non aplati. Les points P, Q et R sont tels que ;

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ ; \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\ ; \quad \overrightarrow{BR} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Soit T le milieu de $[PB]$ et S le milieu de $[BR]$.

1°/ Faire une figure ;

2°/ 1°) Déterminer le rapport k de l'homothétie h de centre A qui transforme ;

A°/ Q en C,

B°/ T en P,

C°/ P en B.

2°) Déterminer le centre de l'homothétie h de rapport $\frac{3}{2}$ qui transforme ;

A°/ Q en C,

B°/ P en A,

C°/ R en C.

3°) déterminer les images par $h_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}$ de ;

A°/ La droite (BC),

B°/ Le segment $[AC]$,

C°/ Le triangle ABC.

Exercice 21

ABC est un triangle non aplati. E et F sont les points définis par ;

$$\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB} \qquad ; \quad \overrightarrow{AF} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AC}.$$

1°/ Faire une figure ;

2°/ Exprimer E comme barycentre de $(A; B)$;

3°/ Que peut-on dire des droites (CE) et (BF) ?

4°/ Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre A qui transforme B en E ;

5°/ Quelle est l'image de F par h ?

6°/ Existe-t-il une homothétie h' qui transforme B en C et F en E, si oui quels sont ses éléments caractéristiques ?

Exercice 22

ABC est un triangle non aplati.

A tout point M du plan $\mathcal{P}$ on associe le point M' tel que ; $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

Soit D le point du plan $\mathcal{P}$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1°/ Déterminer les points A', B', C'et D'.

2°/ Que représente A' pour A, B' pour B, C' pou C ?

3°/ Quelle est donc la nature de la transformation f qui à M associe M' ? Pourquoi ?

Exercice 23

Soit ABC un triangle quelconque.

1°/ Construire l'image de ABC par la symétrie S_A.

2°/ Quelle est la nature du quadrilatère $BCB'C'$? Prouvez-le.

Exercice 24

$ABCD$ est un parallélogramme.

Caractériser $S_A \circ S_B \circ S_C \circ S_D$.

Exercice 25

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit la droite d'équation (D): $3x + 2y - 4 = 0$, et le cercle d'équation ; $(\mathcal{C})$: $x^2 - 6x + y^2 - y = 0$.

1°/ Déterminer une équation de (D') image de (D) par la symétrie S_B tel que $B(-1; 2)$;

2°/ Donner une équation de $(\mathcal{C}') = S_B(\mathcal{C})$.

Exercice 26

$ABCD$ est un carré.

Déterminer la nature des transformations $S_{(AB)} \circ S_{(DC)}$ et $S_{(BC)} \circ S_{(AD)}$.

Exercice 27

ABC est un triangle non aplati et A' est le pied de la hauteur issue de A.

Caractériser $S_{(AA')} \circ S_{(BC)}$.

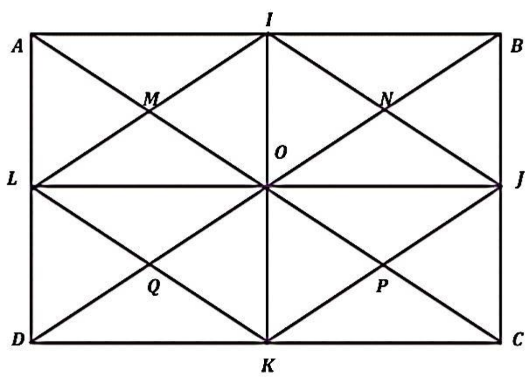
Exercice 28

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O, caractériser les transformations $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$;

Puis ; $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$.

Exercice 29

Sur la figure ci-dessous, déterminer la nature de chacune des transformations suivantes ;



d) $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AM}}$; $t_{\overrightarrow{AM}} \circ t_{\overrightarrow{JP}}$, $t_{\overrightarrow{MN}} \circ t_{\overrightarrow{PQ}}$;

e) $S_M \circ S_N$, $S_N \circ S_P$, $S_J \circ S_K$;
f) $S_{(MN)} \circ S_{(PQ)}$, $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$, $S_{(BC)} \circ S_{(IK)}$

Exercice 30

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

Déterminer à chaque fois la nature de la transformation f et construire l'image du carré $ABCD$ par f

1- $f = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$;
2- $f = S_{(DC)} \circ S_{(AC)}$;
3- $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)}$;
4- $f = S_{(BD)} \circ S_{(AC)}$.

Exercice 31

Soit ABC un triangle équilatéral direct. Montrer que ;

$$R_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}(B) = C \; et \; R_{\left(C;\,-\frac{\pi}{3}\right)}(B) = A$$

Exercice 32

Soit ABC un triangle non aplati.

Construire l'image de ABC par $R_{\left(B,-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Exercice 33

$ABCD$ est un carré direct de centre O.

I, J, K et L sont les milieux respectifs $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Déterminer le centre et les angles des rotations R_1 et R_2 tel que ;

$R_1(A) = B$, $R_1(B) = C$, $R_1(C) = D$ et $R_1(D) = A$

$R_2(I) = L$, $R_2(L) = K$, $R_2(K) = J$ et$R_2(J) = I$

Exercice 34

$ABCD$ est un carré direct. Les triangles ABE et BFC sont équilatéraux directs.

Montrer que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 35

ABC est un triangle rectangle direct. M est un point intérieur au triangle tel que $MA = 5cm$; $MB = 4cm$; $MC = 3cm$. Soit N le point du plan tel que AMN soit équilatéral direct.

1) Calculer les distances MN et NC ;
2) Quelle est la nature du triangle MNC ?
3) Déterminer une mesure de l'angle ANC ;
4) En déduire une valeur approchée de AC.

Exercice 36

ABC est un triangle quelconque ; on construit extérieurement les carrés $ABDE$ et $ACFG$.

Montrer que $BG = CE$ et $(BG) \perp (CE)$.

Symétries et translations

Exercice 38

ABCD est un rectangle de centre θ. Déterminer les transformations suivantes :

a) $S_{(AB)} \circ S_{(CD)}$; $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$; $S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$;
b) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{\theta}$; $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{\theta}$; $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{\theta}$;
c) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(DO)}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AC)}$;
d) $S_A \circ S_{\theta}$; $S_B \circ S_{\theta}$; $S_C \circ S_{\theta}$;
e) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{CD}}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$; $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$.

Homothéties

Exercice 39

Traduire par des égalités vectorielles les

phrases suivantes :

a) M' est l'image de M par l'homothétie de centre θ et de rapport 5.

b) Le point C a pour image D par l'homothétie de centre S et de rapport $\frac{1}{2}$.

c) L'homothétie de centre I et de rapport -3 transforme A en B.

Exercice 40

Interpréter en utilisant une homothétie les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AB} \ ; \ 2\overrightarrow{MN} = -5\overrightarrow{MP} \ ; \ \frac{3}{2}\overrightarrow{RS} = 4\overrightarrow{RG}.$$

Exercice 41

Soit l'homothétie de centre I et de rapport -2 ; A' ; B' ; C' sont les images des points A, B, C par cette homothétie.

Compléter les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{IB'} = ...\overrightarrow{IB} \ ; \ \overrightarrow{C'B'} = ...\overrightarrow{CB} \ ; \ \overrightarrow{A'B'} = ...\overrightarrow{AB}.$$

Exercice 42

Soient A ; B et C trois points deux à deux distincts.

Déterminer dans chacun des cas suivants le rapport de l'homothétie de centre A transformant B en C.

1)$\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB} = 0$; 2)$\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BA} = 0$; 3)$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$.

Exercice 43

Soient A, B et C trois points deux à deux distincts tels que : $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{BC}$.

Déterminer le rapport de :

a) L'homothétie de centre A qui transforme C en B.
b) L'homothétie de centre B qui transforme A en C.
c) L'homothétie de centre C qui transforme A en B.

Exercice 43

On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] ; et M un point du plan. Construire l'image de M par l'homothétie qui transforme A en C et B en D.

Exercice 44

On considère la figure suivante :

a) Trouver le centre de l'homothétie de rapport 3 qui transforme B en C.
b) Trouver le centre de l'homothétie de rapport $\frac{2}{3}$ qui transforme A en B.

Exercice 45

Soit ABC un triangle ; H son orthocentre, θ le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit. Une homothétie h transforme le triangle ABC en le triangle A'B'C'.Définir les images des points H ; θ ; I par cette homothétie.

Exercice 46

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)

Calculer les coordonnées du point M' image de M par l'homothétie de centre θ et de rapport 3.

Exercice 47

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On considère l'application h du plan dans lui-même qui à tout point M(x ; y) associe le point

M'(2x -1 ; 2y +3).

a) Démontrer qu'il existe un unique point I tel que h(I) = I.
b) Démontrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Exercice 48

Le plan est rapporté à un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. Soit f la transformation du plan qui à tout point M(x ; y) associe M'(-2x + 3 ; -2y -6). Démontrer que f est une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre.

Déterminer en fonction de x et y les coordonnées du point M''image de M par la transformation réciproque de f.

Exercice 49

ABC est un triangle ; M est un point du plan. On considère les transformations f, g et k tels que :

$f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ h_{(C\,;\,2)}$; $g = h_{(C\,;\,2)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$; $k = h_{(C\,;\,2)} \circ h_{(B\,;\,\frac{1}{3})}$.

Construire les images M_1 ; M_2 et M_3 du point M par les trios transformations f; g et k.

Rotations

Exercice 50

Soit OAB un triangle isocèle en O ; tel que $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$.

Déterminer les points : $r_{(\theta\,;\,\frac{\pi}{4})}(A)$ et $r_{(\theta\,;\,\frac{-\pi}{4})}(B)$.

Construire à la règle et au compas les points :

- $r_{(\theta\,;\,\frac{-\pi}{4})}(A)$; $r_{(\theta\,;\,\frac{\pi}{4})}(B)$; $r_{(A\,;\,\frac{3\pi}{4})}(B)$;
- $r_{(B\,;\,-\frac{3\pi}{8})}(A)$; $r_{(B\,;\,\frac{3\pi}{8})}(\theta)$; $r_{(A\,;\,-\frac{3\pi}{8})}(\theta)$

Exercice 51

Soit Soit ABCD un rectangle tel que : $Mes(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

Construire à la règle et au compas l'image de ce rectangle par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 52

Soit Δ une droite et θ un point extérieur à Δ.

1) a) Construire l'image Δ' de Δ par le quart de tour direct de centre θ; on écrira et justifiera le programme de construction.

b) Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur de Δ'.

Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté ($\vec{u}$; $\overrightarrow{u'}$) ?

2) Même question pour le quart de tour indirect de centre θ.

Exercice 53

Soit Δ une droite, θ un point extérieur à cette droite.

1) a) Construire l'image Δ' de Δ par la rotation de centre θ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

On écrira et justifiera le programme de construction.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u'}$ un vecteur directeur de Δ'.

Quelles sont les mesures principales possibles de l'angle orienté ($\vec{u}$; $\overrightarrow{u'}$) ?

2) Même question avec la rotation de centre θ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 54

Soit ABC un triangle équilatéral tel que

Mes($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) $= \frac{\pi}{3}$; G son centre de gravité et A'B'C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [AC] ; [AB].

Quelle est la nature des transformations f ; g et k ?

Quels sont les points $r_{(B\,;\,\frac{\pi}{3})}$ (C) ; $r_{(A\,;\,\frac{\pi}{3})}$ (B) ; $r_{(C\,;\,\frac{\pi}{3})}$ (A) ?

Déterminer le centre et l'angle d'une rotation qui transforme A en B ; B en C ; C en A.

Construire les points P ; Q et R tels que :

P = $r_{(A;\,\frac{\pi}{3})}$ (C); Q = $r_{(C\,;\,\frac{\pi}{3})}$ (B); R = $r_{(B\,;\,\frac{\pi}{3})}$ (A).

Démontrer que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 55

Soient A et A' deux points distincts et r une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ transformant A en A'.

Construire à la règle et au compas le centre de cette rotation.

Exercice 56

Soit ABCD un carré tel que $(AB\ ;\ AD) = \frac{\pi}{2}$

On note E ; F ; G et H les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA].

1) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et B en A. Déterminer son centre et son angle.

2) a) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme B en D et A en A, Déterminer son centre et son angle.

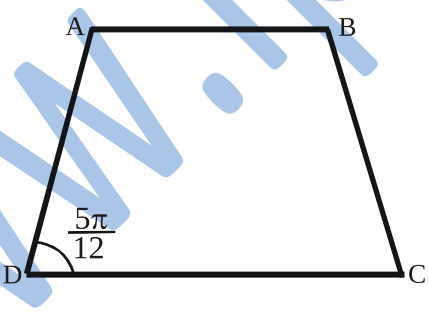
3) Montrer qu'il existe une rotation transformant A en D et G en F, Déterminer son centre et son angle.

4) a) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en E, Déterminer son centre.

b) soit α la mesure principale de son angle ; démontrer que $\tan(\frac{-\alpha}{2}) = 2$; en déduire à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de α.

Exercice 57

Soit ABCD un trapèze de bases [AD] et [BC], tel que $Mes(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}) = \frac{5\pi}{12}$.



1) Trouver une rotation transformant A en D et B en C. Préciser son centre et son angle.

2) Trouver une Rotation transformant A en C et B en D. Préciser son centre.

Exercice 58

ABC un triangle équilatéral direct, $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit, M un point de AC et I le point du segment [MB] tel que MI = MA.

1) Démontrer que le triangle AMI est équilatéral.

2) Déterminer l'image de I par la rotation de centre A transformant B en C.

3) En déduire que: MA + MC = MB.

Exercice 59

ABC un triangle équilatéral tel que Mes($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$) $= \frac{\pi}{3}$, G son centre de garvité ; A'; B'; C' les milieux respectifs des segments [BC] ; [AC] ; [AB].

Déterminer trois couples de droites (Δ ; Δ') telles que la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ soit l'application $s_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$.

Exercice 60

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{I}$; $\vec{J}$).

Soit r la rotation de centre θ et d'angle $\frac{\pi}{3}$, M un point de coordonnées (x ; y) ; I' ; J' ; M' les images respectives de I ; J ; et M par r.

Démontrer que le repère (O ; $\vec{I'}$; $\vec{J'}$) est orthonormé direct.

Démontrer que le point M' a pour coordonnées

(x ; y) dans le repère (O ; $\vec{I'}$; $\vec{J'}$).

Exprimer en fonction de x et y les coordonnées de M' dans le repère (O ; $\vec{I}$; $\vec{J}$).