XV- GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Faire savoir

Le cours

1. Détermination d'une droite dans l'espace

Une droite dans l'espace est déterminée par ;

A- Un vecteur directeur et un point :

$$(\boldsymbol{d}) : \left(\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix};\ A(2,0,-9)\right)$$

B- Deux points :

$$(\boldsymbol{d}) : \big(A(0,10,-3);\ B(1,-4,11)\big)$$

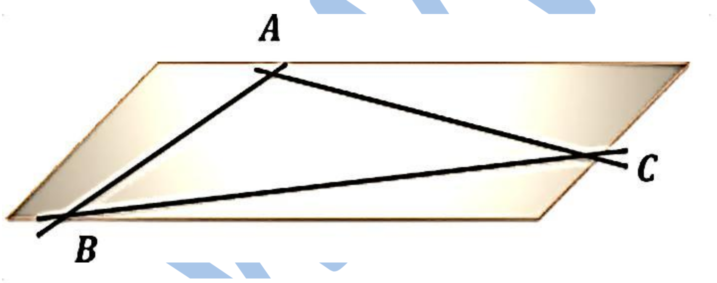
C- Un système d'équations de plans.

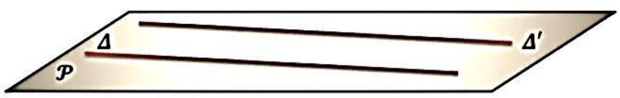
$$(\boldsymbol{d}) : \begin{cases}2x+3y-5z-7=0\\ x-4y+6z+1=0\end{cases}$$

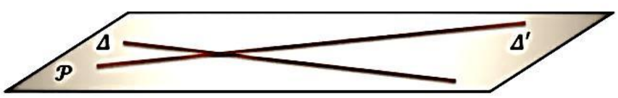
2. Détermination d'un plan dans l'espace

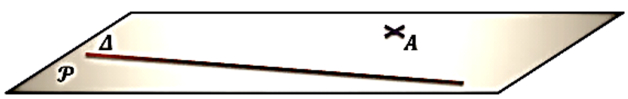
Un plan dans l'espace est déterminé par ;

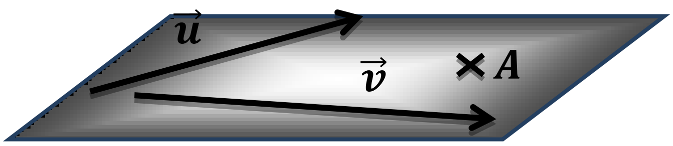
- **A-** Trois points non alignés
- **B-** Deux droites parallèles
- **C-** Deux droites sécantes
- **D-** Une droite et un point non situé sur la droite
- **E-** Un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires.







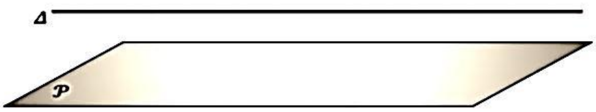




3. Positions relatives de droites et de plans

A- Plans et droites

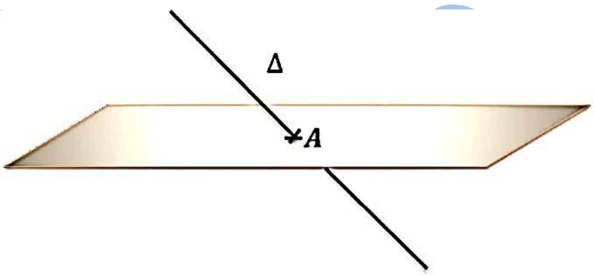
Une droite et un plan sont ou sécants, ou parallèles.



$(\Delta) \cap \mathcal{P} = \emptyset \Longrightarrow (\Delta)//\mathcal{P}$

$(\Delta) \in \mathcal{P} \Longrightarrow (\Delta)//\mathcal{P}$

(*La droite est contenue dans le plan*)

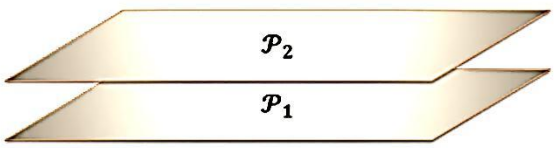


Δ coupe $\mathcal{P}$: $(\Delta) \cap \mathcal{P} = \{A\}$; on dit que (Δ) perce le plan

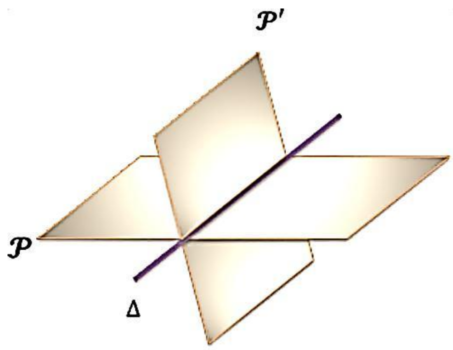
4. Plans et plans

Deux plans sont sécants ou parallèles.

L'intersection de deux plan est une droite ;



$\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2$

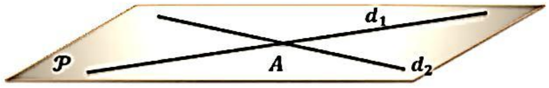


$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta$

5. Droites et droites

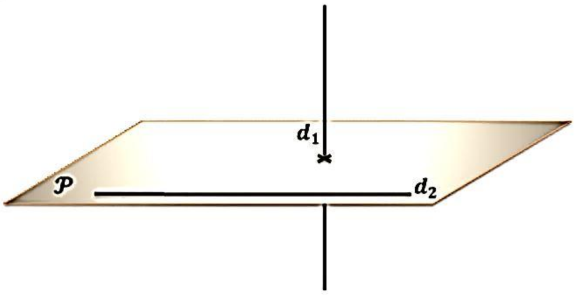
Deux droites dans l'espace sont coplanaires ou non coplanaires.

1- $(\boldsymbol{d_1}) \,//\, (\boldsymbol{d_2})$



2- $(\boldsymbol{d_1}) \cap (\boldsymbol{d_2}) = \{\boldsymbol{A}\}$

Dans les deux figures ci-dessus, les droites (d_1) et (d_2) sont dites coplanaires



3- $\begin{cases} (\boldsymbol{d_1}) \cap (\boldsymbol{d_2}) = \emptyset \\ (\boldsymbol{d_1}) \nparallel (\boldsymbol{d_2}) \end{cases}$

Dans la figure ci-dessus les droites (d_1) et (d_2) sont dites non coplanaires

Remarque

Si une droite (d) a deux points distincts contenus dans un plan $\mathcal{P}$, alors tous les points de la droite sont contenus dans ce plan (*la droite est incluse dans le plan*)

6. Le parallélisme dans l'espace

a) Droite et plan

Une droite (d) est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ si elle est parallèle à une droite de ce plan.

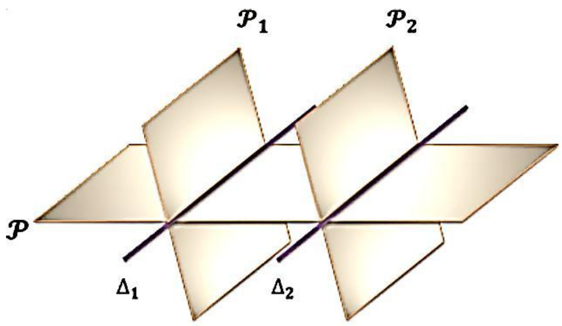
a- Conséquences

- Il existe une infinitude de droites passant par un point donné et parallèles à un plan donné.

- Il existe une droite et une seule passant par deux points donnés et parallèle à un plan donné.

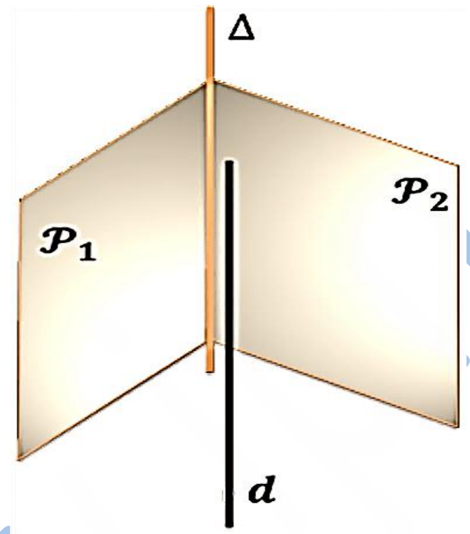
b- Propriétés

1° Un plan coupe deux plans parallèles suivant deux droites parallèles.



$$\left.\begin{cases} \mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P} = (\Delta_1) \\ \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P} = (\Delta_2) \end{cases}\right\} \Longrightarrow (\Delta_1)//(\Delta_2)$$

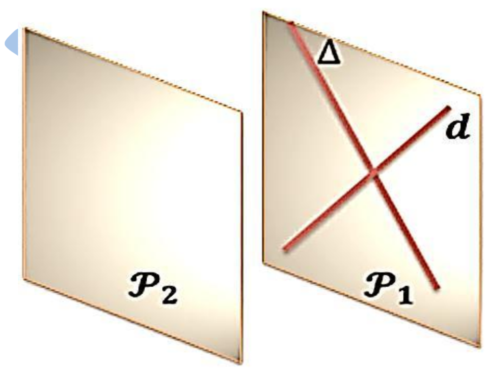
2° Si une droite (d) est parallèle à deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants suivant une droite (Δ), alors (d) est parallèle à $(\Delta) \;= \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

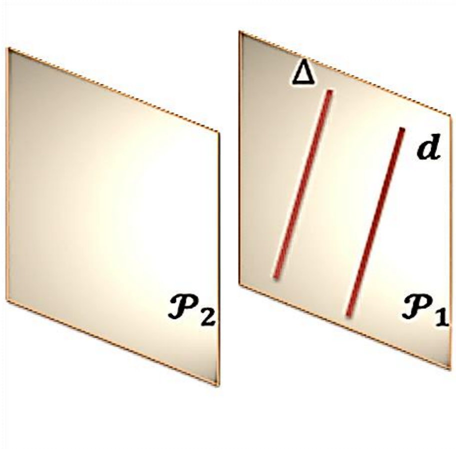


$$\left.\begin{cases} \mathcal{P}_1 // (d) \\ \mathcal{P}_2 // (d) \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = (\Delta) \end{cases}\right\} \Longrightarrow (d)//(\Delta)\,.$$

b) Plans

Deux plans sont parallèles si l'un d'eux est parallèle à deux droites sécantes ou deux droites parallèles appartenant à l'autre.





c) Théorème du toit

Si deux plans sécants contiennent deux droites parallèles, alors leur droite d'intersection est parallèle à ces deux droites.

a- Conséquences

A- Il existe un plan et un seul passant par un point donné et parallèle à un plan donné.

B- Il existe un plan et un seul parallèle à un plan donné et contenant une droite parallèle à ce plan donné.

C- Un plan coupe deux plans sécants suivant deux droites parallèles à la droite d'intersection des deux plans.

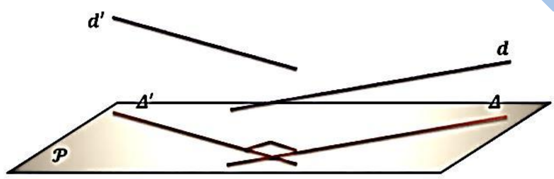
D- Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

E- Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

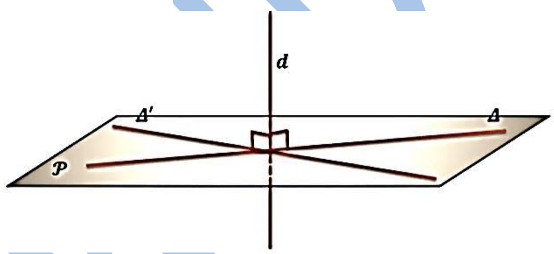
F- Un plan parallèle à deux droites sécantes est parallèle au plan de ces deux droites.

7. Orthogonalité dans l'espace

a) Deux droites sont orthogonales dans l'espace si leurs parallèles coplanaires (*qui passent par le même point*) sont perpendiculaires.



b) Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.



c) Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

8. Orthogonalité et parallélisme dans l'espace

a) Si (Δ) est parallèle à (Δ') et (d) est perpendiculaire à (Δ), alors (d) est aussi perpendiculaire à (Δ'), et tout plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à (Δ) est perpendiculaire à (Δ').

b) Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles toute droite (d) perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre, et tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

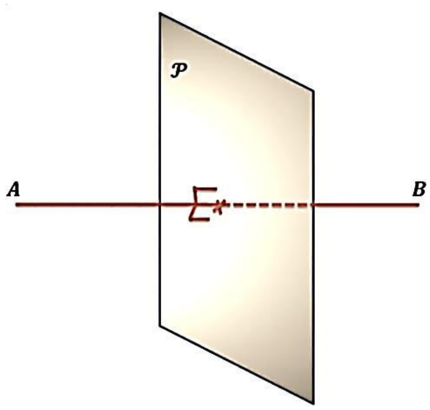
c) Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires à la même droite d ou au même plan Q, alors ils sont parallèles.

9. Plan médiateur

$\mathcal{P}$ est le plan médiateur du segment $[AB]$, s'il passe par le milieu de $[AB]$, et est perpendiculaire à son support (AB).

a) Propriété

Le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points de l'espace équidistants des deux extrémités de ce segment.

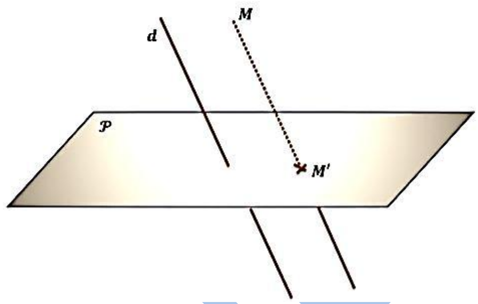


10. Projection

Définition

Soit un $\mathcal{P}$ plan et une droite (d) sécants en un point A. Pour tout point M de l'espace $\mathcal{E}$ la parallèle à (d) passant par M coupe $\mathcal{P}$ en M'.

Le point M' est appelé projeté de M sur $\mathcal{P}$ selon (d) ou parallèlement à (d).

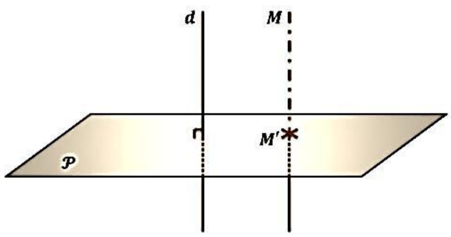


L'application $\wp$ qui à tout point $M \in \mathcal{E}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ est appelée projection de $\mathcal{E}$ sur (*ou dans*) $\mathcal{P}$ selon (d), et on note ;

$$\begin{aligned} \wp: \mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longrightarrow M' \end{aligned}$$

a) Cas particulier

Si $d \perp \mathcal{P}$ alors $\wp$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$ et M' est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.



Exemple 1

Soit le cube $ABCDEFGH$;

$(EF)//(HG)$; $(HG)//(AB)$;

(EG) et (HF) sont sécantes ;

(AG) et (EC) sont sécantes ;

(EG) et (DB) ne sont pas coplanaires ;

(FC) et (HA) ne sont pas coplanaires ;

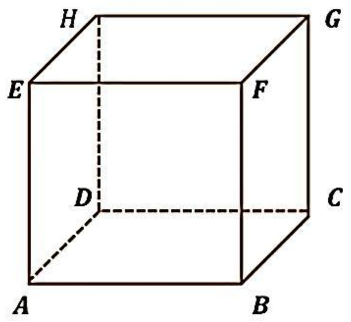
$(EGH)//(ABC)$; $(BFG)//(HED)$;

$(ADB) \perp (HGC)$; $(AHG) \perp (EFC)$;

(ABC) et (EFC) sont sécants;

$(HG)//(ABC)$; $(EB) \subset (ABF)$; $(HD) \perp (ABC)$.

(AG) et (HDC) sont sécantes.



Exemple 2

On considère un cube ABCDEFGH (voir figure).

1) citer toutes les arêtes du cube qui :

a) sont parallèles à (AB).

b) coupent (AB)

c) ne sont pas coplanaires avec (AB).

2) Citer toutes les faces du cube qui :

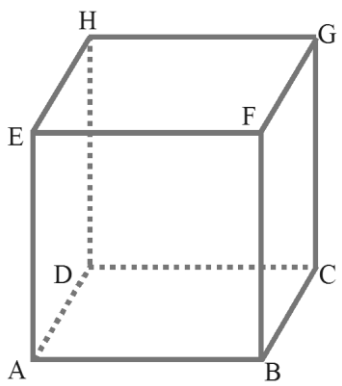
a) sont parallèles à (AB) ;

b) coupent (AB) ;

3) citer toutes les faces du cube qui

a) sont parallèles à (ABCD)

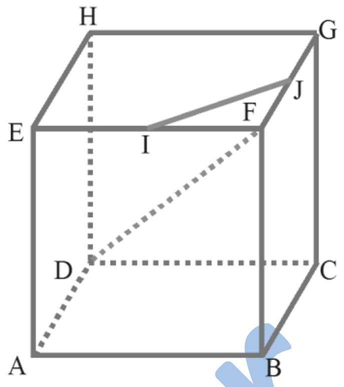
b) coupent (ABCD).



4) Soit I le milieu de [EF], J celui de [FG] ; les droites (DF) et (IJ) sont-elles coplanaires ?

www.ipn.mr

Solution



1) Un cube à 12 arêtes dont

4 arêtes sont parallèles à (AB) : (AB) ; (CD) ;(EF) et (GH) ;

b) 4 arêtes coupent (AB) : (BC) ; (BF) ; (AD) et (AE).

c) les 4 arêtes restantes ne sont pas parallèles à (AB)

et ne coupent pas (AB), donc elles ne sont pas

coplanaires avec (AB) : (CG) ; (DH) ; (FG) et (EH).

2) Un cube à six faces

a) quatre sont parallèles à (AB) : (ABCD) ; (ABEF) ; (CDHG)

et (EFGH).

b) les deux autres coupent (AB) ; ce sont (BCGF) et (ADHE).

3) a) Deux faces sont parallèles à (ABCD) : (ABCD) et (EFGH).

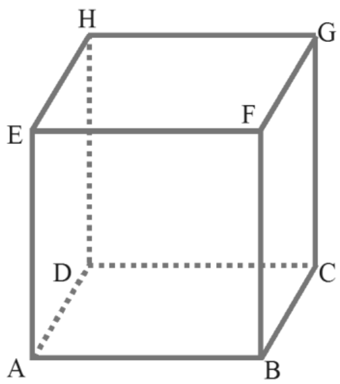
b) les quatre autres coupent (ABCD) : (BCFG) ; (ADHE) ; (CDHG) et (ABFE).

4) si un plan contient les droites (IJ) et (DF) ; alors il contient en particulier les trois points I ; J et F ; ce plan est alors le plan (EFGH).

Mais D n'appartient pas à (EFGH) donc (IJ) et (DF) ne sont pas coplanaires.

www.lpm.mr

Exemple 3



La figure est celle de l'application 1.

Le côté du cube mesurant 4 cm.

On considère les points I de [AB], et J de [BC] tel que :

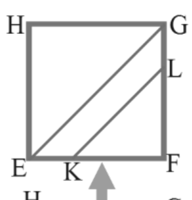
BI = BJ = 1 cm, ainsi que les points K de [EF] et L de [FG]

tel que : EK = LG = 1 cm.

1) Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.

2) Montrer que les droites (KL) et (EG) sont parallèles ;

3) Déduire des questions précédentes que les droites (IJ) et



(KL) sont parallèles.

Solution

1) I $\in$ (AB) ; J $\in$ (BC), donc les cinq points A ; B ; C ; I et J sont coplanaires.

Dans le triangle ABC on a : $\frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC} = \frac{1}{4}$; de plus I et J appartiennent aux

segments [BA] et [BC]. Donc, d'après la réciproque de Thalès,

(IJ) et (AC) sont parallèles.

2) Comme dans la question 1), mais dans le triangle EFG on a :

$\frac{FK}{FE} = \frac{FL}{FG} = \frac{3}{4}$; K $\in$ [EF] ; L$\in$ [FG] ; il en résulte que (KL) et (EG) sont parallèles.

3) On sait que ACGE est un parallélogramme (propriété du cube) ;

donc (EG) et (AC) sont parallèles ; et on a : (KL)$/\!/$(EG) ; (EG)$/\!/$(AC) et

(AC)$/\!/$(IJ). Il en résulte que (KL) et (IJ) sont parallèles.

Exemple 4

Soit ABCD un tétraèdre régulier (toutes les arêtes sont de même longueurs) ; Soient J et K les milieux respectifs de [CD] et [BC] et H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

1) Montrer que le plan médiateur de [CD] est le plan (ABJ).

2) Montrer que (AH) est orthogonale à (CD° et en déduire que H appartient au plan (ABJ) puis que H appartient à al droite (BJ).

3) Montrer que H appartient à (DK).

4) Que représente H pour le triangle (BCD) ?

5) Calculer en fonction de l'arête a du tétraèdre les distances BH et AH.

Solution

1) BC = BD ; AC = AD ; JC = JD, donc le plan médiateur de [CD] est le plan (ABJ).

2) (AH) est orthogonale au plan (BCD) ; donc (AH) est orthogonale à (CD), donc H appartient à l'unique plan qui passe par A et est orthogonal à (CD) ; c'est-à-dire plan médiateur de [CD] qui est (ABJ).

On vient de voir que H appartient au plan (ABJ), or H appartient par définition au plan (BCD), donc H appartient à la droite d'intersection des plans (ABJ) et (BCD) qui est (BJ).

3) KB = KC ; AB = AC ; DB = DC, donc le plan médiateur de[BC] c'est le plan ADK; (AH) est orthogonal à (BCD) donc à (BC); H appartient donc à l'unique plan qui passé par A et est orthogonal à (BC) c'est-à-dire (ADK). H appartient à la fois à (ADK) et à (BCD), donc H appartient à leur droite d'intersection qui est (DK).

4) H est commun aux médianes (BJ) et (DK) du triangle (BCD) ; H est donc, le centre de gravité du triangle (BCD).

5) BCD est équilatéral de côté a ; sa hauteur BJ vaut donc $\frac{a\sqrt{3}}{2}$;

H est le centre de gravité de BCD.

Donc, BH = $\frac{2}{3}$ BJ ; d'où BH = $\frac{2}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

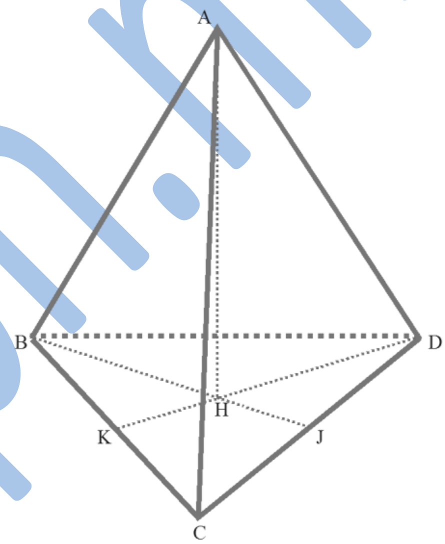
(AH) est orthogonale au plan (BCD), donc en particulier à (BH).

Dans le triangle ABH rectangle en H, on a :

$AH^2 = AB^2 - BH^2$

$= a^2 - (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}\,a^2.$

Donc, AH = $a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; BH = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; AH = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.



11. Les vecteurs dans l'espace

Définition

L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{V}_3$

a) Base de $\mathcal{V}_3$

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tous non nuls de $\mathcal{V}_3$ et deux-à-deux linéairement indépendants.

Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est alors appelé base de l'ensemble des vecteurs de l'espace $\mathcal{V}_3$.

b) Composantes d'un vecteur dans $\mathcal{V}_3$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base de $\mathcal{V}_3$, signifie que pour tout vecteur $\vec{e} \in \mathcal{V}_3$, il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que ;

$\vec{e} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w}.$

Inversement, soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathcal{V}_3$, et soit (α, β, γ) un triplet de réels. Il existe un seul vecteur $\vec{e}$ de $\mathcal{V}_3$ tel que ; $\vec{e} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w}$.

Le triplet de réels (α, β, γ) est appelé composantes ou coordonnées du vecteur $\vec{e}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathcal{V}_3$, et on note ;

www.ipn.mr

$\vec{e}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, l'expression $\vec{e} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ est la décomposition du vecteur $\vec{e}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Remarque

$$\boldsymbol{\vec{e} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \Leftrightarrow \vec{e}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}.$$

c) Repère de l'espace $\mathcal{E}$

Définition

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$ et O un point quelconque de l'espace.

Le quadruplet $(O;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est appelé repère de l'espace $\mathcal{E}$.

Remarque

Si A, B, C et D sont quatre points distincts et non coplanaires, alors le triplet $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ forme une base pour $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$ et le quadruplet $\left(O;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ constitue un repère de l'espace $\mathcal{E}$.

d) Coordonnées d'un point dans l'espace $\mathcal{E}$

Soit $(O;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$, et soit un point $M \in \mathcal{E}$.

Soit x, y et z les réels tels que ;

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{u} + y.\vec{v} + z.\vec{w}$.

Le triplet (x, y, z) est appelé coordonnées du point M dans le repère $(O;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de l'espace $\mathcal{E}$ et on note ; $M(x, y, z)$.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \text{ est appelé abscisse du point } M} \\ \boldsymbol{y \text{ est appelé ordonnée du point } M}. \\ \boldsymbol{z \text{ est appelé la cote du point } M} \end{cases}$$

Remarque

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \Leftrightarrow\ M(x, y, z)}.$$

e) Base orthonormée de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$

Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$ telle que ;

$$\begin{cases} \boldsymbol{\vec{u} \perp \vec{v},\ \vec{u} \perp \vec{w} \text{ et } \vec{v} \perp \vec{w}} \\ \boldsymbol{\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1} \end{cases}.$$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est alors appelé **une base orthonormée** de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$.

f) Repère orthonormé de l'espace $\mathcal{E}$

O est un point quelconque de l'espace, et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée de $\boldsymbol{\mathcal{V}_3}$,

Alors $(O;\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est **un repère orthonormé** de l'espace $\mathcal{E}$.

g) Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Soit dans l'espace, une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ et passant par le point $M(x_0, y_0, z_0)$.

Pour tout $M \in D$, on a ; $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ tel que $k \in \mathbb{R}$.

www.lpn.mr

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow D: \begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + k.a} \\ \boldsymbol{y = y_0 + k.b} \\ \boldsymbol{z = z_0 + k.c} \end{cases}$$

Cette écriture est appelée une représentation paramétrique de la droite (D) dans l'espace $\mathcal{E}$.

Exemple 5

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on a la droite Δ passant par le point $A(7;\ -4;\ 5)$, et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$,

Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

Solution

$$\Delta: \begin{cases} \boldsymbol{x = 7 - 6t} \\ \boldsymbol{y = -4 + 3\alpha} \\ \boldsymbol{z = 5 - 8\alpha} \end{cases}.$$

Exemple 6

Soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

$$(D): \begin{cases} x = 9 - 7\beta \\ y = 1 + 3\beta \\ z = -3 + 2\beta \end{cases}.$$

Donner une équation cartésienne de cette droite.

Solution

$$\begin{cases} x = 9 - 7\beta \\ y = 1 + 3\beta \\ z = -3 + 2\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 9 - 7\beta \\ y = 1 + 3\beta \\ 2z = -6 + 4\beta \end{cases} \Longrightarrow$$

$x + y + 2z = 4 \Longrightarrow \boldsymbol{(D): x + y + 2z - 4 = 0}$.

Remarque

Si la droite (Δ) a pour équation cartésienne ;

$ax + by + cz + d = 0$, alors (Δ) a pour vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exemple 7

Soit (D) la droite d'équation cartésienne ;

$5x + 4y - 3z + 11 = 0$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par $A(1, -4, 2)$ et orthogonale à (D).

Solution

On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal à (D), est un vecteur directeur de (Δ).

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AM} = t.\vec{u} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -4 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x = -1 - 5t \\ 2y = -8 + 8t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Longrightarrow$$

www.ipn.mr

$\Longrightarrow -x+2y+z=7 \Longrightarrow (\Delta)\colon \boldsymbol{x-2y-z+7=0}$.

Exemple 8

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(7,4,3)$, $B(-5,2,-6)$, donner l'équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}$ du segment $[AB]$.

Solution

Soit $M(x,y,z)\in\mathcal{P} \Longrightarrow AM=BM \Longrightarrow AM^2=BM^2$

$$\Longrightarrow (x-7)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=(x+5)^2+(y-2)^2+(z+6)^2$$

$$\Longrightarrow x^2-14x+49+y^2-8y+16+z^2-6z+9=x^2+25+y^2+4+z^2+36$$

$$\Longrightarrow -14x-8y-6z=25+4+36-49-16-9$$

$$\Longrightarrow -14x-8y-6z=25+4+36-49-16-9$$

$$\Longrightarrow -14x-8y-6z=-9$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}:14x+8y+6z+9=0}$$

Exemple 9

Soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

$$(D)\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=-3+t, \\ z=2+5t \end{cases}$$

Et (Δ) une droite dont l'équation cartésienne est ;

$(\Delta)\colon x+2y+z-5=0$.

Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H.

Solution

$H=(D)\cap(\Delta) \Longrightarrow H(x_H,y_H,z_H)$ vérifie les équations des deux droites.

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=-3+t \\ z_H=2+5t \end{cases} \boxed{1} \text{ car } H\in(D)\,;$$

$x_H+2y_H+z_H-5=0\ \boxed{2}$ car $H\in(\Delta)$

$\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ $\Longrightarrow 1+2t+2(-3+t)+5t-5=0$

$\Longrightarrow 9t-8=0$

$$\Longrightarrow t=\frac{8}{9} \Longrightarrow \begin{cases} x_H=1+\dfrac{16}{9}=\dfrac{25}{9} \\ y_H=-3+\dfrac{8}{9}=-\dfrac{19}{9} \\ y_H=2+\dfrac{40}{9}=\dfrac{58}{9} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{H\left(\frac{25}{9},\frac{-19}{9},\frac{58}{9}\right)}}$$

Exercices généraux

Exercice 1

www.ipn.mr

Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on a la droite Δ passant par le point $A(6,-5,2)$, et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\8\\-1\end{pmatrix}$,

Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

Exercice 2

Soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

$(D): \begin{cases} x = 1 + 2\beta \\ y = -3\beta \\ z = 1 + 2\beta \end{cases}$.

Donner une équation cartésienne de cette droite.

Exercice 3

Soit (D) la droite d'équation cartésienne ;

$3x - 2y + z - 1 = 0$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par $A(2,0,-3)$ et orthogonale à (D).

Exercice 4

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on donne les points $A(3,-5,2)$, $B(4,1,7)$, donner l'équation cartésienne du plan médiateur $\mathcal{P}$ du segment $[AB]$.

Exercice 5

Soit (D) une droite dont une représentation paramétrique est ;

$(D): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t, \\ z = 2 + 5t \end{cases}$

Et (Δ) une droite dont l'équation cartésienne est ;

$(\Delta): x + 2y + z - 5 = 0$.

Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H.

Exercice 6

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.

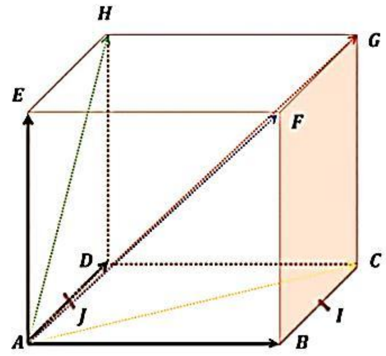
On suppose que l'espace est muni du repère orthonormé $(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1° Déterminer les coordonnées des vecteurs ; $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AH}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, puis en déduire les coordonnées de A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

2° Donner une équation des droites (BG) et (DH).

3° Soit les points ; I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AD]$. (DI) est-elle orthogonale à (CJ) ?

www.ipm.mr



Exercice 7

$ABCD$ désignant un tétraèdre, soit I le milieu de$[BC]$.

Déterminer la droite d'intersection des plans (ABD) et (AIJ) lorsque :

1° J est le point du segment (CD) tel que $CJ = \frac{1}{4}CD$;

2° J est le milieu de $[CD]$.

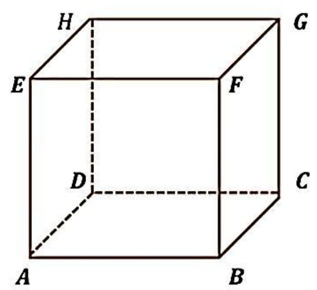
Exercice 8

Soit le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous et I le milieu de $[EF]$. Déterminer successivement :

1° L'intersection des plans $(ABEF)$ et $(BCGF)$;

2° L'intersection des droites (AI) et (BF) ;

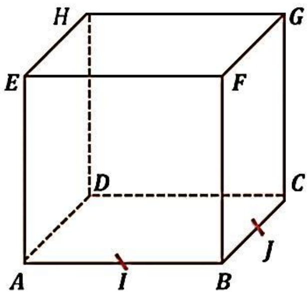
3° L'intersection de la droite (AI) et du plan $(BCGF)$.



Exercice 9

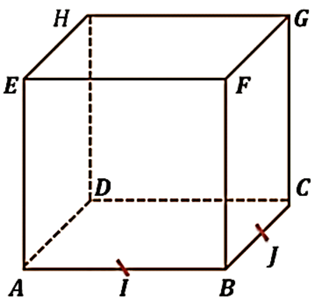
$ABCDEFGH$ est un cube, I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

Prouver que les droites (IJ) et (EG) sont parallèles.



Exercice 10

Dans le cube $ABCDEFGH$, prouver que les plans (ACH) et (EBG) sont parallèle.



Exercice 11

Dans le cube $ABCDEFGH$ précédent, prouver que la droite (AC) est parallèle au plan (EFG).

Exercice 12

L'aire latérale d'une sphère est $16\ m^2$

1° Quel est son rayon ? On donnera la valeur exacte du rayon, puis une valeur approchée à 1cm près.

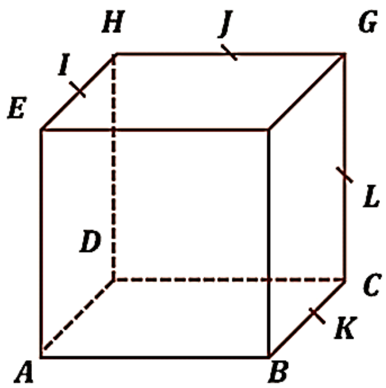
2° Quel est son volume ? On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 1cm près.

Exercice 13

$ABCDEFGH$ est un cube, I est le milieu de $[EH]$, J celui de $[GH]$, K celui $[BC]$ et L celui $[CG]$.

1° Les droites (IJ) et (BG) sont-elles sécantes ?

2° Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?*



www.lp.mr

Exercice 14

On considère un tétraèdre $ABCD$, et on désigne par E un point situé à l'intérieur du triangle BCD. Montrer que la droite (BD) et le plan (ACE) sont sécants et préciser leur point d'intersection.

Exercice 15

Dans un tétraèdre $ABCD$, on désigne par I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AD]$.

1° Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).

2° On désigne par K un point du segment $[AB]$ autre que son milieu. Les droites (KI) et (BC) se coupent en E, les droites (KJ) et (BD) en F.

Montrer que les droites (EF) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 16

$ABCDEFGH$ est un cube.

Dessiner la droite d'intersection des plans (ACH) et (EDF).

Exercice 17

Soit un tétraèdre $ABCD$, I le milieu de $[AB]$ et J celui de (CD).

1° Soit K le point de $[AC]$ défini par $CK = \frac{1}{4}CA$.

Dessiner les droites d'intersection du plan (IJK) successivement avec chacun des plans (ABC), (ACD), (BCD) et (ABD).

2° Refaire la figure en supposant cette fois que K est le milieu de $[AC]$.

Exercice 18

Soit un cube $ABCDEFGH$ et I le milieu de $[GH]$. Construire le point P d'intersection de la droite (AI) et du plan $(BCGF)$ de deux façons différentes :

1° En utilisant le plan (ABI) ;

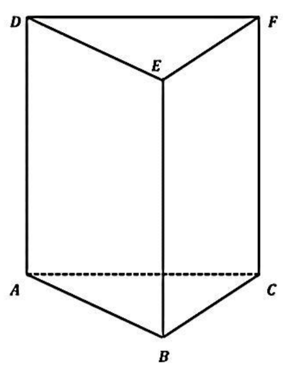
2° En utilisant le plan (AIJ), où J est le milieu $[CD]$.

Exercice 19

Soit un tétraèdre $ABCD$, I le milieu de $[AD]$ et G le centre de gravité de ABC. En utilisant le plan (AGI), déterminer l'intersection de la droite (IG) et du plan (BCD).

Exercice 20

Soit un prisme $ABCDEF$ (voir la figure ci-dessous). Déterminer l'intersection du plan $(ACFD)$ et de la parallèle à (BF) passant le milieu I de $[AB]$.



www.ipn.mr

Exercice 21

$ABCDEFGH$ est un cube. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1° Les droites (AF) et (BG) sont parallèles.

2° Les droites (AF) et (BG) sont sécantes.

3° La droite (AF) et le plan (DCG) sont parallèles.

4° Les droites (AF) et (CH) sont sécantes.

5° Les droites (BG) et (AH) sont parallèles.

6° L'angles $\widehat{AFC}$ mesure $\frac{\pi}{2}\ rad$.

Exercice 22

Dans un tétraèdre $ABCD$, on désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$ et $[BD]$.

1° Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

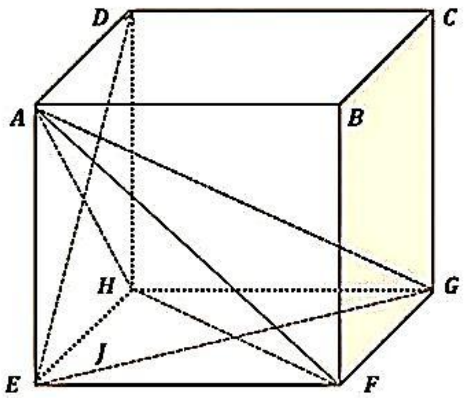
2° Montrer de même que $LMJN$ est un parallélogramme.

3° Déduire des questions précédentes que les trois droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.

Exercice 23

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous.

L'exercice consiste à reconnaître la nature des triangles cités dans la première colonne du tableau suivant. Pour chaque triangle, on propose 3 réponses. Pour chacune d'elles, l'élève doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante. On justifiera les réponses.



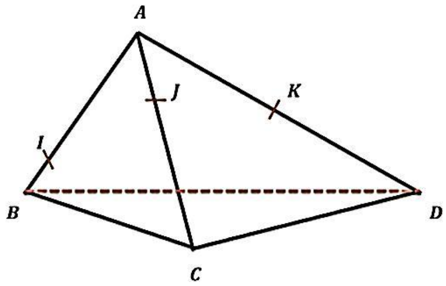
AEG	*Triangle isocèle*	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle rectangle	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle équilatéral	□*Faux*	□*Vrai*
AHF	*Triangle isocèle*	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle rectangle	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle équilatéral	□*Faux*	□*Vrai*
AFG	*Triangle isocèle*	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle rectangle	□*Faux*	□*Vrai*
	Triangle équilatéral	□*Faux*	□*Vrai*

Exercice 24

On considère le tétraèdre $ABCD$ est les points I, J et K situés respectivement sur les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$ comme indiqué sur le dessin ci-dessous.

1°/ Dessiner l'intersection M de la droite (IJ) avec le plan (BCD).

2°/ Dessiner l'intersection N de la droite (JK) avec le plan (BCD) et en déduire l'intersection des plans (IJK) et (BCD).



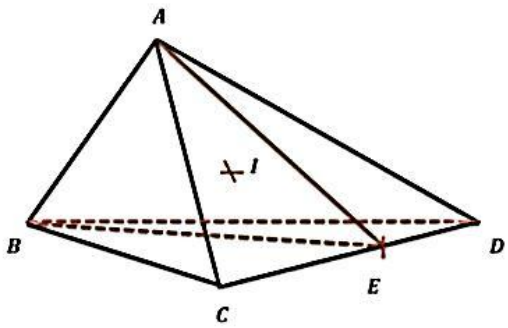
Exercice 25

On considère le tétraèdre $ABCD$, E un point du segment $[CD]$ et le point I du plan (ABE) comme sur la figure ci-après.

1°/ Déterminer l'intersection de la droite (AI) avec le plan (BCD).

2°/ Déterminer l'intersection des plans (ADI) et (BCD), puis des plans (ADI) et (ABC).

3°/ Déduire de ce qui précède l'intersection de la droite (DI) avec le plan (ABC).



Exercice 26

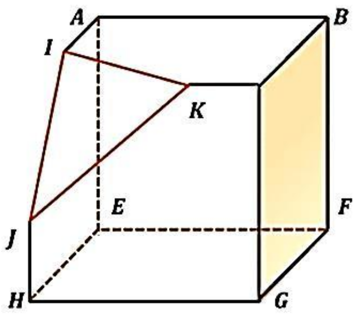
Soit le cube $ABCDEFGH$ dont on a coupé le coin contenant le point D, suivant la coupe triangulaire (IJK) comme l'indique la figure données ci-après.

1°/ Les arêtes du cube ont pour longueur $6cm$, de plus $AI = 2cm$, $CK = 1cm$ et $HJ = 2cm$.

Quel est le volume du cube tronqué ?

2°/ Déterminer l'intersection du cube tronqué avec le plan passant par le point C et parallèle au plan (IJK).

3°/ Déterminer l'intersection du cube tronqué avec le plan passant par A et parallèle au plan (IJK).



Exercice 27

On considère le parallélépipède rectangle (ou pavé droit) $ABCDEFGH$ tel que :

$AB = 8$; $BC = 4$; $AE = 4$

Le point I le milieu du segment $[AB]$ et le point O est le centre du rectangle $EFGH$. *(voir figure ci-après.)*

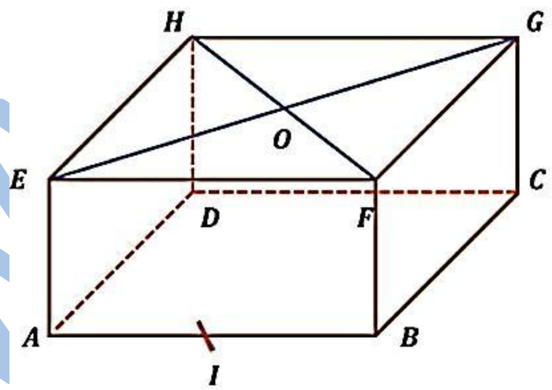
1°/ Quelle est la nature du quadrilatère $HGBA$?

Les diagonales de ce quadrilatère se coupent en K, déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AKB}$?

(on en donnera la valeur approchée au degré près par défaut.)

2°/ Calculer les longueurs OA, OC, AC. En déduire la nature du triangle AOC et déterminer la mesure approchée au dixième de degré près par défaut de chacun de ces angles.

3°/ Montrer de l'angle $\widehat{DIC}$ est droit. En déduire que le triangle HIC est rectangle.



Exercice 28

On considère un tétraèdre $ABCD$ régulier, *(c-à-d dont toutes les arêtes ont la même longueur)*.

On appelle I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AB]$ et $[AD]$. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

1°/ a) Montrer que la droite (AB) est orthogonale *(ou perpendiculaire)* au plan (DCJ). Que peut-on en déduire pour les droite (AB) et (DC) ?

b) Montrer que la droite (DG) est orthogonale au plan (ABC).

c) Montrer que la droite (IK) est orthogonale aux droites (BC) et (AD).

2°/ On pose a la longueur de chaque arête du tétraèdre, calculer les longueurs CG et DG en fonction de a.

3°/ Calculer le volume du tétraèdre en fonction de a. Quelle valeur doit-on donner au nombre réel a pour que le volume soit égal à $\frac{9\sqrt{2}}{4}$?

Exercice 29

La pyramide $SABCD$ de sommet S a une base horizontale carrée $ABCD$ de côté 7. On appelle H la projection orthogonale de S sur le plan $ABCD$, M et N sont les projections orthogonales respectives du point H sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$.

On donne les longueurs $HM = 3$, $HN = 2$ et $SH = 8$, *(la figure ci-dessous.)*

1°/ Calculer les longueurs SA, SB, SC et SD.

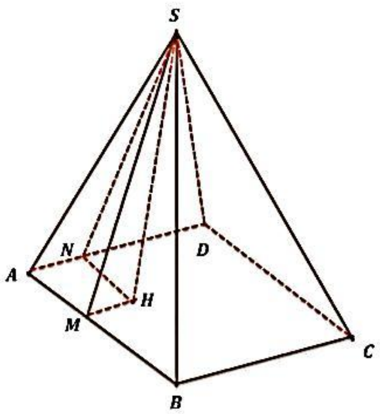
2°/ Calculer la base puis le volume de cette pyramide.

3°/ Soit E un point du segment $[AN]$, différent de A et de N tel que $AE = x$.

Dans le plan $ABCD$, on appelle O le point d'intersection des droites (AB) et (EH) et celui des droites (BC) et (EH).

En utilisant une configuration de Thalès, calculer les longueurs OA et BF en fonction de x. En déduire l'aire du trapèze $EABF$.

4°/ Déduire des résultats de la question précédente, la valeur de x pour laquelle le plan (SHE) partage la pyramide en deux parties de même volume.



Perspective

Exercice 30

Représenter sur une feuille non quadrillée un cube d'arête 7 cm en perspective cavalière avec

$\alpha = 45°$ et $k = \frac{1}{2}$.

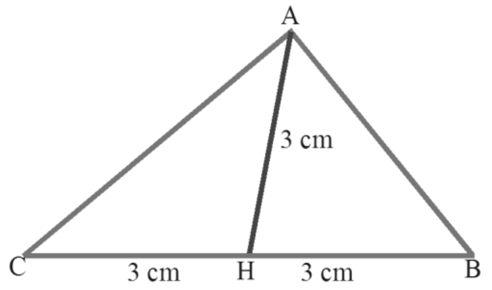
Exercice 31

Représenter sur une feuille quadrillée (0,5 × 0,5) une pyramide régulière à base carrée de côté 6 cm et de hauteur 10 cm en perspective cavalière cavalière avec $\alpha = 45°$ et $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 32

ABC est un triangle équilatéral de côté 6 cm.
1) La figure ci-contre
est la représentation

en perspective cavalière de ce triangle lorsqu'il est situé dans un plan horizontal, le côté [BC] étant vu de face.
Préciser le code de cette perspective cavalière.



2) Représenter ce triangle en perspective cavalière avec le code ($\alpha = 45°$ et $k = \frac{1}{3}$).

Lorsque la hauteur [AH] est verticale et vue de face, le support du côté [BC] est perpendiculaire au plan vertical de face.

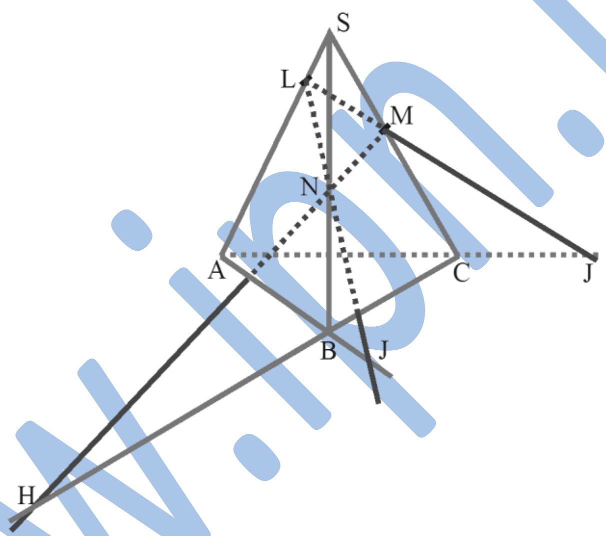
Démonstration et propriétés

Exercice 33

SABC est un tétraèdre, L est un point de [SA] ; M un point de [SC] et N un point de [SB].

- Les droites (MN) et (BC) se coupent en H ;
- Les droites (NL) et (AB) se coupent en I ;
- Les droites (LM) et (AC) se coupent en J ;

Montrer que H, I et J sont alignés.



Exercice 34

SABCD est une pyramide de sommet S de base parallélogramme ABCD ; O est le centre de cette base, soit J le milieu de l'arête [SA].

1) Démontrer que les droites (CJ) et (SO) sont sécantes ; On désignera par k le point d'intersection.

2) Démontrer que les triangles SAC et SDB ont même centre de gravité.

Exercice 35

Soit un prisme droit ABCDEF à bases triangulaires ABC et DEF. I et J sont les milieux respectifs de [AC] et [DF].

Déterminer la nature du quadrilatère IBEJ.

Soit O le point d'intersection des segments [IE] et [JB] les droites (AO) et (FC) sont-elles sécantes ?

Positions relatives et parallélismes

www.lpn.mr

Exercice 36

On considère une pyramide de sommet S dont la base est un quadrilatère ABCD. Représenter la droite d'intersection des plans (SAB) et (SCD) lorsque :

a) (AB) et (CD) sont sécantes en I ;

b) (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 37

Soit un tétraèdre ABCD et E le milieu de son arête [BC].

1 Soit F le point du segment [CD] tel que DF = $\frac{1}{3}$DC.

a) montrer que (EF) coupe le plan (ABD) et placer leur point d'intersection.

b) représenter la droite d'intersection des plans (AEF) et (ABD).

2) Soit G le milieu de [CD].

a) Refaire une figure.

b) Montrer que la droite (EG) est parallèle au plan (ABD).

c) Représenter la droite Δ d'intersection des plans (AEG) et (ABD).

Exercice 38

ABCDEFGH est un cube, représenter la droite d'intersection des plans (ACH) et (BDF).

Exercice 39

ABCDEFGH est un cube, soient I et J les centres respectifs des carrés EFGH et ABFE.

Montrer que la droite (IJ) est parallèle au plan ADHE.

2) a) Montrer que les plans (IJE) et (ADHE) sont sécantes selon une droite Δ parallèle à (IJ).

b) Représenter cette droite Δ dans le plan ADHE en précisant son intersection P avec (AD) puis représenter Δ dans l'espace.

Exercice 40

On considère un tétraèdre ABCD, On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [AC] et [BD].

1) Montrer que IJKL est un parallélogramme.

2) Montrer que IMKN est un parallélogramme.

3) a) Déduire des questions précédentes que les droites qui joignent les milieux des deux arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

www.lpn.mr

Ces droites sont-elles coplanaires.

Exercice 41

ABCDEFGH est un cube. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des arêtes [EA], [EF] et [EH].

Montrer que les plans (IJK) et (AFH) sont parallèles.

Orthogonalité

Exercice 42

Sur la figure de l'exercice précédent nommer :

a) Toutes les arêtes orthogonales à (HB) ;

b) Toutes les arêtes orthogonales au plan (ABCD) ;

Exercice 43

Le triangle ABC est rectangle en A, Soit S un point de la perpendiculaire en A au plan (ABC).

1) Montrer que les triangles SAB et SAC sont rectangles en A.

2) Montrer que : $SA^2 + BC^2 = SB^2 + AB^2$

Exercice 44

Soit C un cercle et [AB] un diamètre de C .

Soit M un point de C distinct de A et de B. Soit P un point distinct de A situé sur la perpendiculaire en A au plan de C .

1) Montrer que les droites (AP) et (BM) sont orthogonales.

2) En déduire que le triangle PMB est rectangle en M.

Exercice 45

a) ABCDEFGH est un cube.
Montrer que les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 46

b) ABCDEFGH est un cube.
Montrer que les droites (AE) et (BG) sont perpendiculaires.

1) Préciser le plan médiateur du segment [AE] et représenter la section du cube par ce plan.

2) Préciser le plan médiateur du segment [AF] et représenter la section du cube par ce plan.

Exercice 47

ABCDEFGH est un cube.

www.ipn.mr

On désigne par a l'arête du cube. O le centre du cube et I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC] , [CD], [DA], [AC] et [BD].

Soit P le plan médiateur de la diagonale [CE] du cube.

Montrer que $O \in P$.

2) a) calculer JB en fonction de a et en déduire JC.

b) Calculer de même JE en fonction de a.

Montrer que $J \in P$.

3) Montrer que $K \in P$. On montre de façon analogue et on considère donc comme démontré que L, M et N appartiennent à P.

4) Représenter la section du cube par le plan P.

Exercice 48

c) ABCDEFGH est un cube.
1) a) Montrer que E et C sont équidistants de A et F.

b) En déduire que (EC) et (AF) sont orthogonales.

2) Montrer de même que (EC) et (AH) sont orthogonales.

3) Déduire des questions précédentes que (EC) est orthogonale à (AFH).

4) a) Calculer le volume du tétraèdre EAFH

(utiliser la base AEF).

b) Calculer l'aire de AFH, puis en utilisant la réponse de la question 4) a) la distance de E au plan (AFH).

c) placer alors, le point d'intersection P de (EC) et de (AFH).

Exercice 49

a) On considère un tétraèdre OABC tel que :
OA = OB = OC = a (a> 0) et que les trois faces OAB, OAC et OBC soient rectangles en O.

Soit M un point du segment [OA], on pose

AM = x. Le plan P passant par M et parallèle aux droites (AB) et (OC) coupe respectivement les droites (AC), (CB) et (OB) en N, P et Q.

1) Montrer que le quadrilatère MNPQ est un rectangle.

2) Calculer en fonction de x l'aire A (x) de ce rectangle.

www.lpn.mr