III- EQUATIONS

Faire savoir

Le cours

Définition

Une équation est une relation d'égalité qui existe entre deux expressions algébriques en fonction de certaines valeurs de variables (*inconnues*)

Il existe des équations à une ou plusieurs inconnues, de degré 1 ou plus.

La résolution d'une équation est la détermination de l'ensemble des solutions (*ici nombres réels*) qui vérifient cette équation.

1. Equations du premier degré à une inconnue

Caractérisation

a) Forme générale

Définition

On appelle équation du premier degré à une inconnue, toute équation dont la forme générale est : $ax + b = 0$ (*Où b est un réel et a un réel différend de* 0, *et x est l'inconnue*).

b) Méthode de résolution

La méthode de résolution est la suivante ;

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\ (a \neq 0).$$

Si	alors l'ensemble des solutions est
$a = 0$ et $b = 0$	$\mathbb{R}$
$a = 0$ et $b \neq 0$	$\emptyset$
$a \neq 0$	$\left\{-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\right\}$

Remarque 1

Une équation du premier degré peut également se présenter sous différentes écritures qui nécessitent d'être développées et simplifiée avant de retrouver la forme générale ; $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$.

Exemple 1

Actuellement, un père a 35 ans et son fils 7 ans
a) Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le double de celui de son fils ?
b) Sera-t-il possible que l'âge du père soit égal à 8 fois celui de son fils ?

Solution

On désigne par x le nombre d'années, cherché ($x \in \mathbf{N}$) ; 35 + x et 7 + x seront les âges respectifs du père et du fils après x années.

a) $35 + x = 2(7 + x) \Leftrightarrow 35 + x = 14 + 2x \Leftrightarrow 2x - x = 35 - 14 \Leftrightarrow x = 21$.

Donc au bout de 21 ans l'âge du père sera le double de celui de son fils.

b) $35 + x = 8(7 + x) \Leftrightarrow 35 + x = 56 + 8x \Leftrightarrow 8x - x = 35 - 56 \Leftrightarrow 7x = -21 \Leftrightarrow x = \frac{-21}{7}$

$x = -3$ (à rejeter car $x \in \mathbf{N}$).

Donc, il est impossible que l'âge du père soit égale à 8 fois celui de son fils.

Exemple 2

Résoudre les équations suivantes :

$$(\boldsymbol{A}) : \ 2x + 3 = 5 - 4x \, ; \qquad (\boldsymbol{B}) : \ 5(3x - 2) = 7(6x + 1) \, ;$$

$$(\boldsymbol{C}) : \ 3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2).$$

Solution

$$(\boldsymbol{A}) : 2x + 3 = 5 - 4x \Longrightarrow 2x + 4x = 5 - 3 \Longrightarrow 6x = 2 \Longrightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right\}$$

$$(\boldsymbol{B}) : 5(3x - 2) = 7(6x + 1) \Longrightarrow 15x - 10 = 42x + 7 \Longrightarrow 15x + 42x = 10 + 7$$

$$\Longrightarrow 57x = 17 \Longrightarrow x = \frac{17}{57} \Longrightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{57}}\right\}$$

$$(\boldsymbol{C}) : \ 3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2)$$

$$\Longrightarrow 12 - 15x + 24x + 36 = 7 - 21x - 6x - 12$$

$$\Longrightarrow -15x + 24x + 21x + 6x = 7 - 12 + 12 - 36$$

$$\Longrightarrow (-15 + 24 + 21 + 6)x = -29 \Longrightarrow -36x = -29 \Longrightarrow x = \frac{-29}{-36} = \frac{29}{36} \Longrightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{36}}\right\}$$

2. Equations du second degré à une inconnue (*Equations trinômes*)

Caractérisation

a) Forme générale

Définition

On appelle équation du deuxième degré à une inconnue, toute équation dont la forme générale est : $ax^2 + bx + c = 0$ (*où* $a \neq 0$, *b et c sont des réels et x est l'inconnue*)

b) Cas particuliers

Une équation du deuxième degré peut être aussi de la forme ;

$$ax^2 = 0 \, ; (Lorsque \ b = 0 \ et \ c = 0)$$

$$ax^2 + c = 0 \, ; (Lorsque \ b = 0)$$

$$ax^2 + bx = 0 \, ; (Lorsque \ c = 0)$$

c) Méthodes de résolution

1°/ Les cas particuliers

a- Les équations de la forme $ax^2 = 0$ $(a \neq 0)$

Elles ont une seule solution qui est 0, quelle que soit la valeur de a.

b- Les équations de la forme $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0, c \neq 0)$

Elles ont ;

Deux solutions : $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \\ \quad et \\ x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$ lorsque a et c sont de signes contraires

Elles n'ont pas de solution lorsque a et c ont le même signe.

c- Les équations de la forme $ax^2 + bx = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ \quad et \\ x_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

Plus généralement, l'équation $x^2 \; = \; k$ où k est un réel donné.

Si	alors l'ensemble des solutions est
$k < 0$	ϕ
$k = 0$	$\{0\}$
$k > 0$	$\{-\sqrt{k};\ -\sqrt{k}\}$

2°/ Le cas général

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Pour résoudre cette forme d'équation, on utilise la méthode générale du discriminant Δ qui peut être aussi appliquée aux cas particuliers précédents. Le discriminant de cette équation est soit le nombre Δ, soit le nombre Δ' tel que $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\Delta' = \left(\frac{\mathrm{b}}{2}\right)^2 - ac$, mais d'où vient-il ?

Si on revient à la forme canonique, on a :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$a \neq 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\begin{cases}\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\\ ou\\ -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\quad(\Delta=b^2-4ac)$$

$$\Longrightarrow\begin{cases} si\ \Delta>0 \Longrightarrow x=\begin{cases}-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\ ou\\ -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\\ si\ \Delta=0 \Longrightarrow x=-\frac{b}{2a}\\ si\ \Delta<0 \Longrightarrow pas\ de\ solution\end{cases}$$

En conclusion ;

$$\begin{cases}\text{Si } \Delta>0; \text{il existe deux solutions} \begin{cases}x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\\ \text{Si } \Delta=0; \text{il existe une solution double } x_0=\frac{-b}{2a}\\ \text{Si } \Delta<0; \text{il n'existe aucune solution dans } \mathbb{R}\end{cases}$$

Si	alors l'ensemble des solutions est
$\Delta<0\ (\Delta'<0)$	$\varnothing$
$\Delta=0\ (\Delta'=0)$	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta>0\ (\Delta'>0)$	$\{x_1\ ;\ x_2\}$ avec $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Ou $x_1=\frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Remarque 2

Dans une équation $ax^2+bx+c=0$ (où $a\neq 0$)

Lorsque $a+b+c=0$, alors l'équation admet comme solutions ; $x_1=1\ et\ x_2=\frac{c}{a}$

Remarque 3

Dans une équation $ax^2+bx+c=0$, (où $a\neq 0$)

Lorsque $a-b+c=0$, alors l'équation admet comme solutions ;

$$x_1 = -1 \; et \; x_2 = -\frac{c}{a}$$

Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) x^2 -6x +5 = 0 ; b) x^2 -2x -1 = 0 ; c) x^2 -5x + 6 = 0 ; d) x^4 -5x^2 + 6 = 0 ; e) x -5$\sqrt{x}$ + 6 = 0.

Solution

a)

Méthode 1 :

Comme 1 – 6 + 5 = 0 ;

donc 1 est solution et l'autre solution est $\frac{5}{1}$ = 5. Donc S = $\{1 \; ; \; 5\}$.

Méthode 2.

x^2 -6x +5 = 0 $\Leftrightarrow$

$(x-3)^2 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow$

x – 3 = $\sqrt{4}$ ou x – 3 = -$\sqrt{4}$ $\Leftrightarrow$

x = 5 ou x = 1.

Donc ; S = $\{1 \; ; \; 5\}$.

Méthode 3.

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5) =$

36 – 20 = 16 ; $\sqrt{\Delta}$ = 4.

$x_1 = \frac{6-4}{2} = 1$; $x_2 = \frac{6+4}{2} = 5$.

Donc, S = $\{1 \; ; \; 5\}$.

b) x^2 -2x -1 = 0;

$\Delta = (-2)^2 -4(1)(-1) = 4 + 4 = 8$;

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$.

$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$; $x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$.

Donc, S = $\{1-\sqrt{2} \; ; \; 1+\sqrt{2}\}$.

c) x^2 -5x + 6 = 0;

$\Delta = (-5)^2 -4(1)(6) =$

25 – 24 = 1

$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$; $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.

Donc, S = $\{2 \; ; \; 3\}$.

d) x^4 -5x^2 +6 = 0 ;

avec X = x^2 ; on a :

X^2 -5X + 6 = 0 ;

Donc X = 2 ou X = 3

D'où x^2 = 2 ou x^2 = 3 $\Leftrightarrow$

x = $\pm\sqrt{2}$ ou x = $\pm\sqrt{3}$;

Donc S = $\{-\sqrt{3} \; ; \; -\sqrt{2} \; ; \; \sqrt{2} \; ; \; \sqrt{3}\}$.

e) x - 5$\sqrt{x}$ + 6 = 0 ;

avec X = $\sqrt{x}$ on a :

X^2 -5X + 6 = 0

Donc X = 2 ou X = 3

Donc $\sqrt{x}$ = 2 ou $\sqrt{x}$ = 3

D'où x = 4 ou x = 9.

Donc S = $\{4 \; ; \; 9\}$.

d- Somme et produit des racines d'un polynôme

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0 \; (a \neq 0)$ admet deux racines x_1 et x_2, alors ;

$$\begin{cases} s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \; ; \; p = x_1.x_2 = \frac{c}{a} \; \boxed{1} \\ \text{et} \\ ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \; \boxed{2} \end{cases}$$

Si	alors
x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

$a+b+c=0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est $\left\{1\ ;\ \frac{c}{a}\right\}$.
$a-b+c=0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est $\left\{-1\ ;\ \frac{-c}{a}\right\}$.
$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ où s et p sont deux réels donnés	Les nombres x et y (s'ils existent) sont les solutions de l'équation du second degré d'inconnue X : $X^2 - sX + p = 0$

Exercice

Démontrer les propriétés $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$

e) Système homogène

Soit l'équation ;

$$ax^2+bx+c=0,$$

Tels que $a \neq 0$ et $\Delta > 0$, on a ;

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Longrightarrow \boldsymbol{x^2 - sx + p = 0}$$

Exemple 4

Déterminer les dimensions d'un rectangle d'aire 15 et de périmètre 16.

Solution

On désigne par x et y les dimensions ; on a $\begin{cases} x+y=\frac{16}{2}=8 \\ xy=15 \end{cases}$

Donc x et y sont les solutions de l'équation :

$x^2 - 8x + 15 = 0$.

$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(15) = 64 - 60 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$.

$x_1 = \frac{8-2}{2} = 3$; $x_2 = \frac{8+2}{2} = 5$, donc les dimensions sont 3 et 5.

Remarque 4

Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ admet une seule solution double x_0, alors ;

$$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$$

Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet aucune solution, alors le trinôme n'est pas factorisable.

Exemple 5

■ $2x^2 - 4x + 2 = 2(x-1)^2$

■ $2x^2 + 4x + 3 = 0$ n'est pas factorisable.

e- Equations du second degré avec un paramètre réel

Exemple 6

Soit l'équation paramétrique ;

$$E_m \,:\; 2x^2 - (5+m)x + 7 + 3m = 0$$

Discuter suivant les valeurs du paramètre m, les solutions de l'équation E_m.

Solution

$$\Delta_{E_m} = (5+m)^2 - 4 \times 2(7+3m)$$
$$= 25 + 10m + m^2 - 56 - 24m$$
$$= -31 - 14m + m^2$$

On considère l'équation du second degré en m ;

$$m^2 - 14m - 31 = 0$$

$$\Delta_m = (-14)^2 - 4 \times 31 = 196 + 124 = 320$$

$$\sqrt{\Delta} = 8\sqrt{5} \Longrightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{14 - 8\sqrt{5}}{2} = 7 - 4\sqrt{5} \\ m_2 = \dfrac{14 + 8\sqrt{5}}{2} = 7 + 4\sqrt{5} \end{cases}$$

Conclusion

Si $m = 7 - 4\sqrt{5}$ ou $m = 7 + 4\sqrt{5}$, alors l'équation E_m admet une solution double (*car* $\Delta_{E_m} = 0$).

Si $m \in \left]7 - 4\sqrt{5};\ 7 + 4\sqrt{5}\right[$, alors l'équation E_m n'admet aucune solution (*car* $\Delta_{E_m} < 0$).

Si $m \in \left]-\infty;\ 7 - 4\sqrt{5}\right] \cup \left[7 + 4\sqrt{5};\ +\infty\right[$, alors l'équation E_m admet deux solutions distinctes (*car* $\Delta_{E_m} > 0$).

3. Equation de degré 3

Exemple 7

Soit l'équation ;

$$(E) :\; x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

a/ Donner une solution évidente de l'équation (E) ;

b/ Ecrire (E) sous la forme ;

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = 0$$

c/ Donner les deux autres solutions de (E).

Solution

a/ 1 est une solution évidente de l'équation (E),

En effet ; $(1)^3 + 2(1)^2 - 2(1) - 1$

$$= 1 + 2 - 2 - 1 = 3 - 3 = 0$$

b/ $(x-1)(ax^2 + bx + c)$

$$= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$

$$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax^3 = x^3 \Rightarrow \boldsymbol{a = 1} \\ (b-a)x^2 = 2x^2 \Rightarrow b - a = 2 \Rightarrow \boldsymbol{b = 3} \\ (c-b)x = -2x \Rightarrow c - b = -2 \\ -c = -1 \Rightarrow \boldsymbol{c = 1} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 1) = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 1} \\ ou \\ x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}} \\ \boldsymbol{x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{S = \left\{ \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2} ; 1 \right\}}$$

4. Equations quotients (*Equations rationnelles*)

Définition

On appelle équation quotient ou équation rationnelle, toute équation associée à un quotient rationnel.

La forme générale est :

$$\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{P(x)}{T(x)} \text{ où } P, Q, R \text{ et } T \text{ sont des polynômes.}$$

$$(R \text{ et } T \neq 0)$$

La solution de telles équations doit exclure toutes les valeurs qui annulent les dénominateurs de l'équation.

Exemple 8

Résoudre les équations rationnelles suivantes :

$$(A): \frac{3x-7}{x+2} = \frac{x+2}{3x-7}; \qquad (B): \frac{-9}{3-7x} = \frac{5}{5x+1}$$

$$(C): \frac{3x^2 + 4x}{9x + 12} = -7; \qquad (D): \frac{2x^2 - 7x}{3 - 2x} = 0$$

Solution

$(\boldsymbol{A})$: $\boldsymbol{\dfrac{3x-7}{x+2} = \dfrac{x+2}{3x-7}} \Rightarrow (3x-7)^2 = (x+2)^2$

$$(3x-7)^2-(x+2)^2=0$$
$$\Longrightarrow [(3x-7)+(x+2)][(3x-7)-(x+2)]=0$$
$$\Longrightarrow [3x-7+x+2][3x-7-x-2]=0$$
$$\Longrightarrow (4x-5)(2x-9)=0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 4x-5=0 \Longrightarrow x=\dfrac{5}{4} \\ \quad ou \\ 2x-9=0 \Longrightarrow x=\dfrac{9}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}=\left\{\frac{5}{4},\frac{9}{2}\right\}$$

$(\boldsymbol{B}): \dfrac{\boldsymbol{-9}}{\boldsymbol{3-7x}}=\dfrac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{5x+1}} \Longrightarrow -9(5x+1)=5(3-7x)$

$$\Longrightarrow -45x-9=15-35x$$
$$\Longrightarrow -45x+35x=15+9$$
$$\Longrightarrow -10x=24 \Longrightarrow x=\frac{24}{-10}=-2{,}4 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}=\{\boldsymbol{-2,4}\}$$

$(\boldsymbol{C}):\ \dfrac{\boldsymbol{3x^2+4x}}{\boldsymbol{9x+12}}=\boldsymbol{-7} \Longrightarrow \dfrac{x(3x+4)}{3(3x+4)}=\dfrac{-7}{1} \Longrightarrow x(3x+4)=-21\langle 3x+4\rangle$

$\Longrightarrow x(3x+4)+21\langle 3x+4\rangle=0 \Longrightarrow (3x+4)(x+21)=0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x+4=0 \Longrightarrow x=\dfrac{-4}{3} \\ \quad ou \\ x+21=0 \Longrightarrow x=-21 \end{cases}$$

La première solution est rejetée car elle annule le dénominateur du quotient de l'équation.

$$\text{Donc; } \boldsymbol{\mathcal{S}}=\{\boldsymbol{-21}\}$$

$(\boldsymbol{D}):\ \dfrac{\boldsymbol{2x^2-7x}}{\boldsymbol{3-2x}}=\boldsymbol{0} \Longrightarrow \dfrac{2x^2-7x}{3-2x}=\dfrac{0}{1}$

$\Longrightarrow 2x^2-7x=0 \Longrightarrow x(2x-7)=0$

$$\begin{cases} x=0 \\ ou \\ 2x-7=0 \Longrightarrow x=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}}=\left\{\boldsymbol{0},\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{2}}\right\}$$

5. Equations irrationnelles

Définition

On appelle équation irrationnelle toute équation de la forme ; $\sqrt{f(x)}=g(x)$;

Exemple 9

$$\sqrt{2-3x}=5x+4$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation irrationnelle ;

$$\sqrt{2-3x}=5x+4$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2-3x}\right)^2 = (5x+7)^2$$

$$\Rightarrow 2-3x = 25x^2 + 70x + 49$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 73x + 47 = 0$$

$$\Delta = 73^2 - 4 \times 25 \times 47 = 5\,329 - 4\,700 = 629$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{629} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-73-\sqrt{629}}{50} \approx -1{,}96 \\ x_2 = \dfrac{-73+\sqrt{629}}{50} \approx -0{,}96 \end{cases}$$

Les deux solutions sont acceptées car,

$2 - 3x_1 > 0 \Rightarrow \sqrt{2-3x_1}$ existe,

et $2 - 3x_2 > 0 \Rightarrow \sqrt{2-3x_2}$ existe.

$$\boldsymbol{S} = \left\{\frac{\mathbf{-73-\sqrt{629}}}{\mathbf{50}} ; \frac{\mathbf{-73+\sqrt{629}}}{\mathbf{50}}\right\}$$

6. Les équations du premier degré à deux inconnues

a) Forme générale

Forme générale ; $ax + by + c = 0$ $(a; b) \neq (0; 0)$

Exemple 10

$$5x - 3y + 11 = 0\,;\, x - 7y = 8\,;\, 4x - 9y = 0\,;$$

$$x = -3y + 1\,;\, y = \frac{2}{9}x - 7\sqrt{3}$$

b) Méthode de résolution

Une équation du premier degré à deux inconnues, a une infinité de solutions.

Pour chaque valeur qu'on donne à x, on obtient une valeur correspondante pour y, et inversement.

Exemple 11

A l'équation ; $5x - 3y + 11 = 0$, si on donne $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$, on a ; $5 \times 4 - 3y + 11 = 0$

$$\Rightarrow 20 - 3y + 11 = 0 \Rightarrow -3y + 31 = 0$$

$$\Rightarrow 3y = 31 \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{31}}{\mathbf{3}}$$

Le couple ordonné $\left(\mathbf{4}; \dfrac{\mathbf{31}}{\mathbf{3}}\right)$ est une solution de

L'équation $5x - 3y + 11 = 0$,

7. Système linéaire de deux équations à deux inconnues

a) Forme générale

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \; \boxed{1} \\ a'x + b'y + c' = 0 \, \boxed{2} \end{cases}$$

Où ; a, b, c, a', b' et c' sont des nombres réels.

Définition

On appelle système linéaire de deux équations du premier degré à deux inconnues, toute paire d'équations du premier degré à deux inconnues qu'on se doit de résoudre simultanément.

C'est-à-dire, trouver la solution qui satisfait aux deux équations en même temps.

b) Méthodes de résolution

Il existe quatre méthodes de résolution d'un système linéaire.

a- Méthode de combinaison

Elle consiste à éliminer l'une des deux inconnues x (ou y) pour se retrouver avec une équation du premier degré en y (ou en x).

On résout l'équation du premier degré en y (ou en x). On procède de la même façon pour trouver l'autre inconnue qui a été éliminée, ou on remplace simplement par la valeur trouvée dans l'une des deux équations pour déterminer la valeur de l'inconnue qui avait été éliminée auparavant.

Si le système a une solution unique, la valeur trouvée sera un couple ordonné (*non inversible*).

b- Méthode de substitution

Elle consiste en l'écriture de l'une des deux inconnues en fonction de l'autre en utilisant l'une des deux équations, puis en remplaçant la deuxième inconnue par cette écriture dans l'autre équation.

c- Méthode des déterminants

Soit le système ;

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

On définit les déterminants suivants :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix} = ca' - c'a$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$$

Si	alors

$\Delta \neq 0$	Le système a une solution unique. On la détermine par l'une des méthodes déjà expliquées.
$\Delta = 0$	Le système peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité

d- Méthode graphique

Un système d'équations peut être résolu aussi par méthode graphique lorsque les équations sont relativement simples. La solution simultanée lorsqu'elle existe, est l'intersection des deux droites.

Exemple 12

Résoudre par les trois méthodes ; combinaison, substitution et déterminant le système suivant

Soit le système ;

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \ \boxed{\mathbf{1}} \\ 2x - 7y + 11 = 0 \ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases}$$

a) Méthode de combinaison

$$7 \times \boxed{\mathbf{1}} + 3 \times \boxed{\mathbf{2}} \Longrightarrow \begin{cases} 35x + 21y - 28 = 0 \ \boxed{\mathbf{1'}} \\ \ 6x - 21y + 33 = 0 \ \boxed{\mathbf{2'}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 41x + 5 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{41}}$$

$$2 \times \boxed{\mathbf{1}} - 5 \times \boxed{\mathbf{2}} \Longrightarrow \begin{cases} \ 10x + 6y - 8 = 0 \ \boxed{\mathbf{1''}} \\ -10x + 35y - 55 = 0 \ \boxed{\mathbf{2''}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 41y - 63 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}}$$

On peut aussi remplacer avec la valeur de x dans l'une des deux équations pour avoir la valeur de y.

$$5 \times \frac{-5}{41} + 3y - 4 = 0 \Longrightarrow \frac{-25}{41} + 3y - 4 = 0$$

$$\Longrightarrow 3y = \frac{25}{41} + 4 \Longrightarrow 3y = \frac{25}{41} + \frac{164}{41} = \frac{189}{41}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{189}{41} \div 3 = \frac{189}{41} \times \frac{1}{3} \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}}$$

Le système a donc pour solution ;

$$\boldsymbol{S} = \left\{ \left(\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{41}} ; \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}} \right) \right\}$$

b) Méthode de substitution

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \ \boxed{\mathbf{1}} \\ 2x - 7y + 11 = 0 \ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases} \Longrightarrow de \ \boxed{\mathbf{1}} : 5x = -3y + 4$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{-3y + 4}}{\mathbf{5}}$$

$\Longrightarrow 2 \times \frac{-3y+4}{5} - 7y + 11 = 0$

$\Longrightarrow \frac{-6y+8}{5} - \frac{35y}{5} + \frac{55}{5} = 0$

$\Longrightarrow \frac{-6y+8-35y+55}{5} = 0$

$\Longrightarrow \frac{-41y+63}{5} = 0 \Longrightarrow -41y + 63 = 0$

$\Longrightarrow 41y = 63 \Longrightarrow \boldsymbol{y = \frac{63}{41}}$

$\Longrightarrow$ de $\boxed{\mathbf{1}}$: $3y = -5x + 4$

$\Longrightarrow \boldsymbol{y = \frac{-5x+4}{3}}$

de $\boxed{\mathbf{2}} \Longrightarrow 2x - 7 \times \frac{-5x+4}{3} + 11 = 0$

$\Longrightarrow \frac{6x}{3} - \frac{-35x+28}{3} + \frac{33}{3} = 0$

$\Longrightarrow \frac{6x+35x-28+33}{3} = 0$

$\Longrightarrow \frac{41x+5}{3} = 0 \Longrightarrow 41x + 5 = 0$

$\Longrightarrow 41x = -5 \Longrightarrow \boldsymbol{x = \frac{-5}{41}}$

On pouvait aussi remplacer dans l'expression de x pour avoir sa valeur directement.

$\Longrightarrow x = \frac{-3 \times \frac{63}{41} + 4}{5} \Longrightarrow x = \frac{\frac{-189+164}{41}}{5}$

$\Longrightarrow x = \frac{\frac{-25}{41}}{5} = \frac{-25}{41} \div 5 = \frac{-25}{41} \times \frac{1}{5}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{x = \frac{-5}{41} \Longrightarrow S = \left\{\left(\frac{-5}{41}; \frac{63}{41}\right)\right\}}.$$

c) Méthode du déterminant

$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \\ 2x - 7y + 11 = 0 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 5 \times (-7) - 2 \times 3 = -35 - 6 = -41$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = 3 \times 11 - (-7 \times -4) = 33 - 28 = 5$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -4 \times 2 - 11 \times 5 = -8 - 55 = -63$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-41} = \frac{-5}{41}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-63}{-41} = \frac{63}{41}$

$\Rightarrow \boldsymbol{S} = \left\{\left(\frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{41}}; \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{41}}\right)\right\}$.

Exemple 13

Résoudre par la méthode graphique le système :

$$\begin{cases} 3x + 4y - 10 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

d) Méthode graphique

Il suffit de remarquer que la solution simultanée du système, c'est les coordonnées du point d'intersection des deux droites (D) et (D')d'équations ;

$(D) : 3x + 4y - 10 = 0$; et $(D') : \ 2x + y - 5 = 0$, point dont les coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ vérifient les deux équations à la fois ;

On pose ; $y_0 = \dfrac{-3x_0 + 10}{4}$ $\ et\ \ y_0 = -2x_0 + 5$

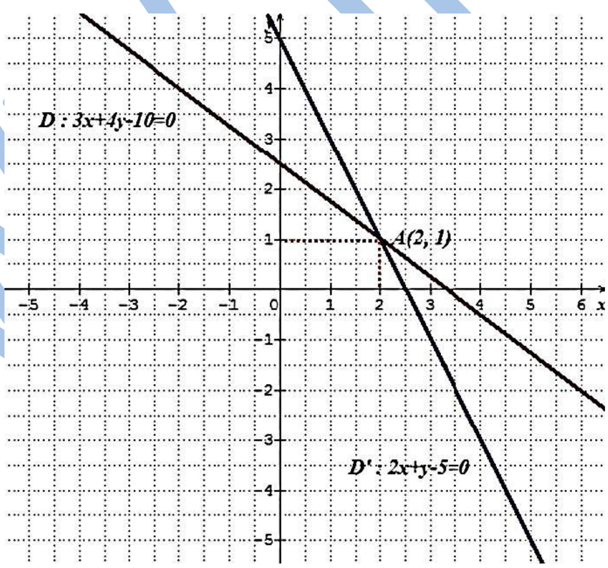
En égalisant y_0 avec y_0 on obtient ;

$$\frac{-3x_0 + 10}{4} = -2x_0 + 5 \Longrightarrow \boldsymbol{x_0 = 2}$$

En remplaçant dans l'une des deux équations, on obtient $\boldsymbol{y_0 = 1}$.

En représentant ces deux équations de droite dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on remarque que les deux droites sont concourantes.

Les coordonnées de leur point d'intersection $(x_0 = 2\ ;\ y_0 = 1)$ constituent donc la solution du système.



Exemple 14

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ les systèmes :

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$.

Solution

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ -2x-6y=2 \\ -5y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-3}{5} \\ x=\dfrac{1-y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{-3}{5} \end{cases}$.

Donc S = $\left\{\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{-3}{5}\right)\right\}$.

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$. Donc S = $\{(1\,;\,1)\}$.

c) $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ d) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2=0 \text{ (impossible)} \end{cases}$ .Donc S = $\varnothing$.

d) $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=2 \Leftrightarrow y=2-x$. Donc S = $\{(x;2-x);x\in\mathbf{R}\}$.

Exemple 15

a) Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$), tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives 2x +y + 1 = 0 et x + 2y + 5 = 0.

b) déterminer et interpréter graphiquement la solution du système : $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=-5 \end{cases}$.

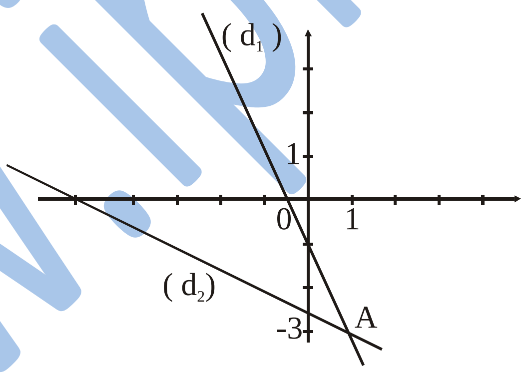
Solution

a) (d_1) :

x	0	$\frac{-1}{2}$
y	-1	0

(d_2) :

x	0	-5
y	$\frac{-5}{2}$	0



b) $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-2x \\ x+2(-1-2x)=-5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-2x \\ -3x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

Donc S = $\{(1\,;-3)\}$.

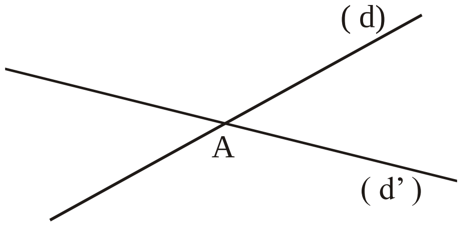
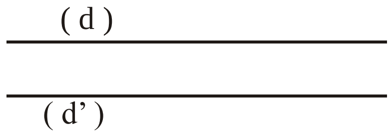
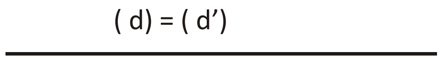
(1 ; -3) sont les coordonnées du point A commun entre les droites (d_1) et (d_2).

8- Solutions possibles d'un système linéaire donné

Interprétation graphique

Soit (d) et (d') les deux droites d'équations cartésiennes $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ dans un repère $(O; \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

Si	alors

(d) et (d') sont sécantes $(\Delta \neq 0)$ 	Le système a un couple solution unique qui est le couple des coordonnées du point A commun à (d) et (d').
(d) et (d') sont strictement parallèles $(\Delta = 0)$.  Les droites n'ont pas de points communs	Le système n'a pas de solution.
(d) et (d') sont confondues $(\Delta = 0)$.  Les droites ont une infinité de points communs	Le système a une infinité de solution qui sont tous les couples de coordonnées des points de (d) (ou de d').

Exemple 16

On se propose ici de trouver les ensembles de solutions (*s'ils existent*) des trois systèmes suivants :

$$I - \begin{cases} 3x + 5y - 7 = 0 \\ 4x - 6y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$II - \begin{cases} 4x + 2y - 5 = 0 \\ -8x - 4y + 13 = 0 \end{cases}$$

$$III - \begin{cases} 3x - 5y + 6 = 0 \\ -12x + 20y - 24 = 0 \end{cases}$$

On utilisera au choix l'une des méthodes précédentes pour résoudre les systèmes.

$$I - \begin{cases} 3x + 5y - 7 = 0 \ \boxed{\mathbf{1}} \\ 4x - 6y - 12 = 0 \ \boxed{\mathbf{2}} \end{cases}$$

$$6 \times \boxed{\mathbf{1}} + 5 \times \boxed{\mathbf{2}} \Longrightarrow \begin{cases} 18x + 30y - 42 = 0 \ \boxed{\mathbf{1'}} \\ 20x - 30y - 60 = 0 \ \boxed{\mathbf{2'}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 38x - 102 = 0 \Longrightarrow x = \frac{102}{38} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{51}}{\mathbf{19}}$$

$$3\times\frac{51}{19}+5y-7=0\Rightarrow\frac{153}{19}+5y-7=0$$

$$\Rightarrow 5y+\frac{153}{19}-\frac{133}{19}=0\Rightarrow 5y+\frac{20}{19}=0$$

$$\Rightarrow 5y=-\frac{20}{19}\Rightarrow y=-\frac{20}{19}\div 5\Rightarrow y=-\frac{20}{19}\times\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y=-\frac{4}{19}}\Rightarrow \boldsymbol{S\left\{\left(\frac{51}{19}\,;\,-\frac{4}{19}\right)\right\}}$$

Le système a donc une solution unique.

Le système correspond à deux équations de droites concourantes (*ayant un point commun*).

$$II-\begin{cases}4x+2y-5=0\ \boxed{\mathbf{1}}\\-8x-4y+13=0\,\boxed{\mathbf{2}}\end{cases}$$

$$2\times\boxed{\mathbf{1}}+\boxed{\mathbf{2}}\Rightarrow\begin{cases}8x+4y-10=0\ \boxed{\mathbf{1'}}\\-8x-4y+13=0\,\boxed{\mathbf{2'}}\end{cases}$$

$\Rightarrow 3=0\,;$ c'est impossible, le système n'a pas de solution ; $S=\emptyset$.

Le système correspond à deux équations de droites parallèles (*n'ayant aucun point commun*).

$$III-\begin{cases}3x-5y+6=0\ \boxed{\mathbf{1}}\\-12x+20y-24=0\,\boxed{\mathbf{2}}\end{cases}$$

$$4\times\boxed{\mathbf{1}}+\boxed{\mathbf{2}}\Rightarrow\begin{cases}12x-20y+24=0\ \boxed{\mathbf{1'}}\\-12x+20y-24=0\,\boxed{\mathbf{2'}}\end{cases}$$

$\Rightarrow 0=0$, toujours possible.

Le système a une infinité de solutions. Toute solution à la première équation est aussi solution à la deuxième, et inversement.

Le système correspond à deux équations de droites confondues (*ayant tous les points communs*).

Exercices généraux

Exercice 1.

Une personne dépense dans un premier magasin le quart de la somme dont elle dispose. Dans un second magasin, elle dépense la moitié du reste.

Et après avoir ensuite acheté un objet à 300 UM, il lui reste 400 UM. De quelle somme disposait –elle au départ ?

Exercice 2.

Trouver les dimensions d'un champ rectangulaire d'aire 1 200 m^2, sachant que sa longueur dépasse sa largeur de 10 m.

Exercice 3.

Un producteur de spectacle loue une salle à 53 170 UM pour organiser un spectacle.

Chaque billet d'entrée est vendu 300 UM. A partir de quel nombre de spectateurs aura-t-il un bénéfice ?

Exercice 4.

Résoudre dans $\mathbf{R}$: les équations suivantes :

$x^2 -4x + 3 = 0$; $x^2 +x + 1 = 0$; $x^2 + 1 = 0$;

$x^2 +3x - 4 = 0$; $x^2 -2x - 2 = 0$; $x^4 -4x^2 +3 = 0$

$x^2 -3x - 4 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x + 3\sqrt{x} +1 = 0$;

$2x^2 -x - 1= 0$; $1- 4x^2 = 0$; $(2x +1)^2 -3(2x +1) -4 = 0$

$(x -1)(x + 3) = 0$; $(1 -2x)^2(1 + x) = 0$; $x(1-x^2) = 0$

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbf{R}$: les inéquations :

$x + 1 \geq 0$; $2x - 1 \leq 0$; $\frac{1}{3}x + 1 \geq 0$.

$x^2 -4x + 3 > 0$; $x^2 + x + 1 < 0$

$2x^2 -x - 1 < 0$; $x^2 - 1 \geq 0$

$(x - 1)(x + 3) \leq 0$; $(1 - 2x)^2(1 + x) < 0$

Exercice 6.

Soit m un réel. Soit E_m l'équation :

$mx^2 - x + 1 = 0$. Déterminer, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de E_m.

Exercice 7.

Soit g_m le trinôme définie pour tout x réel, par : $g_m(x) = x^2 + 2x -2m$ où m est un paramètre réel non nul.

1) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution dans $\mathbf{R}$, de l'équation $g_m(x) = 0$.

2) Dans le cas où l'équation $g_m(x) = 0$ admet deux solutions réelles x' et x'' telles que $x' < x''$; montrer que si $m < 0$ alors $-2 < x' < x''$ et que si

$m > 0$ alors $x' < -2 < 0 < x''$.

Exercice 8.

On considère l'équation (E) :

$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

1) Montrer que(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \dfrac{1}{x} \\ X^2 - 5X + 6 = 0 \end{cases}$

2) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation (E)

Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$, les systèmes :

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 4x - 8y = 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - 9y = 12 \end{cases}$

Exercice 10.

1) Résoudre dans $\mathbf{R}^2$, le système :

$\begin{cases} 5a + 2b = 26 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases}$.

2) Déduire de la question précédente, la résolution, dans $\mathbf{R}^2$, des systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x^2 + 2y^2 = 26 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 5\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 26 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{y} = 26 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = -1 \end{cases}$$

Exercice 11.

Le plan est rapporté à un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Déterminer l'intersection des droites (d) et (d') données par leurs équations :

1) (d) $4x + 5y - 1 = 0$ 2) (d) $2x - 10y - 4 = 0$

(d') $3x + 4y - 2 = 0$ (d') $-3x + 15y + 6 = 0$

3) (d) $4x - 2y - 1 = 0$

(d') $y = 2x + 1$

Exercice 12.

Résoudre dans $\mathbf{R}^3$, chacun des systèmes :

$$1)\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+2y+4z=5 \\ -2x-5y+2z=6 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x+y+z=12 \\ 3x-2y+3z=12 \\ 5x-y+z=12 \end{cases}.$$

Exercice 13.

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan.

1) Les droites (d1) ; (d2) ; (d3) d'équations respectives :

x + y – 2 = 0 ; 3x –y -1 = 0 ; 2x -3y + 2 = 0 sont-elles concourantes ?

2) Vérifier graphiquement la réponse.

Exercice 14.

1) Quelles valeurs faut-il donner au nombre réel m pour que les droites (d1) ; (d2) ; (d3) d'équations respectives :

x + y – 2 = 0 ; 3x –y -1 = 0 ; 2x -3y + m = 0 soient concourantes ?

2) faite la figure pour la valeur de m trouvée.

Exercice 15.

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On donne les points A(-3 ; 2) ; B(0 ; -3) ; C(2 ; 2).

1) Déterminer une équation de chacune des droites (AB) ; (AC) et (BC).

2) Déterminer un système d'inéquation définissant l'intéieur du triangle ABC.

Exercice 16.

Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme de degré 2.

Mettre P(x) sous la forme canonique.

Déterminer les racines éventuelles de P

Etudier le signe de P(x).

1) P(x) = x^2 + 2x -1 5) P(x) = x2 + 2x +2

2) P(x) = -x^2 + x -1 6) P(x) = $\frac{1}{2}x^2$ + 5x - 1

3) P(x) = x^2 - 7x + 6 7) P(x) = 3x^2 + 5x -1

4) P(x) = -5x^2 + x +1 8) P(x) = 169x^2 + 13x -1

Exercice 17.

On donne un polynôme P et un nombre réel a. Dans chacun des cas suivants :

Vérifier que P(x) est factorisable par x – a.

Déterminer le quotient de P(x) par x – a.

Factoriser, si possible, ce quotient.

Etudier le signe de P(x).

1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et $a = 2$

2) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$.

3) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ et $a = -3$

4) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $a = \sqrt{3}$.

Exercice 18.

Développer, simplifier, transposer les inconnues et des valeurs constantes, puis résoudre les équations suivantes ;

$$2x + 3 = 5 - 4x \; ; 5(3x - 2) = 7(6x + 1) \; ;$$
$$3(4 - 5x) + 12(2x + 3) = 7(1 - 3x) - 6(x + 2).$$

Exercice 19.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes ;

- **a)** $4x^2 = 0$
- **b)** $2x^2 + 32 = 0$
- **c)** $3x^2 - 27 = 0$
- **d)** $-2x^2 + 8 = 0$
- **e)** $-7x^2 - 21 = 0$
- **f)** $4x^2 + 3x = 0$
- **g)** $5x^2 - 20x = 0$

Exercice 20.

Chercher les solutions des trois équations suivantes ;

- **a)** $3x^2 - 5x - 2 = 0$
- **b)** $x^2 + 2x + 1 = 0$
- **c)** $5x^2 + 3x + 4 = 0$

Exercice 21.

Soit l'équation ; $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \neq 0$)

On a vu dans le précédent chapitre que l'écriture canonique d'un trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ est :

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Faire une discussion et extraire le discriminant Δ.

Exercice 22.

Déterminer deux nombres réels dont la somme est 7 et le produit est 6, puis vérifier le résultat.

Exercice 23.

Trouver les deux nombres réels x et y tels que ;

$$x + y = 6 \; et \; xy = 8$$

Exercice 24.

Trouver deux nombres x et y ayant pour somme 25 et pour produit 144.

Exercice 25.

L'équation $2x^2 + 3x - 5 = 0$ admet-elle deux solutions ?
a) Si oui sans calculer ces solutions x' et x'', déterminer leur somme $\mathcal{S}$ et leur produit $\mathcal{P}$.
b) En déduire ;

$$\frac{1}{x'x''}; \quad x'^2 + x''^2; \quad \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$$

Exercice 26.

Résoudre les systèmes homogènes

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 35 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Exercice 27.

Sachant que ; $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Déterminer les couples (x, y) vérifiant ;

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

Exercice 28.

Soit l'équation paramétrique ; $E_m : (m + 1)x^2 - (2m - 3)x + m - 4 = 0$

Discuter suivant les valeurs du paramètre m, les solutions de l'équation E_m.

Exercice 29.

Résoudre l'équation paramétrique ; $E_m : 2x^2 - (m-3)x + 2m - 14 = 0$

Exercice 30.

Résoudre l'équation paramétrique ; $E_m : (2m+3)x^2 - (m+5)x - 21m - 42 = 0$

Exercice 31.

Soit l'équation ; $E : 2x^2 - ax - 3a - 6 = 0$

Déterminer la valeur de a pour que l'équation E admet 2 comme solution et donner sa deuxième solution.

Exercice 32.

$ABCD$ est un rectangle déterminer le réel k tel que ;

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB+BC}{AB} = k$$

Exercice 33.

Déterminer les réels p, q et r pour que -2 et 3 soient les solutions de l'équation ;

$$E : \ x^2 - (2p+q)x + 3p - 2q = 0$$

Exercice 34.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ suivant les valeurs du paramètre réel m, les équations suivantes :

$$x^2 - (m+1)x + m = 0$$
$$(3m-5)x^2 - (m+2)x + m + 2 = 0$$
$$(m-3)x^2 - (7-4m)x + 20 = 0$$
$$(6-m)x^2 - (3m+1)x - 3 - 9m = 0$$
$$(4m+1)x^2 - 2(7-2m)x + 3 + m = 0$$
$$(m^2-4)x^2 - 2(m+2)x + (m-1) = 0$$

Exercice 35.

Déterminer m pour que 1 soit solution des équations suivantes :

$$(m+1)x^2 - 2mx + 5 = 0$$
$$mx^2 - (2m+1)x + 2 = 0$$
$$(m^2+1)x^2 + 3(m-1)x + m = 0$$

Exercice 36.

Déterminer m pour que -1 soit solution de l'équation suivante :

$$(2m-1)x^2 - 2mx + 5 = 0$$

Exercice 37.

Soit le polynôme ; $P(x) = 2x^3 - 14x - 12$

1° Calculer $P(-1)$;

2° Résoudre l'équation $P(x) = 0$

a/ En factorisant $P(x)$;

b/ Par la méthode euclidienne.

Exercice 38.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes ;

$$\frac{3x-2}{2x+5} = \frac{2x+5}{3x-2}; \qquad \frac{-12}{7x-3} = \frac{5}{2x+9}$$

$$\frac{9x^2+6x}{3x+2} = -5; \qquad \frac{3x^2-2x}{x-9} = 0$$