IV-ETUDE DES SIGNES

Faire savoir

Le cours

1. Etude des signes d'un polynôme

a) Etude des signes d'un polynôme du premier degré à une inconnue

$\boldsymbol{P(x) = ax + b}$

Dans le cas général ;

Soit le polynôme $P(x) = ax + b \; tels \; que \; a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

L'équation $ax + b = 0$ admet une seule solution $x_0 \; = \; \frac{-b}{a}$.

On distingue deux cas :

Si a > 0, le signe de ax + b est donné dans le tableau :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax + b		-	0	+	

Si a < 0, le signe de ax + b est donné dans le tableau :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax + b		+	0	-	

On peut mémoriser ces deux tableaux sous forme :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax + b		Signe de (-a)	0	Signe de (a)	

Interprétation géométrique

Dans un repère (O ; I ; J), soit (d) a droite d'équation y = ax + b (a $\neq$ 0).

On peut retrouver graphiquement le signe de y = ax + b si a > 0 (Fig. 1) ou a < 0 (Fig. 2).

a > 0	**a < 0**
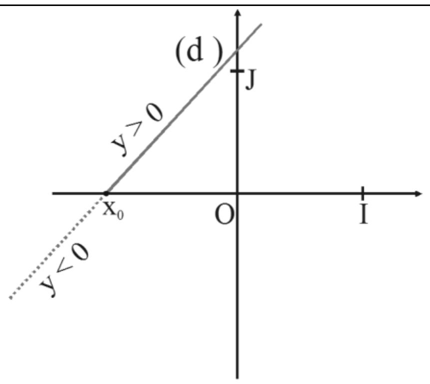	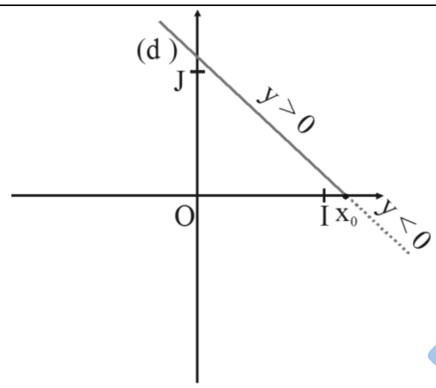
Fig. 1	Fig. 2

Exemple 1

Soit le polynôme ; $P(x) = 3x + 14$, donner son étude des signes

Solution

$$P(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{-14}{3}$$

Le tableau de l'étude des signes

x	$-\infty$		$\frac{-14}{3}$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

Exemple 2

Soit le polynôme ;$R(x) = 11 - 5x$, donner son étude des signes

Solution

La solution de l'équation associée est ; $x = \frac{11}{5}$

Le tableau de l'étude des signes

x	$-\infty$		$\frac{11}{5}$		$+\infty$
$R(x)$		$+$	0	$-$	

Exemple 3

Etudier les signes des polynômes $\frac{3}{2}x + 1$ et $-\frac{x}{4} + 3$

Solution

Les signes des deux monômes sont consignés dans les deux tableaux qui suivent :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$\frac{3}{2}x + 1$		-	0	+	

x	-∞		12		+∞
$-\frac{x}{4}+3$		+	0	-	

b) Etude des signes d'un polynôme du deuxième degré à une inconnue

$$\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx + c}$$

On commence par la recherche des solutions de l'équation associée au polynôme ;

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Cas particuliers

La forme générale peut se ramener aux cas particuliers suivants :

1) $P(x) = ax^2$ $(Lorsque\ b = 0\ et\ c = 0)$
2) $P(x) = ax^2 + c$ $(Lorsque\ b = 0\ )$
3) $P(x) = ax^2 + bx$ $(Lorsque\ c = 0)$

Tableau de l'étude des signes du polynôme ; $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + c}$

Si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ sont du même signe

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+c		$signe\ de\ a$	

Si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ sont de signes contraires

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-c}{a}}$		$\sqrt{\frac{-c}{a}}$		$+\infty$
ax^2+c		$signe(a)$	$\mathbf{0}$	$-signe(a)$	$\mathbf{0}$	$signe(a)$	

Tableau de l'étude des signes du polynôme ; $\boldsymbol{P(x) = ax^2 + bx = x(ax+b)}$

☒ $\boldsymbol{Si\ \frac{-b}{a}} < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$ax+b$		$-signe(a)$	0	$signe(a)$	|	$signe(a)$	
ax^2+bx		$signe(a)$	0	$-signe(a)$	$\mathbf{0}$	$signe(a)$	

☒ $\boldsymbol{Si\ \frac{-b}{a}} > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	

$ax+b$	$-signe(a)$	|	$-signe(a)$	$\mathbf{0}$	$signe(a)$		
ax^2+bx	$signe(a)$	0	$-signe(a)$	$\mathbf{0}$	$signe(a)$		

Signe d'un trinôme du second degré sur **R**

<table>
<tr><td>Si</td><td>alors</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{-b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>Inf (x_1 ; x_2)</td><td></td><td>Sup (x_1 ; x_2)</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe contraire de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Exemple 4

Etudier les signes des polynômes ;

$A(x) = 2x^2 + 7x + 3$ et $B(x) = -3x^2 + 8x + 3$

Solution

x	$-\infty$		-3		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$A(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$B(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

Etude des signes d'un produit de polynômes

Exemple 5

Etudier les signes des polynômes suivants ;

$A(x) = (3x^2 - 5x - 2)(4x^2 - 9)$;

Solution

$$A(x) = (3x^2 - 5x - 2)(4x^2 - 9)$$

L'équation associée est ;

$$(3x^2 - 5x - 2)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\Longrightarrow (3x^2 - 5x - 2)(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 = 0 \\ ou \\ 2x + 3 = 0 \\ ou \\ 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

On calcule le Δ de la première équation du produit ;

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 + 24 = 49$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5-7}{2 \times 3} = \dfrac{-2}{6} = \dfrac{-1}{3} \\ x_2 = \dfrac{5+7}{2 \times 3} = \dfrac{12}{6} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right)(2x+3)(2x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \dfrac{-1}{3} \\ 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3}{2} \\ 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Les solutions de l'équation associée sont ;

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-3}{2} ; \frac{-1}{3} ; \frac{3}{2} ; 2\right\}}$$

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$\frac{-1}{3}$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+\frac{1}{3}$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$A(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Etude des signes d'un quotient de polynômes

Exemple 6

Etudier les signes des quotients de polynômes suivants ;

$$Q(x) = \frac{(3x^2 + 8x - 3)(2x - 6)(x - 5)}{x + 2}$$

Solution

$$Q(x) = \frac{(3x^2 + 8x - 3)(2x + 6)(x - 5)}{x + 2}$$

Les équations associées sont ;

$$(3x^2+8x-3)(2x+6)(x-5)=0\ \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\text{et}\ \ x+2=0\ \boxed{\mathbf{2}}$$

$$\boxed{\mathbf{1}} \Longrightarrow (3x^2+8x-3)(2x-6)(x-5)=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x^2+8x-3=0 \\ ou \\ 2x-6=0 \\ ou \\ x-5=0 \end{cases}$$

On calcule le Δ de la première équation du numérateur du quotient ;

$$\Delta = 8^2 - 4\times 3\times(-3) = 64+36 = 100$$

$$\Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 10 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-8-10}{2\times 3} = \dfrac{-18}{6} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-8+10}{2\times 3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)(x+3)(2x-6)(x-5)=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{1}{3}=0 \Longrightarrow x=\dfrac{1}{3} \\ x+3 \Longrightarrow x=-3 \\ 2x-6=0 \Longrightarrow x=3 \\ x-5=0 \Longrightarrow x=5 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Les solutions de l'équation associée au numérateur sont ;

$$\boldsymbol{S} = \left\{-\mathbf{3}\,;\,\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\,;\,\mathbf{3}\,;\,\mathbf{5}\right\}$$

L'équation associée au dénominateur est ;

$$\boxed{\mathbf{2}} \Longrightarrow x+2=0 \Longrightarrow x=-2$$

(*Valeur exclue car, elle annule le dénominateur*)

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty \quad -\mathbf{3} \quad -2 \quad \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{5} \quad +\infty$
$x+3$	$- \quad 0 \quad + \mid + \mid + \mid + \mid +$
$x+2$	$- \mid - \quad 0 \quad + \mid + \mid + \mid +$
$x-\dfrac{1}{3}$	$- \mid - \mid - \quad 0 \quad + \mid + \mid +$
$x-3$	$- \mid - \mid - \mid - \quad 0 \quad + \mid +$
$x-5$	$- \mid - \mid - \mid - \mid + \quad 0 \quad +$
$\boldsymbol{Q(x)}$	$- \quad \mathbf{0} \quad + \parallel - \quad \mathbf{0} \quad + \quad \mathbf{0} \quad - \quad \mathbf{0} \quad +$

Exercices généraux

Exercice 1

Etudier, selon la valeur de x, le signe de :

a) $\frac{3}{2}x + 1$; b) $-\frac{x}{4} + 3$.

Exercice 2

Etudier les signes des polynômes ;

$C(x) = x^2 - 2x + 1$; $D(x) = -2x^2 - 4x - 2$;

$E(x) = 3x^2 - 2x + 5$; $F(x) = -3x^2 + 6x - 7$.

Exercice 3

Etudier les signes des polynômes ;

$A(x) = 5x^2 + 45$; $B(x) = -7x^2 - 21$; $C(x) = 3x^2 - 27$; $D(x) = -2x^2 + 8$

$E(x) = 4x^2 + 3x$; $F(x) = 20x - 5x^2$.

Exercice 4

Etudier les signes du produit suivant ;

$B(x) = (-2x^2 + 7x + 1)(x^2 - 3x - 12)$;

Exercice 5

Etudier les signes du quotient suivant ;

$$R(x) = \frac{(3x^2 + 4x + 5)(4x^2 - 25)}{(x + 1)(x - 2)(x + 3)}$$

Exercice 6

Discuter en fonction du paramètre réel m, les signes des fonctions suivantes :

$$A(x) = (m + 2)x - 5 - mx + (1 - m)x + 3$$

$$B(x) = mx + 7 - (2m + 7)x - 4(5 - 3m)$$

$$C(x) = (m - 3)x^2 - 7x + 2m$$

$$D(x) = (2mx - 5)(3m + 7x)$$

$$E(x) = \frac{5 - 7mx}{4x + 3m}$$