V- LES INEQUATIONS

Faire savoir

Le cours

Définition

Une inéquation est une expression algébrique qui fait intervenir une relation d'inégalité ($<$; $\leq$; $>$ *ou* $\geq$) et une ou plusieurs variables (*inconnues*) de degré **1** ou plus.

La résolution d'une inéquation est la détermination de l'ensemble des nombres réels vérifiant cette inéquation.

1. Les inéquations du premier degré à une inconnue

a) Formes générales

La forme générale d'une inéquation du premier degré à une inconnue développée et réduite est ;

$$\boldsymbol{ax+b} < 0 \,;\, ax+b \leq 0 \,;$$
$$\boldsymbol{ax+b} > 0 \; ou \; ax+b \geq 0 \ldots (a \neq 0).$$

b) Méthode de résolution

$$\boldsymbol{ax+b} < 0 \Longrightarrow ax < -b \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} < \dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}} \; \boldsymbol{si\ a} > 0 \\ \boldsymbol{x} > \dfrac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}} \; \boldsymbol{si\ a} < 0 \end{cases}$$

On a déjà vu le tableau de l'étude des signes du polynôme $\boldsymbol{P(x) = ax+b}$ il est ainsi ;

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$	$+\infty$
$\boldsymbol{ax+b}$	$\boldsymbol{-signe\ de\ a}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{signe\ de\ a}$

$$\textbf{Si } \boldsymbol{a} > 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}} = \left]-\infty; \frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}}\right[$$

$$\textbf{Si } \boldsymbol{a} < 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{S}} = \left]\frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{a}}; +\infty\right[$$

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{4} \geq \mathbf{0}$

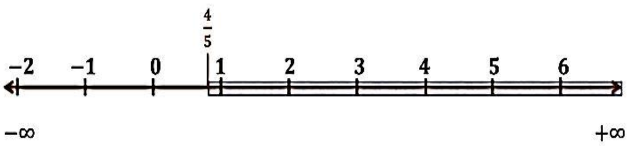
Solution

$$\mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{4} \geq \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} \geq \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$ax+b$		$-$	0	$+$	

$$\mathcal{S} = \left[\frac{4}{5};\ +\infty\right[$$



Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$-33 \leq 4x + 7 < 27$$

Solution

$$-33 \leq 4x + 7 < 27$$
$$\Rightarrow -33 - 7 \leq 4x + 7 - 7 < 27 - 7$$
$$\Rightarrow -40 \leq 4x < 20$$
$$\Rightarrow -40 \div 4 \leq 4x \div 4 < 20 \div 4$$
$$\Rightarrow -8 \leq x < 5$$
$$\mathcal{S} = \{x / -8 \leq x < 5\} = [-8; 5[$$

2. Les équations du deuxième degré à une inconnue

a) Formes générales

La forme générale d'une inéquation du deuxième degré à une inconnue développée et réduites est ;

$ax^2 + bx + c \geq 0$ **(ou** $>$ ou $\leq$ ou $<$**) Avec** $(a \neq 0)$

Cas particuliers

1) $ax^2 < 0$ **(ou** $>$ ou $\leq$ ou $\geq$**) Avec** $(a \neq 0)$
2) $ax^2 + c > 0$ **(ou** $<$ ou $\leq$ ou $\geq$**) Avec** $(a \neq 0)$
3) $ax^2 + bx \leq 0$ **(ou** $>$ ou $<$ ou $\geq$**) Avec** $(a \neq 0)$

b) Méthode de résolution

Pour déterminer l'ensemble de solution de telles inéquations, on utilise leurs études de signes telles que expliquées au chapitre IV et reprises ci-dessous ;

a- Tableau de l'étude des signes du polynôme ; $P(x) = ax^2 + c$

1° Si a et c sont du même signe

x	$-\infty$	$+\infty$

ax^2+c	$signe\ de\ a$

2° Si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ sont de signes contraires

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{-c}{a}}$	$\sqrt{\frac{-c}{a}}$	$+\infty$
ax^2+c	$sign(a)$ 0	$-sign(a)$	0 $sign(a)$	

b- Tableau de l'étude des signes du polynôme ; $p(x) = ax^2 + bx$

$1°\ Si\ \frac{-b}{a} < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	0	$+\infty$
x	$-$	| $-$	0	$+$
$ax+b$	$-sign(a)$ 0	$sign(a)$	| $sign(a)$	
ax^2+bx	$sign(a)$ 0	$-sign(a)$	0 $sign(a)$	

$2°\ Si\ \frac{-b}{a} > 0$

x	$-\infty$	0	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
x	$-$	0 $+$	| $+$	
$ax+b$	$-sign(a)$	| $-sign(a)$	0 $sign(a)$	
ax^2+bx	$sign(a)$ 0	$-sign(a)$	0 $sign(a)$	

c- Tableau de l'étude des signes du polynôme ;

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$1°\ Si\ \Delta > 0$

x	$-\infty$	$inf(x_1; x_2)$	$sup(x_1; x_2)$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$sign(a)$ 0	$-sign(a)$	0 $sign(a)$	

$2°\ Si\ \Delta = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
ax^2+bx+c	$signe\ de\ a$	0	$signe\ de\ a$

$3°\ Si\ \Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$signe\ de\ a$	

Exemple

Soit l'inéquation : $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$

Chercher l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Solution

Cherchons d'abord à résoudre l'équation associée à l'inéquation ;

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$$

$$\Longrightarrow \Delta > 0 \; et \; \sqrt{\Delta} = 3$$

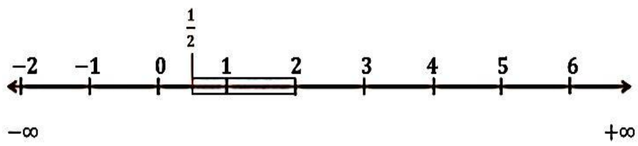
$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \; et \; x_2 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ 2 $+\infty$
$2x^2 - 5x + 2$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

L'ensemble de solutions de l'inéquation ;

$2x^2 - 5x + 2 \leq 0$ est donc ; $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2} \,; 2\right]$



Exemple

Soit l'inéquation : $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} > 0$

Chercher l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Solution

Cherchons d'abord à résoudre l'équation associée à l'inéquation ;

$$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times -2 \times \frac{-9}{2} = 36 - 36 = 0 \Longrightarrow \Delta = 0$$

$$x = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Le tableau de l'étude des signes donne ;

x	$-\infty$ $-\frac{3}{2}$ $+\infty$
$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$	$-$ 0 $-$

L'ensemble de solutions de l'inéquation ;

$$-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} > 0 \text{ est donc ; } \mathcal{S} = \emptyset$$

Exemple

Soit l’inéquation : $\boldsymbol{3x^2 - 4x + 12 \geq 0}$

Chercher l’ensemble des solutions de l’inéquation.

Solution

Cherchons d’abord à résoudre l’équation associée à l’inéquation ;

$$\boldsymbol{3x^2 - 4x + 12 = 0}$$

$$\Delta = \boldsymbol{(-4)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 16 - 144 = -128}$$

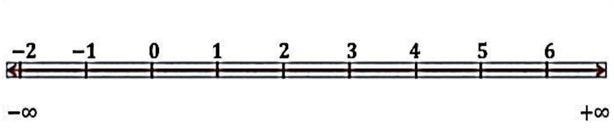
$\Longrightarrow \Delta < 0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$

Le tableau de l’étude des signes donne ;

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$+\infty$
$\boldsymbol{3x^2 - 4x + 12}$	$+$	

L’ensemble de solutions de l’inéquation ;

$$\boldsymbol{-2x^2 + 6x - \frac{9}{2}} > 0 \textbf{ est donc ; } \boldsymbol{S} = \mathbb{R}$$



Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1) $(2x - 1)(x + 1) \geq 0$; 2)$x^2 - 4x + 3 < 0$ 3) $(x^2 + x + 1)(1 - x^2) > 0$.

Solution

1)

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
2x- 1		-		-	0	+	
x + 1		-	0	+		+	
(2x - 1)(x +1)		+	0	-	0	+	

S =] $-\infty$; -1] $\cup$[$\frac{1}{2}$; + ∞ [

2)

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	0	-	0	+	

S =] 1 ; 3[.

3)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 + x + 1$		$+$		$+$		$+$	
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2 + x + 1)(1-x^2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

S =] -1 ; 1[.

Exemple 2

Pour tout réel x, on pose $\boldsymbol{f}(x) = x^3 -9x^2 +26x -24$

1) Calculer $\boldsymbol{f}(2)$,

2) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x, on ait $\boldsymbol{f}(x) = (x - 2)\,(x^2 + ax + b)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\boldsymbol{f}(x) = 0$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\boldsymbol{f}(x) > 0$.

Solution

1) $\boldsymbol{f}(2) = (2)^3 -9(2)^2 +26(2) -24 = 8 -36 +52 -24 = 60 -60 = 0$

$\boldsymbol{f}(2) = 0$.

2) **Méthode 1** : (Identification).

$\boldsymbol{f}(x) = (x - 2)\,(x^2 + ax + b) = x^3 + ax^2 +bx -2x^2 -2ax -2b$

$= x^3 + (a -2)x^2 + (b -2a)x -2b$

En utilisant l'identification on a : $\begin{cases} a-2=-9 \\ b-2a=26 \\ -2b=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=12 \end{cases}$. Donc, $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$; $\boldsymbol{f}(x) = (x - 2)\,(x^2 - 7x + 12)$.

Méthode 2 (Division euclidienne)

$$\begin{array}{l|l} x^3 -9x^2 + 26x -24 & x - 2 \\ \cline{2-2} -(x^3-2x^2) & x^2 -7x + 12 \\ \hline 0 -7x^2 +26x -24 & \\ -(-7x^2 + 14x) & \\ \hline 0 \quad + 12x -24 & \\ \quad -(12x -24) & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

Donc, $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$; $\boldsymbol{f}(x) = (x - 2)\,(x^2 - 7x + 12)$.

3) $\boldsymbol{f}(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; ou $x^2 - 7x + 12$.

$\Delta = (-7)^2 -4(1)(12) = 49 - 48 = 1$; $\sqrt{\Delta} = 1$;

$x_1 = \dfrac{7-1}{2} = 3$; $x_2 = \dfrac{7+1}{2} = 4$.

Donc S = $\{2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$.

4)

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$x - 2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x^2 - 7x + 12$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$+$	

$S =]2,3[\cup]4,+\infty[$

3. Les inéquations du premier degré à deux inconnues

a) Formes générales

La forme générale d'une inéquation du premier degré à deux inconnues est ;

$\boldsymbol{ax + by + c} < 0$; $\boldsymbol{ax + by + c} > 0$

$\boldsymbol{ax + by + c \leq 0}$ **ou** $\boldsymbol{ax + by + c \geq 0}$ **.**

Avec $\boldsymbol{a, b}$ ***et*** $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$

b) Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation du premier degré à deux inconnues, on trouve deux solutions à son équation associée.

Dans un repère $(\boldsymbol{O};\ \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}})$ du plan, on représente la droite qui correspond à cette équation. On prend ensuite un point non situé sur la droite (*le point d'origine* $\boldsymbol{O}$ *de préférence si tel est son cas*), on remplace $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ par ses coordonnées et on calcule. En fonction du signe du résultat obtenu, on décide duquel des deux demi-plans situés de part et d'autre de la droite, est la solution de l'inéquation.

4. Système de deux inéquations à deux inconnues

Méthode de résolution

Pour résoudre un système de deux inéquations à deux inconnues, on utilise la méthode graphique comme expliqué précédemment pour chaque équation. Ensuite, on cherche l'intersection des deux demi-plans solutions.

5. Inéquation produit – Inéquation quotient

a) Inéquation produit

a- Définition

On appelle inéquation produit, toute inéquation composée d'un produit de deux polynômes ou plus.

b- Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation produit, on commence par résoudre son équation associée. En fonction des racines obtenues pour l'équation associée, on dresse ensuite un tableau d'étude de signes.

Le résultat de l'étude des signes nous permet alors de déterminer le ou les intervalle(s) de réels qui sont solution de l'inéquation.

b) Inéquation quotient

a- Définition

On appelle inéquation rationnelle ou inéquation quotient, toute inéquation caractérisée par un quotient de deux ou plusieurs polynômes ;

c- Méthode de résolution

Pour résoudre une inéquation rationnelle, on commence par résoudre ses équations associées dans le numérateur et dans le dénominateur, en excluant les éventuelles valeurs qui annulent le dénominateur.

En fonction des racines obtenues pour les équations associées, on dresse un tableau d'étude des signes.

Le résultat de l'étude des signes nous permet alors de déterminer le ou les intervalle(s) de réels qui sont solution de l'inéquation.

Exemple 3

Soit l'inéquation ;

$$\mathbf{5x - 3y + 15 \leq 0}$$

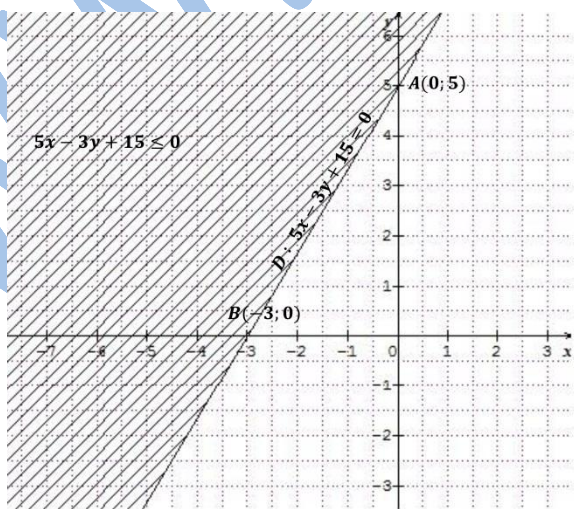
Les coordonnées des points $\boldsymbol{A(0,5)}$ et $\boldsymbol{B(-3,0)}$ sont deux solutions de l'équation associée.

Dans un repère $(\boldsymbol{O};\ \vec{\boldsymbol{\imath}},\vec{\boldsymbol{\jmath}})$ du plan, la droite $(\boldsymbol{AB})$ partage le plan en deux demi-plans.

Pour déterminer celui qui est la solution de l'inéquation, on remplace par les coordonnées de $\boldsymbol{O(0,0)}$,

On a ; $\mathbf{5 \times 0 - 3 \times 0 + 15 = 15}$

Donc ; le point $\boldsymbol{O}$ appartient au demi-plan qui n'est pas solution de l'inéquation.



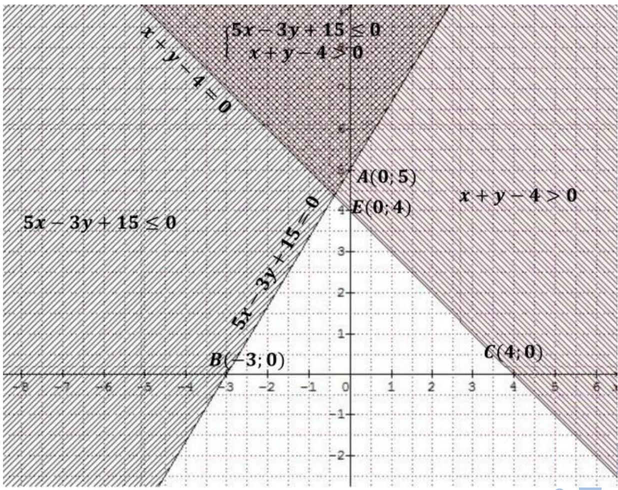
La solution de l'inéquation $\mathbf{5x - 3y + 15 \leq 0}$ est le demi-plan fermé de frontière la droite $(\boldsymbol{AB})$ et ne contenant pas l'origine.

Système de deux inéquations à deux inconnues

Exemple 4

$$\textbf{Soit le système } \begin{cases} \mathbf{5x - 3y + 15 \leq 0} \\ \mathbf{x + y - 4 > 0} \end{cases}$$

La solution de ce système est la zone du plan doublement hachurée, fermée du côté de la droite $(\boldsymbol{AB})$, et ouverte du côté de la droite $(\boldsymbol{CE})$.

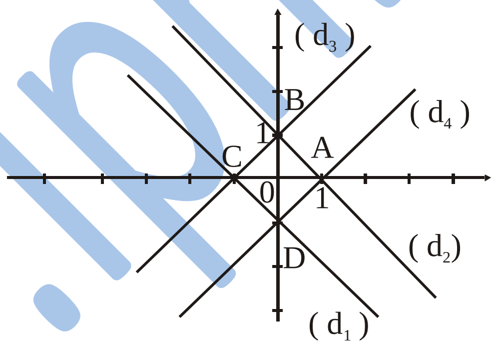


Exemple 5

le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Déterminer l'ensemble des points M(x ; y) tels que : $\begin{cases} -1 \leq x+y \leq 1 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases}$.

Solution



$$\begin{cases} -1 \leq x+y \leq +1 \\ -1 \leq x-y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \geq 0 \\ x+y-1 \leq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \end{cases}.$$

Or

- $x + y + 1 \geq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_1) d'équation $x + y + 1 = 0$.
- $x + y - 1 \leq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_2) d'équation $x + y - 1 = 0$
- $x - y + 1 \geq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_3) d'équation $x - y + 1 = 0$
- $x - y - 1 \leq 0$ est l'équation cartésienne du demi-plan contenant O de frontière la droite (d_4) d'équation $x - y - 1 = 0$

En conclusion, l'ensemble demandé est la partie du plan limitée par le carré ABCD (voir figure).

Exercices généraux

Inéquations du premier degré

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes puis représenter graphiquement leurs ensembles de solutions :

$$\boldsymbol{-3x + 4 \geq 0} ; \quad \boldsymbol{-13 \leq 4x + 7} < 19$$

Inéquations du deuxième degré

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$2x^2 - 5x + 2 \leq 0$; $-2x^2 + 6x - \dfrac{9}{2} > 0$;

$3x^2 - 4x + 12 \geq 0$

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$x^2 + 2x + 1 \geq 0$; $3x^2 - 7x + 2 < 0$;

$-2x^2 + 5x + 3 \leq 0$; $3x^2 + 2x + 5 < 0$;

$-4x^2 + 3x - 6 \leq 0$

Exercice 4

Etudier les signes, résoudre les inéquations et représenter graphiquement leurs ensembles de solutions :

$$\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right) < 0$$

$$x^2 + x + 1 \leq 0$$

Inéquation produit

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations produits suivantes, puis représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$(3x^2 - 5x - 2)(4x^2 - 9) < 0$;

$(-2x^2 + 7x + 1)(x^2 - 3x - 12) > 0$;

$(2x + 5)(4x - 7)(x - 10) \leq 0$;

$(x^3 - 3x^2 + 9x - 27)(36x^2 - 81) \geq 0$.

Inéquation quotient

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations rationnelles suivantes, puis représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$$\frac{(3x^2 + 8x - 3)(2x - 6)(x - 5)}{x + 2} \leq 0$$

$$\frac{(3x^2 + 4x + 5)(4x^2 - 25)}{(x + 1)(x - 2)(x + 3)} \geq 0$$

Système de deux inéquations à une inconnue

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, puis représenter graphiquement leurs ensembles de solutions ;

$$I-\begin{cases}\mathbf{2(5-4x)-3(7x+1)}<0 & \boxed{1}\\ \mathbf{-4(x-7)+6(4x+9)\geq 0} & \boxed{2}\end{cases}$$

$$II-\begin{cases}\mathbf{3(7x-12)\geq -6(2x-5)} & \boxed{1}\\ \mathbf{-2(5x+4)\geq 4(3x-1)} & \boxed{2}\end{cases}$$

$$III-\begin{cases}\mathbf{7x-5\geq 5x-11} & \boxed{1}\\ \mathbf{x+10}>4\mathbf{x-5} & \boxed{2}\end{cases}$$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbf{R}$: les inéquations :

$x+1\geq 0$; $2x-1\leq 0$; $\frac{1}{3}x+1\geq 0$.

$x^2-4x+3>0$; $x^2+x+1<0$

$2x^2-x-1<0$; $x^2-1\geq 0$

$(x-1)(x+3)\leq 0$; $(1-2x)^2(1+x)<0$

Exercice 9

Résoudre graphiquement les inéquations ou systèmes d’inéquations suivantes :

1) $2y-x+2\leq 0$; 2) $y\geq 0$; 3) $x\leq 1$.

4) $\begin{cases}x+y-1<0\\ 2x-3y>0\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x+y-1\geq 0\\ x-2y+4\geq 0\end{cases}$