

VI- VALEUR ABSOLUE ET POLYNOMES



Faire savoir

Le cours

1. La valeur absolue associée à un polynôme

a) Polynôme $ax + b$ ($a \neq 0$)

$$1^\circ \text{ si } a > 0 \Rightarrow |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \geq \frac{-b}{a} \\ -ax - b & \text{si } x \leq \frac{-b}{a} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	+
$ ax + b $	$-ax - b$	0	$ax + b$

Résumé

$$\text{Si } a > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x \in]-\infty; \frac{-b}{a}] \Rightarrow |ax + b| = -ax - b \\ \text{Si } x \in [\frac{-b}{a}; +\infty[\Rightarrow |ax + b| = ax + b \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ si } a < 0 \Rightarrow |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq \frac{-b}{a} \\ -ax - b & \text{si } x \geq \frac{-b}{a} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	+	0	-
$ ax + b $	$ax + b$	0	$-ax - b$

Résumé

$$\text{Si } a < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x \in]-\infty; \frac{-b}{a}] \Rightarrow |ax + b| = ax + b \\ \text{Si } x \in [\frac{-b}{a}; +\infty[\Rightarrow |ax + b| = -ax - b \end{cases}$$

Exemple 1

Donner sur \mathbb{R} les expressions de : $|5x + 7|$ et $|-3x + 2|$

Solution

$$|5x + 7| = \begin{cases} 5x + 7 & \text{si } x \geq \frac{-7}{5} \\ -5x - 7 & \text{si } x \leq \frac{-7}{5} \end{cases}$$

Tableau

x	$-\infty$	$\frac{-7}{5}$	$+\infty$
$5x + 7$	$-$	0	$+$
$ 5x + 7 $	$-5x - 7$	0	$5x + 7$

$$\text{Conclusion} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x \in \left] -\infty; \frac{-7}{5} \right] \Rightarrow |5x + 7| = -5x - 7 \\ \text{Si } x \in \left[\frac{-7}{5}; +\infty \right[\Rightarrow |5x + 7| = 5x + 7 \end{cases}$$

$$|-3x + 2| = \begin{cases} -3x + 2 & \text{si } x \leq \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Tableau

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-3x + 2$	$+$	0	$-$
$ -3x + 2 $	$-3x + 2$	0	$3x - 2$

$$\text{Conclusion} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x \in \left] -\infty; \frac{2}{3} \right] \Rightarrow |-3x + 2| = -3x + 2 \\ \text{Si } x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty \right[\Rightarrow |-3x + 2| = 3x - 2 \end{cases}$$

Exemple 2

Donner sur \mathbb{R} les expressions de : $|4x + 7|$ et $|3 - 11x|$

Solution

$$|4x + 7| = \begin{cases} 4x + 7 & \text{si } x \geq \frac{-7}{4} \\ -4x - 7 & \text{si } x \leq \frac{-7}{4} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{-7}{4}$	$+\infty$
$4x + 7$	$-$	0	$+$
$ 4x + 7 $	$-4x - 7$	0	$4x + 7$

Résumé

$$\begin{cases} \text{Si } x \in \left] -\infty; \frac{-7}{4} \right] \Rightarrow |4x + 7| = -4x - 7 \\ \text{Si } x \in \left[\frac{-7}{4}; +\infty \right[\Rightarrow |4x + 7| = 4x + 7 \end{cases}$$

$$|3 - 11x| = \begin{cases} 3 - 11x \text{ si } x \leq \frac{3}{11} \\ 11x - 3 \text{ si } x \geq \frac{3}{11} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{11}$	$+\infty$
$3 - 11x$	+	0	-
$ 3 - 11x $	$3 - 11x$	0	$11x - 3$

Résumé

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x \in \left] -\infty; \frac{3}{11} \right] \Rightarrow |3 - 11x| = 3 - 11x \\ \text{Si } x \in \left[\frac{3}{11}; +\infty \right[\Rightarrow |3 - 11x| = 11x - 3 \end{cases}$$

b) Polynôme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$\Delta > 0$	$a > 0$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
		$ax^2 + bx + c$		-	0	+	0	-
		$ ax^2 + bx + c $	$-ax^2 - bx - c$	0	$ax^2 + bx + c$	0	$-ax^2 - bx - c$	
	$a < 0$	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
		$ax^2 + bx + c$		+	0	-	0	+
		$ ax^2 + bx + c $	$ax^2 + bx + c$	0	$-ax^2 - bx - c$	0	$ax^2 + bx + c$	
$\Delta = 0$	$a > 0$	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$			
		$ax^2 + bx + c$		+	0	+		
		$ ax^2 + bx + c $	$ax^2 + bx + c$	0	$ax^2 + bx + c$			
	$a < 0$	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$			
		$ax^2 + bx + c$		-	0	-		
		$ ax^2 + bx + c $	$-ax^2 - bx - c$	0	$-ax^2 - bx - c$			
$\Delta < 0$	$a > 0$	x	$-\infty$	$+\infty$				
		$ax^2 + bx + c$		+				
		$ ax^2 + bx + c $	$ax^2 + bx + c$					
	$a < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$				
		$ax^2 + bx + c$		-				
		$ ax^2 + bx + c $	$-ax^2 - bx - c$					

Exemple 3

Donner l'expression de B sur \mathbb{R}

$$B(x) = |2x^2 - 7x + 5|$$

Solution

$$2x^2 - 7x + 5 = 0 \Rightarrow 2 - 7 + 5 = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

Conclusion

$$\begin{cases} \text{Si } x \in]-\infty; 1] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty[\Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 \geq 0 \\ \quad \Rightarrow |2x^2 - 7x + 5| = 2x^2 - 7x + 5 \\ \text{Si } x \in [1; \frac{5}{2}] \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 \leq 0 \\ \quad \Rightarrow |2x^2 - 7x + 5| = -2x^2 + 7x - 5 \end{cases}$$

Exercices généraux

Exercice 1

Donner l'expression algébrique de A sur \mathbb{R}

$$A(x) = |2x + 6| + |4 - 2x| + |x - 1|$$

a) La valeur absolue appliquée aux équations

Exercice 2

Pour quelle valeur de x a-t-on :

$$\left| \frac{-3}{x} \right| = \frac{3}{x} ?$$

Exercice 3

Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{|-5x^2|}{|25x|} = \frac{|x|}{5}$$

Exercice 4

Pour quelle valeur réelle x a-t-on :

$$\sqrt{(x-1)^2} = x - 1 ?$$

Exercice 5

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

$$\blacksquare |3 - 2x| = 11;$$

$$\blacksquare 2 - 3|4 - x| = 0;$$

$$\blacksquare 1 + |5x - 6| = 0.$$

Exercice 6

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$|2x + 3| = |3x - 7|.$$

Exercice 7

Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

$$\blacksquare |5x - 4| = |7x + 1|;$$

$$\blacksquare |x^2 - 1| = |7 - x^2|.$$

Exercice 8

Résoudre les équations :

$$\blacksquare |3x + 1| + |x - 2| = 9;$$

$$\blacksquare |2 - 5x| + |3x - 1| = 1.$$

Exercice 9

Résoudre les équations

$$\boxtimes ||x + 2| + 3| = 5$$

$$\boxtimes ||x^2 + 9| - 16| = 1$$

Exercice 10

Résoudre dans \mathbb{R}

$$\boxtimes ||x - 5| + 6| = 7$$

$$\boxtimes ||x + 4| - 1| = 5$$

$$\boxtimes ||x - 5| - 8| = 1$$

$$\boxtimes ||x^2 + 10| + 8| = 12$$

$$\boxtimes ||x^2 - 4| + 11| = 6$$

$$\boxtimes ||x^2 - 3| - 7| = 10$$

b) La valeur absolue appliquée aux inéquations

Exercice 11

Déterminer les réels vérifiant :

$$|5 + 3x| \leq 4,$$

En donnant une représentation graphique de l'ensemble de solutions.

Exercice 12

Résoudre les inéquations :

$$\blacksquare |7 - 2x| \leq 3;$$

$$\blacksquare |x^2 - 2| \leq 1.$$

Exercice 13

Résoudre les inéquations :

$$\blacksquare \frac{|2x - 5|}{|x - 4|} < 1$$

$$\blacksquare |3 - x| \geq |x + 3| - 2|x|$$

Exercice 14

Résoudre les inéquations

$$\boxtimes ||x - 14| - 3| \leq 1$$

$$\boxtimes ||x^2 + 7| - 4| > 12$$

Valeur absolue associée aux produits et quotients de polynômes

Exercice 15

Donner l'expression algébrique sur \mathbb{R} de :

$$A(x) = |(x - 5)(x + 3)(2x + 7)(3 - 4x)|$$

$$B(x) = |(-3x^2 + 5x + 2)(2x^2 - 7x + 3)|$$

$$C(x) = |(2x - 3)(7 - 5x)(x^2 + 8x - 9)|$$

Exercice 16

Donner l'expression algébrique sur \mathbb{R} de :

$$D(x) = \left| \frac{(x - 2)(x + 6)(3x + 2)}{(2x - 7)(3 - 4x)} \right|$$

$$E(x) = \left| \frac{(x - 9)(-3x^2 + 5x + 2)(3x + 2)}{(x^2 + 4x + 4)(x^2 - 9)} \right|$$