VII- CALCUL VECTORIEL ET GEOMETRIE ANALYTIQUE

Faire savoir

Le cours

1. Notion de vecteur

Définition

Un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est déterminé par ;

- Une longueur ; celle du segment $[AB]$ appelée norme de $\vec{u}$,
- Une direction ; celle de la droite (AB),
- Un sens ; celui de A vers B.

Remarque 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont égaux s'ils ont :

- La même longueur,
- Le même sens,
- La même direction.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés s'ils ont :

- La même longueur,
- La même direction,
- Deux sens contraires.

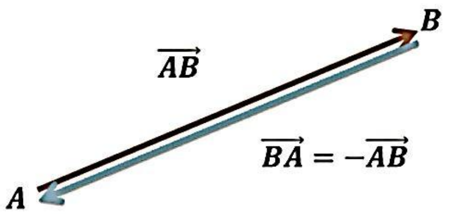
a) Relations vectorielles

Pour tout point A du plan $\mathcal{P}$, on a :

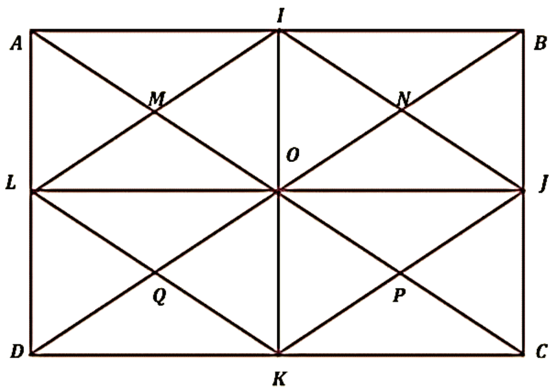
$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ *(Vecteur nul).*

Pour tous points A et B du plan $\mathcal{P}$, on a :

$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ ($\overrightarrow{BA}$ *est l'opposé de* $\overrightarrow{AB}$).



Exemple



Sur la figure ci-dessus, donner ;

■ Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AM}$;

■ Tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AI}$;

■ Tous les vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{AL}$.

Solution

■ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{QK}$;

■ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{KC}$;

■ Vecteurs opposés à $\overrightarrow{AL}$: $-\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LA} = \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{QM} = \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JB}$

b) Somme de vecteurs

Pour additionner des vecteurs, on utilise la relation de Chasles.

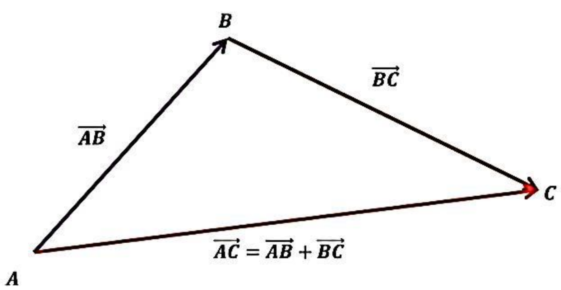
Pour tous points A, B et C du plan $\mathcal{P}$, on a :

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ *(Relation de Chasles).*

La relation de Chasles peut aussi s'écrire ;

Pour tous points A, B et C du plan $\mathcal{P}$, et pour tout point $M \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$.

En particulier ; $O \in \mathcal{P} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.



Exercice

Démontrer la deuxième écriture de la relation de Chasles.

Exemple

ABC est un triangle un triangle non aplati, P et Q sont deux points du plan définis par :

$3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP}$ et $2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0}$

En utilisant la relation de Chasles, déterminer les coordonnées de P et Q dans le repère $(B;\ \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

Solution

$$3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} \Longrightarrow 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BP} \Longrightarrow -3\overrightarrow{BP} - 4\overrightarrow{BP} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$$

$$\Longrightarrow -7\overrightarrow{BP} = -3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{7}\overrightarrow{BC} \Longrightarrow \boldsymbol{P}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}};\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\right)$$

$$2\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BQ} = \vec{0} \Longrightarrow 2\overrightarrow{QB} + 2\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BQ} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow -2\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Longrightarrow -3\overrightarrow{BQ} = -2\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BC} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\right)$$

Exemple

Soit ABC un triangle non aplati, et soit M un point quelconque du plan tel que ;

$$5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC}$$

En utilisant la relation de Chasles, montrer que les points A, B et C sont alignés.

Solution

$$5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} + 7\overrightarrow{MC} \Longrightarrow 5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow 5\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 5\overrightarrow{MA} = 5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow 5\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\ \ et\ \ \overrightarrow{AC}\ \text{colinéaire} \Longrightarrow A, B\ et\ C\ \text{alignés}$$

c) Egalités vectorielles et configurations de base

1°/ Milieu et vecteurs

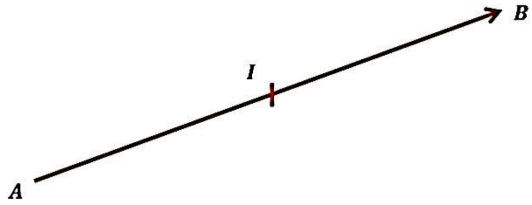
A°) Milieu d'un segment et vecteurs

Soit $[AB]$ un segment de milieu I, on a :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IB}$.

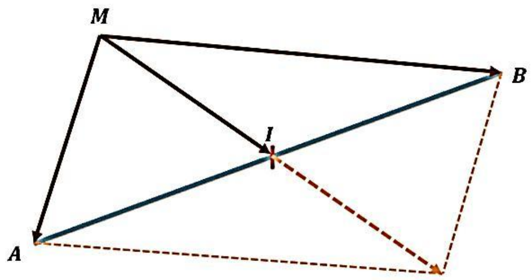
$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.



Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$;

$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$.



Exercice

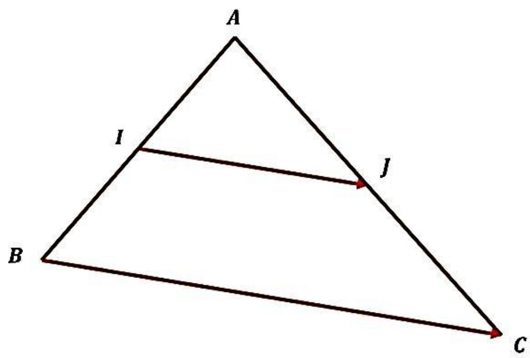
Démontrer la dernière propriété.

B°) Milieux des côtés d'un triangle et vecteurs

Soit ABC un triangle. I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, alors :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ ;}$$

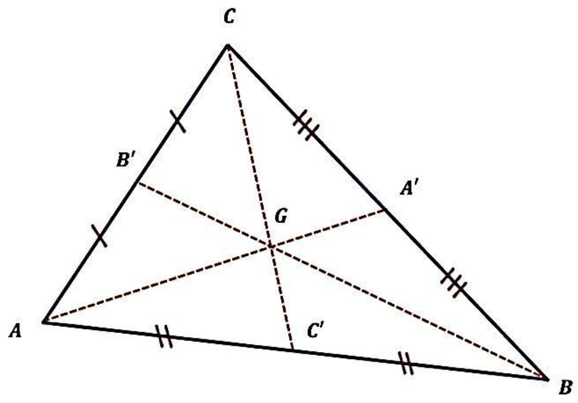
$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}.$$



Exercice

Démontrer la propriété précédente

2°/ Centre de gravité et vecteurs



Soit ABC un triangle de centre de gravité G.

Et soit A' le milieu de $[BC]$, alors :

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\ \boxed{\mathbf{1}};$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GA'}\ \boxed{\mathbf{2}};$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\ \boxed{\mathbf{3}}.$$

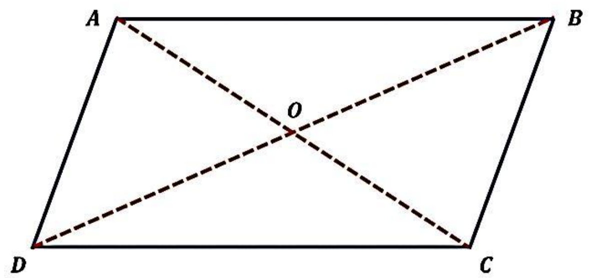
$$\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\ \boxed{\mathbf{4}};$$

$$\forall\, M\in\mathcal{P}\ \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}\ \boxed{\mathbf{5}}$$

Exercice

Démontrer les propriétés précédentes.

3°/ Parallélogramme et vecteurs



$ABCD$ est un parallélogramme de centre O ;

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\ et\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC};$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC};$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD};$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}\ et\ \overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}.$$

Exemple 1

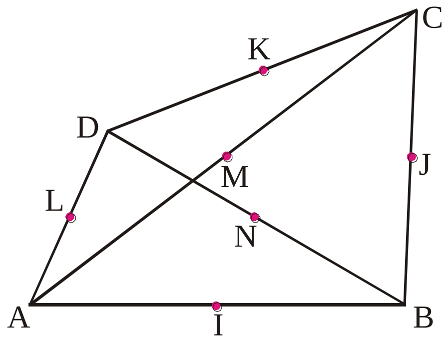
Soit $ABCD$ un quadrilatère. I; J; K; L; M; N les milieux respectives de $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$; $[DA]$; $[AC]$; $[BD]$.

1) Démontrer que les segments $[IK]$; $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu G.

2) Démontrer que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Solution

1) Dans le triangle ABC, on a : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;



Dans le triangle ACD, on a : $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
Donc, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.
Donc, $IJKL$ est un parallélogramme.
Donc $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu.
Dans le triangle ACD, on a : $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$;
Dans le triangle BCD, on a : $\overrightarrow{NJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,
Donc ; $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{NJ}$;
Donc, $LMJN$ est un parallélogramme.
Donc $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu.
D'où les segments $[IK]$; $[JL]$ et $[MN]$ ont le même milieu G.
2) On a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right)$

$$= 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GK} = 2\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK}\right) = 2\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$$

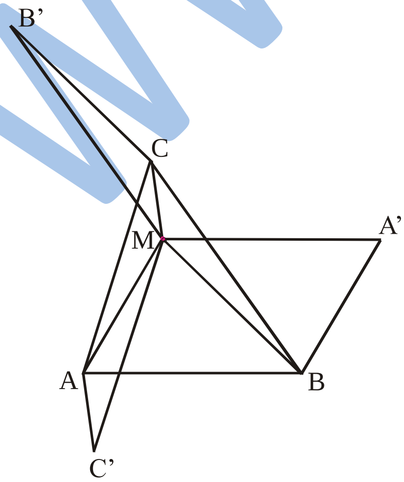
Donc, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Exemple 2

Soit ABC un triangle. M un point n'appartenant ni à (AB), ni à (AC), ni à (BC).
1) Construire les points A' ; B' ; C' tels que $MABA'$; $MBCB'$; $MCAC'$ soient des parallélogrammes.
2) Démontrer que M est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Solution

1) Construction



2) On a : $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Donc, M est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

Exemple

Soit ABC un triangle quelconque. A' le milieu de $[BC]$, G le centre de gravité du triangle ABC, D et E les points tels que ; $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On note I le milieu de $[DE]$.

1° Faire une figure illustrant les données précédentes.

2° a) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

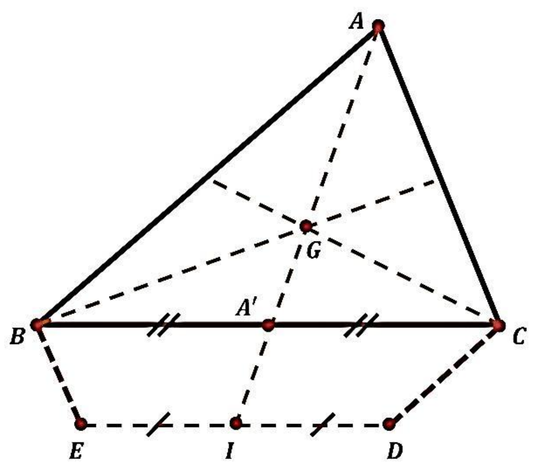
3° a) Démonter que les points A, A' et I sont alignés.

b) Démonter que le point G est le milieu de $[AI]$.

4° Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Solution

1°



2° a) Calculons $\overrightarrow{AI}$ par deux chemins :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DI}$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} + \underbrace{\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{DI}}_{\vec{0}}$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$$

b) $\boldsymbol{\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}$

3° a) $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\overrightarrow{\boldsymbol{AI}}\ \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \mathbf{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AA'}}\ \boxed{\mathbf{2}}$$

De $\boxed{\mathbf{1}}$ et $\boxed{\mathbf{2}}$ on a ;

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AA'}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires $\Rightarrow A, A'$ et I sont alignés.

b) G est le centre de gravité du triangle ABC et A' est le milieu de $[BC]$;

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$$

comme on a déjà $\overrightarrow{AI} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} \Rightarrow \boldsymbol{G = A * I}$

4° on a ;

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{ED} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires

$\Rightarrow \boldsymbol{(BC)//(ED)}$

4° Configuration de Thalès-Milet et vecteurs

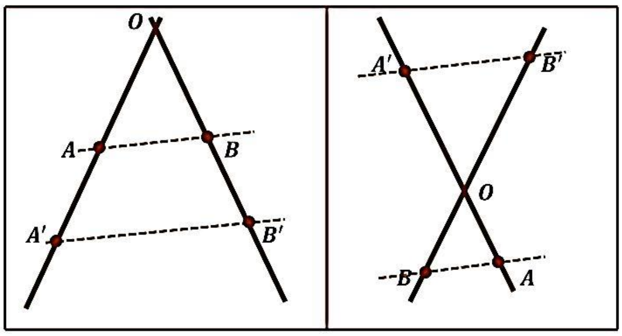
A/ Première version Thalès

Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne les deux droites (AB) et $(A'B')$ sécante en O de sorte que ;

$$\overrightarrow{OA'} = x.\overrightarrow{OA}\ \ et\ \ \overrightarrow{OB'} = y.\overrightarrow{OB}$$

Alors ; les coefficients de colinéarité x et y sont égaux si et seulement si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Dans ce cas ; $\overrightarrow{A'B'} = x.\overrightarrow{AB}$



Démonstration

☒ $\boldsymbol{x = y} \Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = x.\overrightarrow{OB} - x.\overrightarrow{OA}$

$= x.\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = x.\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \boldsymbol{(A'B')//(AB)}.$

☒ $\boldsymbol{(A'B')//(AB)} \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{A'B'} = k.\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k.\overrightarrow{OB} - k.\overrightarrow{OA}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{OB} - k.\overrightarrow{OA}}\ \boxed{1}$$

D'autre part on a déjà ;

$$\boldsymbol{\overrightarrow{A'B'} = x.\overrightarrow{OB} - y.\overrightarrow{OA}}\ \boxed{2}$$

$x \neq k$ ou $y \neq k \Longrightarrow \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

Donc $k = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

Remarque

1° Si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ d'une part, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ d'autre part, sont de même sens, on a ;

$$x = \frac{OA'}{OA} \text{ et } y = \frac{OB'}{OB}$$

Sous ces conditions, on pourra énoncer :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Longleftrightarrow (AB)//(A'B')$$

2° De même, lorsque les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont de sens contraires, ainsi que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$;

$$x = -\frac{OA'}{OA} \text{ et } y = -\frac{OB'}{OB}$$

Sous ces conditions, on pourra énoncer :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Longleftrightarrow (AB)//(A'B')$$

B/ Deuxième version Milet

Dans le plan $\mathcal{P}$, on donne le point O et les deux droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de sorte que $O \notin \mathcal{D}$ et $O \notin \mathcal{D}'$.

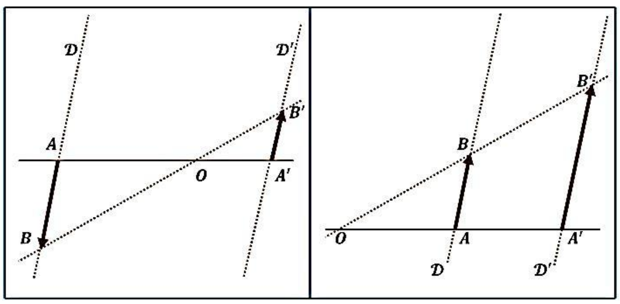
Soit A et B deux points de $\mathcal{D}$ et A' et B' deux points de $\mathcal{D}'$ tels que :

$$\overrightarrow{OA'} = x.\overrightarrow{OA} \ \ et \ \ \overrightarrow{A'B'} = y.\overrightarrow{AB}$$

Alors les points O, B et B' sont alignés si et seulement si les coefficients de colinéarité x et y sont égaux.

Dans ce cas, on a aussi ;

$$\overrightarrow{OB'} = x.\overrightarrow{OB}$$



Démonstration

☒ **Supposons que $x = y$**

On a : $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'}$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OB'} = x.\overrightarrow{OA} + x.\overrightarrow{AB} = x.\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = x.\overrightarrow{OB}$$

$\Longrightarrow O, B$ et B' sont alignés.

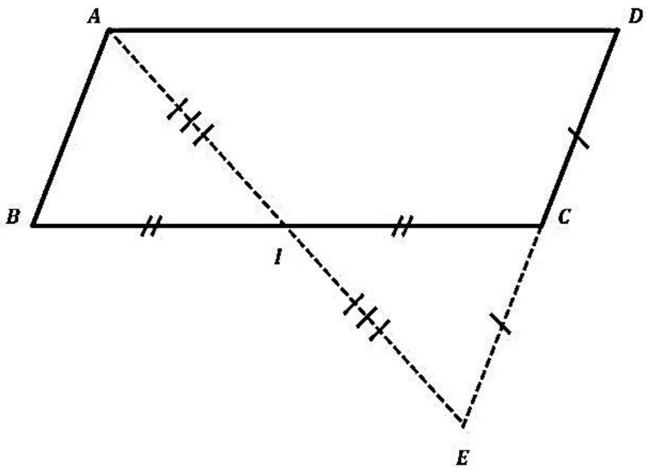
☒ **Inversement, lorsque O, B et B' sont alignés,** d'après la version 1 (*Thalès*), les trois coefficients de proportionnalité (*de $\overrightarrow{OA'}$ par rapport à $\overrightarrow{OA}$, de $\overrightarrow{OB'}$ par rapport à $\overrightarrow{OB}$, de $\overrightarrow{A'B'}$ par rapport à $\overrightarrow{AB}$*), sont égaux.

Exercice

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et I le milieu de $[BC]$. On désigne par E le point d'intersection de (AI) et (CD).

Montrer que C est le milieu de $[DE]$.

Solution



$ABCD$ est un parallélogramme non aplati, alors

$$(AB)//(CD)\ et\ \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{DC}}\ \boxed{1}$$

$$E \in (CD) \Longrightarrow (EC)//(AB)$$

$$\begin{cases} (EC)//(AB) \\ et \\ I = B * C \end{cases} \Longrightarrow \frac{BI}{IC} = \frac{AI}{IE} = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} \\ et \\ \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IE} \end{cases}$$

$\Longrightarrow I = A * E \Longrightarrow BACE$ est un parallélogramme

$$\Longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CE}}\ \boxed{2}$$

De $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, on a ; $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} \Longrightarrow \boldsymbol{C = D * E}$

d) Produit d'un vecteur par un réel

$* \ \forall \vec{u} \in \mathcal{V} \Longrightarrow \begin{cases} 0.\vec{u} = \vec{0} \\ 1.\vec{u} = \vec{u} \\ -1.\vec{u} = -\vec{u} \end{cases}$

$$* \ \forall\, \vec{u},\vec{v} \in \mathcal{V}, \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \\ (\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \\ \alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u}+\alpha\vec{v} \end{cases}$$

Exemple 7

1°/Sur la figure ci-dessous, compléter ;

$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AM}=\cdots$; $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DP}=\cdots$; $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{PC}=\cdots$;

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{JN}=\cdots$; $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AI}=\cdots$; $\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KL}=\cdots$; $\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{PM}=\cdots$.

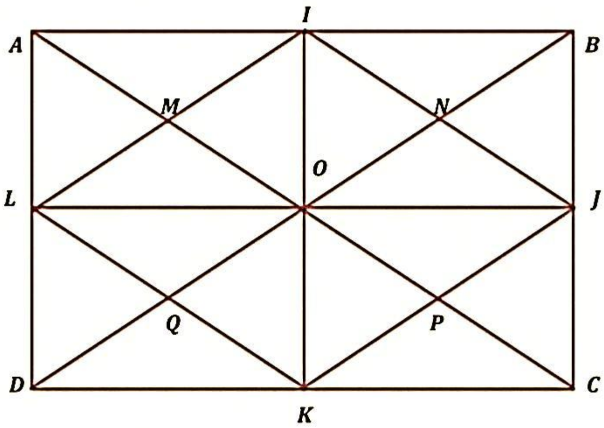
2°/ Compléter :

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{\dots J}$, $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{\dots}=\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{\dots}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{QJ}$, $\overrightarrow{C\dots}+\overrightarrow{\dots O}=\overrightarrow{DA}$.

3°/ compléter par le nombre qui convient ;

$\overrightarrow{DQ}=\cdots\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AD}=\cdots\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}=\cdots\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{DB}=\cdots\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{CP}=\cdots\overrightarrow{AO}$.



Solution

1°/

$\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{LQ}=\overrightarrow{AQ}$,

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{AI}$,

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}$,

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{JN}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$,

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AK}$,

$\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{KI}$,

$\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{CI}$.

2°/

$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{\dots J} \Longrightarrow \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NJ}$,

$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{\dots}=\overrightarrow{AC} \Longrightarrow \overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{\dots}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{QJ} \Longrightarrow \overrightarrow{QN}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{QJ}$,

$\overrightarrow{C\dots}+\overrightarrow{\dots O}=\overrightarrow{DA} \Longrightarrow \overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{KO}=\overrightarrow{DA}$.

3°/

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4} \times \overrightarrow{DB}, \qquad \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \times \overrightarrow{AP}, \qquad \overrightarrow{BQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BO}$$

$$\overrightarrow{DB} = \frac{4}{3} \times \overrightarrow{DN}, \qquad \overrightarrow{CP} = -\frac{1}{2} \times \overrightarrow{AO}.$$

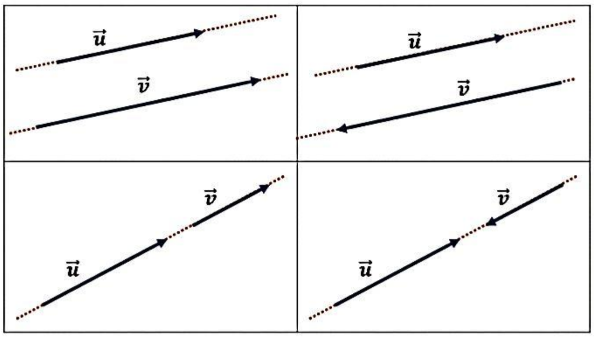
e) Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction. C'est-à-dire, lorsqu'ils sont portés par deux droites parallèles ou par une même droite.

Autrement dit ; deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si ; $\vec{v} = k.\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$.

On a	Si et seulement si
$\vec{v} = k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R}_+)$	$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires et de même sens*
$\vec{v} = k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R}_-)$	$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires et de sens contraires*



Remarque 1

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $0.\vec{u} = \vec{0}$. Le vecteur nul $(\vec{0})$ est colinéaire à tout vecteur.

On dit du vecteur nul $(\vec{0})$ qu'il a toutes les directions.

Remarque 2

Si deux vecteurs sont colinéaires, alors tout vecteur colinéaire à l'un est aussi colinéaire à l'autre.

a- Combinaison linéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de $\mathcal{V}$ et soit α et β deux réels.

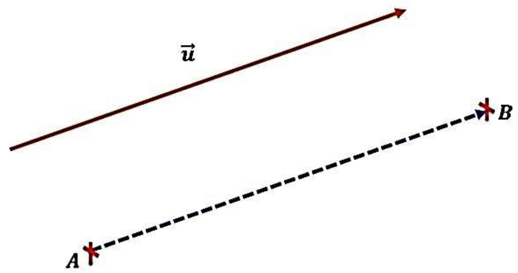
Le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

b- Norme d'un vecteur

On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$, et on la note $\|\vec{u}\|$, la distance entre deux points pris pour origine et extrémité correspondant au vecteur $\vec{u}$.

C'est-à-dire que, si A et B sont deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, alors ;

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}).$$



Pour tout vecteur $\vec{u}$ on a ;

$\|\vec{u}\| \geq 0$.

$\|\vec{0}\| = 0$ et $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

$\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k on a ;

$\|k.\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a ;

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Exercice

Démontrer cette dernière propriété.

Exemple 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On pose $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

1) Montrer que :

$\|\vec{w}\| \leq 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|$.

2) On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Montrer que $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Solution

1) On a : $\|\vec{w}\| = \|2\vec{u} - 3\vec{v}\|$

$\leq \|2\vec{u}\| + \|-3\vec{v}\|$

$\leq |2|\|\vec{u}\| + |-3|\|\vec{v}\|$

$\leq 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|$

Donc, $\|\vec{w}\| \leq 2\|\vec{u}\| + 3\|\vec{v}\|$.

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbf{R}$.

Donc, $\vec{w} = 2\vec{u} + 3(k\vec{u}) = 2\vec{u} + (3k)\vec{u} = (2+3k)\vec{u}$
et $(2 + 3k) \in \mathbf{R}$.

Donc, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Donc ; les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont colinéaires.

c- Vecteur unitaire

On dit d'un vecteur $\vec{u}$ qu'il est unitaire lorsque ; $\|\vec{u}\| = 1$.

2. Base de $\mathcal{V}$ (*$\mathcal{V}$ est l'ensemble des vecteurs du plan*)

Définition

On appelle base de $\mathcal{V}$, tout couple ordonné $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de vecteurs non nuls et non colinéaires.

a) Projection vectorielle

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$.

Il existe un couple unique $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ tels que ;

$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1$ colinéaire à $\vec{\imath}$ et $\vec{u}_2$ colinéaire à $\vec{\jmath}$.

Le vecteur $\vec{u}_1$ est appelé le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{\imath}$ dans la direction de $\vec{\jmath}$ et $\vec{u}_2$ est appelé le projeté de $\vec{u}$ sur $\vec{\jmath}$ dans la direction de $\vec{\imath}$.

Définition

L'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui au vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur $\vec{u}_1$ est appelé projection vectorielle de $\vec{u}$ sur $\vec{\imath}$ dans la direction de $\vec{\jmath}$.

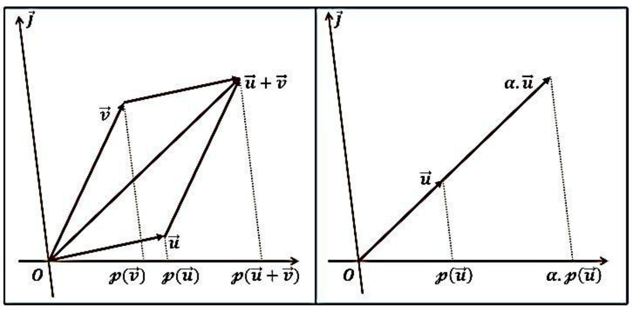
En général, on note $\wp$ une projection vectorielle, lorsque, aucune confusion sur les données n'est à craindre.

b) Propriété

Soit $\wp$ une projection vectorielle, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le réel α, on a :

$$\boldsymbol{\wp(\vec{u}+\vec{v}) = \wp(\vec{u}) + \wp(\vec{v})}\ \boxed{1}$$

$$\boldsymbol{\wp(\alpha.\vec{u}) = \alpha.\wp(\vec{u})}\ \boxed{2}$$



Exercice

Soit un triangle ABC, et E, F, D les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}\ ; \quad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}\ ; \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$$

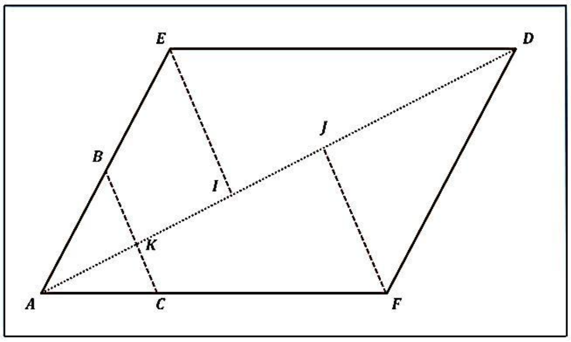
1° Les parallèles à (BC) passant par E et F coupent (AD) en I et J.

Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}$

2° On désigne par K le point d'intersection de (BC) et (AD).

Montrer que $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AK}$.

Solution



1° Soit $\wp$ la projection vectorielle sur (AD) dans la direction de (BC)

On a ; $\wp(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AD}$; $\wp(\overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AI}$; $\wp(\overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{AJ}$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} \Longrightarrow \wp(\overrightarrow{AD}) = \wp(\overrightarrow{AE}) + \wp(\overrightarrow{AF})$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}}$$

2°

$$\overrightarrow{AE} = 2.\overrightarrow{AB} \Longrightarrow$$
$$\wp(\overrightarrow{AE}) = \wp(2.\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AI} = 2.\wp(\overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AK}$$
$$\overrightarrow{AF} = 3.\overrightarrow{AC} \Longrightarrow$$
$$\wp(\overrightarrow{AF}) = \wp(3.\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AJ} = 3.\wp(\overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{AK}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} = 2.\overrightarrow{AK} + 3.\overrightarrow{AK} = 5\overrightarrow{AK}$$

c) Coordonnées d'un vecteur dans une base

Etant donné une base vectorielle $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathcal{V}$ et un vecteur $\vec{w}$, il existe un seul couple (x, y) de réels appelées coordonnées de $\vec{w}$ tels que ; $\vec{w} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$.

Exercice

Démontrer l'existence et l'unicité de ces coordonnées.

Définition

Les deux réels x et y sont les coordonnées ou composantes du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note ;
$\vec{w}\binom{x}{y}$ ou $\vec{w}\binom{x}{y}_{(\vec{u},\vec{v})}$ ou $\vec{w}(x, y)$ ou $\vec{w}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$

d) Propriétés

Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ des vecteurs de $\mathcal{V}$, et α et β deux réels, on a les propriétés suivantes :

☒ $\boldsymbol{\vec{\imath} = 1.\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{\imath}\binom{1}{0}}$;

☒ $\boldsymbol{\vec{\jmath} = 0.\vec{\imath} + 1.\vec{\jmath} \Leftrightarrow \vec{\jmath}\binom{0}{1}}$;

☒ $-\vec{\imath} = -1.\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath} \Leftrightarrow -\vec{\imath}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$;

☒ $-\vec{\jmath} = 0.\vec{\imath} - 1.\vec{\jmath} \Leftrightarrow -\vec{\jmath}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$;

☒ $\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $et\ \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0\ et\ y = 0$;

☒ $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x'\ et\ y = y'$;

☒ $-\vec{u}\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$;

☒ $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$;

☒ $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$;

☒ $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha x+\beta x'\\\alpha y+\beta y'\end{pmatrix}$.

e) Déterminant de deux vecteurs

Définition

Dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et on note $det(\vec{u},\vec{v})$ le réel défini par ;

$$\boldsymbol{det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y}$$

Exemple

Dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$, calculer $det(\vec{u},\vec{v})$.

Solution

$$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}6 & -5\\-7 & 3\end{vmatrix} = 6\times 3 - (-7)\times(-5) = 18 - 35 \Longrightarrow \boldsymbol{det(\vec{u},\vec{v}) - 17}.$$

f) Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\boldsymbol{det(\vec{u},\vec{v}) = 0}$.

Exemple

Dans une base orthonormé $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\21\end{pmatrix}$.

Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Solution

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

$$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}4 & -12\\-7 & 21\end{vmatrix}$$

$$= (4\times 21) - \big((-7)\times(-12)\big) = 84 - 84 = 0$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

g) Changement de base

Exercice

Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, soit deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$.

Par définition, $(\vec{u}, \vec{v})$ constituent une base de $\mathcal{V}$.

Démontrer alors que les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont données par la relation ;

$$\vec{\boldsymbol{\imath}}\begin{pmatrix} \dfrac{b'}{\det(\vec{u};\ \vec{v})} \\ -\dfrac{b}{\det(\vec{u};\ \vec{v})} \end{pmatrix} ;\ \vec{\boldsymbol{\jmath}}\begin{pmatrix} -\dfrac{a'}{\det(\vec{u};\ \vec{v})} \\ \dfrac{a}{\det(\vec{u};\ \vec{v})} \end{pmatrix}$$

h) Conséquence

Exercice

Si un vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, montrer alors que les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ sont données par la relation ;

$$\vec{\boldsymbol{w}}\begin{pmatrix} \dfrac{b'x - a'y}{\det(\vec{u};\ \vec{v})} \\ \dfrac{ay - bx}{\det(\vec{u};\ \vec{v})} \end{pmatrix}$$

Application

Dans une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u}\binom{-7}{3}$, $\vec{v}\binom{5}{4}$ et $\vec{w}\binom{-2}{-1}$.

1°/ Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$

2°/ Donner les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

3°/ Donner les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$

Solution

$$\mathbf{1}°/\ \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-7) \times 4 - 3 \times 5$$
$$= -28 - 15 = -43 \neq 0$$

Donc ; $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2°/ Les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans $(\vec{u}, \vec{v})$ sont ;

$$\vec{\imath}\begin{pmatrix} -\dfrac{4}{43} \\ \dfrac{3}{43} \end{pmatrix} ;\ \vec{\jmath}\begin{pmatrix} \dfrac{5}{43} \\ \dfrac{7}{43} \end{pmatrix}$$

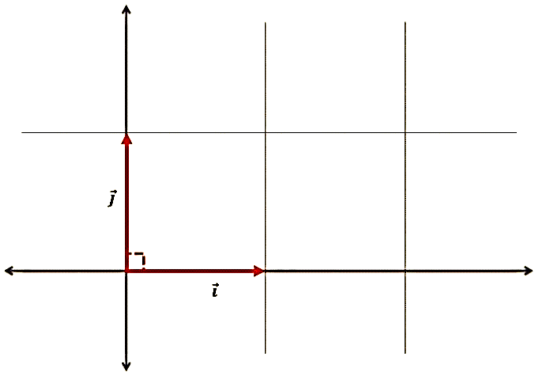
3°/ Les coordonnées de $\vec{w}$ dans $(\vec{u}, \vec{v})$ sont :

$$\vec{w}\begin{pmatrix} \dfrac{4 \times (-2) - 5 \times (-1)}{-43} \\ \dfrac{-3 \times (-2) + (-5) \times (-1)}{-43} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} \dfrac{3}{43} \\ -\dfrac{11}{43} \end{pmatrix}$$

3. Base orthogonale, base orthonormale

Définition

La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux (*de directions perpendiculaires*).



La base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est dite orthonormée ou orthonormale si les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et unitaires.

C'est-à-dire ; $\vec{\boldsymbol{\imath}} \perp \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ et $\|\vec{\boldsymbol{\imath}}\| = \|\vec{\boldsymbol{\jmath}}\| = \mathbf{1}.$

a) Norme dans une base orthonormale

Dans une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit le vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$ la norme de $\vec{u}$ est alors donné par ;

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}\,.$$

b) Vecteur unitaire adjoint à un vecteur

Dans une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit le vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \frac{x}{\|\vec{u}\|} \\ \frac{y}{\|\vec{u}\|} \end{pmatrix}$

est appelé vecteur unitaire adjoint au vecteur $\vec{u}$.

$$\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \frac{x}{\|\vec{u}\|} \\ \frac{y}{\|\vec{u}\|} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{u'}\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

Exemple

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$, on donne le vecteur $\vec{u}\binom{3}{-5}$.

Donner la norme de $\vec{u}$ et les coordonnées de son vecteur unitaire associé.

Solution

La norme de $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}.$

Les coordonnées du vecteur unitaire associé $\overrightarrow{u'}$ sont :

$$\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{34}}\\ \frac{-5}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}$$

Remarque

Un vecteur et son vecteur unitaire associé sont colinéaires.

4. Repère du plan

Définition

Soit O un point quelconque du plan. Et soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$. Le triplet $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ est appelé un repère du plan. O est appelé point origine du repère.

Soit A, B et C trois points non alignés. Le triplet $(A;B,C)$ ou $\left(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ forment un repère du plan.

a) Coordonnées d'un point dans un repère

Définition

Le point $M(x,y)$ dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ signifie ; $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$;

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}}.$$

Exercice

Soit $ABCD$ un rectangle.

On suppose que $AB = 7$ et $BC = 4$.

Soient E, F, G et H les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\ ;$$
$$\overrightarrow{GD} = \frac{6}{7}\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}\ .$$

Partie I : Outil analytique

1° Démontrer que $(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est un repère du plan $\mathcal{P}$.

2° Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD})$

3° Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$, puis conclure sur la nature du quadrilatère $EFGH$

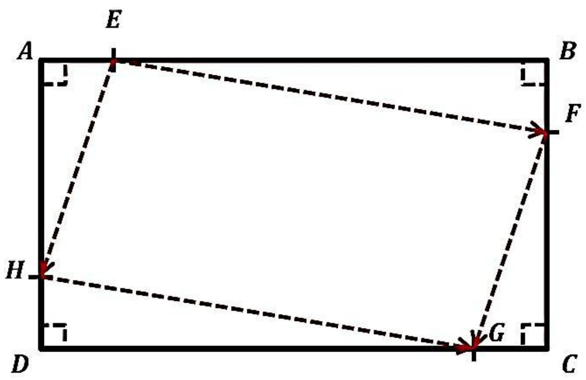
Partie II : Outil vectoriel

1° Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2° Exprimer $\overrightarrow{HG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3° En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$.

Solution



Partie I : Outil analytique

1° $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ constitue un repère du plan $\mathcal{P}$, si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ constitue une base de $\mathcal{V}$, ce qui est le cas puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont non nuls et non colinéaires.

2° Les coordonnées des points dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$:

$$A(0,0), \quad B(1,0), \quad C(1,1), \quad D(0,1),$$
$$E\left(\frac{1}{7}, 0\right), \quad F\left(1, \frac{1}{4}\right), \quad G\left(\frac{6}{7}, 1\right), \quad H\left(0, \frac{3}{4}\right)$$

3° Les composantes des vecteurs :

$$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HG}\begin{pmatrix}\frac{6}{7}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

On en conclut que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Partie II : Outil vectoriel

$$1°\ \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$2°\ \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

3° Le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

Remarque

Les trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si ; $\boldsymbol{det}(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}) = \mathbf{0}$.

b) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice

Soit $A(x_A, y_A)$ *et* $B(x_B, y_B)$ donnés dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, montrer alors que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par l'expression ;

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_B - x_A}\\ \boldsymbol{y_B - y_A}\end{pmatrix}.$$

Exemple

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, sont donnés les points $A(-4, 6)$ et $B(1, -5)$.

Calculer les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$.

Solution

$$\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}=\binom{1-(-4)}{-5-6}\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{-11}}.$$

c) Coordonnées du milieu I d'un segment $[\mathrm{AB}]$

Exercice

dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et I est le milieu de $[AB]$, monter alors que les coordonnées du point I sont données dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ par l'expression ;

$$\boldsymbol{I}\left(\frac{\boldsymbol{x_A+x_B}}{\mathbf{2}},\frac{\boldsymbol{y_A+y_B}}{\mathbf{2}}\right)$$

Exemple

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne les points $A(-5,-4)$ et $B(9,-3)$.

Calculer les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.

Solution

Les coordonnées du milieu I d'un segment sont données par la relation ;

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\frac{-5+9}{2},\frac{-4+(-3)}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{4}{2},\frac{-7}{2}\right)\Rightarrow \boldsymbol{I}\left(\mathbf{2},\frac{\mathbf{-7}}{\mathbf{2}}\right)$$

d) Coordonnées du centre de gravité d'un triangle

dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$ et soit G est le centre de gravité de ABC, montrer qu'alors les coordonnées du point G sont données dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ par l'expression ;

$$\boldsymbol{G}\left(\frac{\boldsymbol{x_A+x_B+x_C}}{\mathbf{3}},\frac{\boldsymbol{y_A+y_B+y_C}}{\mathbf{3}}\right)$$

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne les points $A(-4,12)$, $B(-9,-5)$ et $C(6,11)$.

Calculer les coordonnées du points G centre de gravité du triangle ABC.

Solution

Les coordonnées du point G sont données par la formule ;

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}$$

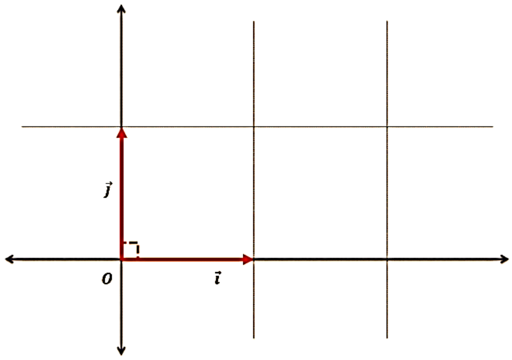
$$\Rightarrow\begin{cases} x_G=\dfrac{(-4)+(-9)+6}{3}=-\dfrac{7}{3} \\ y_G=\dfrac{12+(-5)+11}{3}=\dfrac{18}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{G}\left(-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}},\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{3}}\right).$$

e) Repère orthogonal, repère orthonormé

Le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dit orthogonal si la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthogonale.

Soit O est un point quelconque du plan $\mathcal{P}$ et $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de $\mathcal{V}$. Le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dit orthonormé ou orthonormal si la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormale.



f) Distance entre deux points A et B

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, montrer qu'alors la distance entre A et B est donnée par l'expression ;

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Exemple

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ soit les points $A(-13, 4)$ et $B(-7, 9)$, calculer AB.

Solution

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\big((-7) - (-13)\big)^2 + (9-4)^2}$$

$$= \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 25} \Longrightarrow \boldsymbol{AB} = \sqrt{\mathbf{61}}$$

g) Vecteurs orthogonaux dans une base

Exercice

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Monter que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ;

$$\boldsymbol{xx' + yy' = 0}.$$

Exemple

Dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{V}$ on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-12\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}$.

Montrer que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Solution

$\vec{u} \perp \vec{v}$ si $xx' + yy' = 0$.

$-12 \times 5 + (-6) \times (-10) = -60 + 60 = 0$.

Donc, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

5. Droites

a) Vecteur directeur

Définition

Soit une droite (D), tout vecteur non nul ayant la direction de (D), est un vecteur directeur de (D).

b) Droites parallèles, droites perpendiculaires

Soit deux droite (D) et (D') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$(D)//(D')$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$(D) \perp (D')$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c) Point appartenant à une droite

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et soit A un point de (D), $M \in (D)$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Soit A et B deux points distincts du plan ;

$M \in [AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\,; k \in [0,1]$.

$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\,; k \in \mathbb{R}$.

$M \in [AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}\,; k \in \mathbb{R}_+$.

d) Equation cartésienne d'une droite dans un repère

(D) est une droite si, et seulement si, elle admet une équation cartésienne dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, de la forme : $ax + by + c = 0$, avec a, b et c des réels tels que ; $(a,b) \neq (0,0)$.

Exemple 1

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) passant par le point $A(6,-7)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$.

Donner une équation cartésienne de (D).

Solution

$M(x,y)$ est un point général de (D), signifie que ;

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-6\\y+7\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\Rightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = \begin{vmatrix}x-6 & -3\\ y+7 & 4\end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow 4(x-6) + 3(y+7) = 0$$
$$\Rightarrow 4x - 24 + 3y + 21 = 0$$
$$\Rightarrow 4x + 3y - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{(D): 4x + 3y - 3 = 0}.$$

Exemple 2

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit la droite (D) passant par les points $A(5,7)$ et $B(-6,9)$.

Donner une équation cartésienne de (D).

Solution

$M(x,y)$ est un point général de (D), signifie que ;

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-11\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$$\Rightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-5 & -11 \\ y-7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2(x-5) + 11(y-7) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 10 + 11y - 77 = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{D: 2x + 11y - 87 = 0}\,.$$

e) Coordonnées du vecteur directeur d'une droite à partir de son équation cartésienne

La droite (D) : $ax + by + c = 0$ a pour vecteur directeur ; $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple

La droite (Δ) : $5x + 6y - 1 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

f) Forme réduite de l'équation d'une droite

Exercice

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, montrer que l'équation réduite d'une droite est de la forme ;

$$(D) : y = mx + p.$$

- ☒ m est appelé coefficient directeur de (D).
- ☒ p est appelé ordonnée à l'origine.
- ☒ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D).

g) Propriété

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit deux droites d'équations réduites ;

$$\begin{cases} (D) : y = mx + p \\ (D') : y = m'x + p' \end{cases}$$

$(D)//(D')$ si, et seulement si ; $m = m'$.

$(D) \perp (D')$ si, et seulement si ; $m.m' = -1$.

Exemple

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les équations cartésiennes des deux droites ;

$$(D): 4x - 2y + 6 = 0$$

$$(D'): x + 2y - 4 = 0$$

1° Donner les formes réduites des équations des deux droites ;

2° Donner les coefficients directeurs de ces deux droites ;

3° En déduire les positions relatives des deux droites ;

4° Soit (D'') une troisième droite d'équation réduite :

$$(D''): y = -\frac{1}{2}x - 5$$

Montrer que $(D')//(D'')$;

5° Dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, représenter cette situation.

Solution

1° $(D): 4x - 2y + 6 = 0 \Longrightarrow 2y = 4x + 6$

$$\Longrightarrow y = \frac{4x+6}{2} = \frac{4x}{2} + \frac{6}{2} = 2x + 3 \Longrightarrow \boldsymbol{(D): y = 2x + 3}$$

$$(D'): x + 2y - 4 = 0 \Longrightarrow 2y = -x + 4$$

$$\Longrightarrow y = \frac{-x+4}{2} = \frac{-x}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{(D'): y = -\frac{1}{2}x + 2}$$

2° Les coefficients directeurs de (D) et (D') sont :

$$\boldsymbol{m = 2\,; \quad m' = -\frac{1}{2}}$$

3° $On\ a\,;\ m \times m' = 2 \times -\frac{1}{2} = -1 \Longrightarrow (D) \perp (D')$

4° $(D'') : y = -\frac{1}{2}x - 5 \Longrightarrow m'' = -\frac{1}{2}$

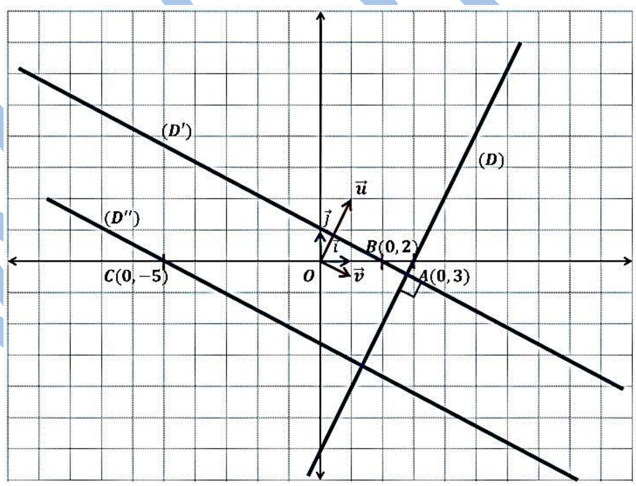
$$\boldsymbol{m' = m'' = -\frac{1}{2} \Longrightarrow (D')//(D'')}\,.$$

5° Représentation de la situation

La droite (D) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et passe par le point $A(0,3)$.

La droite (D') a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et passe par le point $B(0,2)$.

La droite (D'') a pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et passe par le point $C(0,-5)$.



Exemple 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$).

1) Déterminer l'ensemble E dans chacun des cas suivants :

a) E d'équation cartésienne x – a = 0 ; a $\in \mathbb{R}$.

b) E d'équation cartésienne y – a = 0 ; a $\in \mathbb{R}$.

c) E d'équation cartésienne $y^2 - x^2 = 0$;

d) E d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$;

2) a) Déterminer une équation réduite de la droite (IJ).

b) Soit D la droite d'équation y = x. Montrer que D est la médiatrice de [IJ].

Solution

1) a) $x - a = 0 \Leftrightarrow x = a$.

Donc, E est la droite parallèle à (OJ) passant par le point de coordonnées (a ; 0).

b) $y - a = 0 \Leftrightarrow y = a$.

Donc, E est la droite parallèle à (OI) passant par le point de coordonnées (0 ; a).

c) $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y - x = 0 \\ \text{ou} \\ y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \text{ou} \\ y = -x \end{cases}$

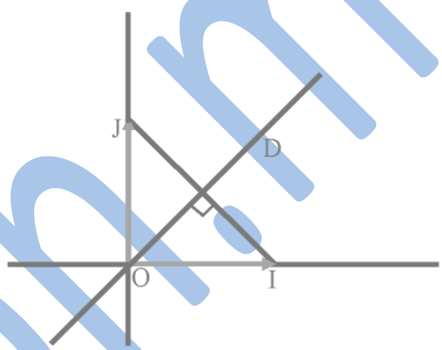
Donc ; E est la réunion des droites D_1 d'équation $y = x$ et D_2 d'équation $y = -x$.

d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow [(x - 1)^2 - 1] + [(y + 2)^2 - 4] + 1 = 0.$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (2)^2.$

Donc, E est le cercle d centre le point $\Omega(1 ; -2)$ et de rayon 2.



2) a) on a I(1 ; 0) et (J(0 ;1).

(IJ) : $y = mx + p$.

Avec $\begin{cases} p = 1 \\ m + p = 0 \end{cases}$

Donc, p = 1 et m = -1.

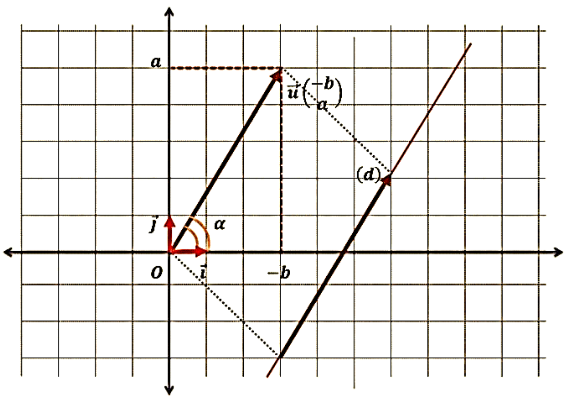
Donc ; (IJ) : $y = -x + 1$.

b) D : $y = x$. on a $(1)(-1) = -1$, donc $D \perp (IJ)$.

Or, OI = OJ et $O \in D$. Donc, D est la médiatrice de [IJ].

h) Interprétation géométrique du coefficient directeur

Le coefficient directeur d'une droite (D) est la valeur de la tangente de l'angle α que fait cette droite avec l'axe des abscisses.



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{\|\vec{u}\|}}{\frac{-b}{\|\vec{u}\|}} = -\frac{a}{b}$$

i) Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la droite (D) passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{a}{b}$. Le point $M(x, y)$ appartient à (D) si, et seulement s'il existe un réel t tel que ;

$$\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at \\ bt \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}.$$

Le système $\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + at} \\ \boldsymbol{y = y_0 + bt} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est appelé une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit la droite $D(A;\ \vec{u})$ tels que $A(-5, 7)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, donner une représentation paramétrique de D.

Solution

Soit le paramètre t on a la représentation paramétrique de D: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{D}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -5 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 7 - 4t} \end{cases}$

j) Le vecteur normal

Définition

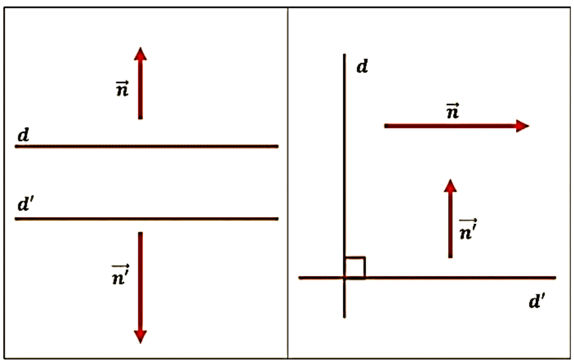
Soit une droite (D).

On appelle un vecteur normal à (D) tout vecteur non nul dont la direction est perpendiculaire à (D).

a- Propriétés

Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$;

- $(D)//(D')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.
- $(D) \perp (D')$ si, et seulement si, $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.



b- Propriété

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit (D) une droite de vecteur normal $\vec{n}$, et soit A un point de (D), alors ; Un point $M \in (D)$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Remarque

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite (D) : $ax + by + c = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit les droites d'équations cartésiennes :

$$(D) : -4x - 7y + 3 = 0 ;$$
$$(D') : \ 12x + 21y - 5 = 0;$$
$$(D'') : \ 7x - 4y + 1 = 0.$$

1° Donner les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{n'}$ et $\overrightarrow{n''}$ normaux respectivement aux droites $(D), (D')$ et (D'')

2° A partir de ces vecteurs normaux montrer que $(D)//(D')$ et que $(D) \perp (D'')$.

Solution

$$\vec{n}\binom{-4}{-7} ; \overrightarrow{n'}\binom{12}{21} \ et\ \overrightarrow{n''}\binom{7}{-4}$$

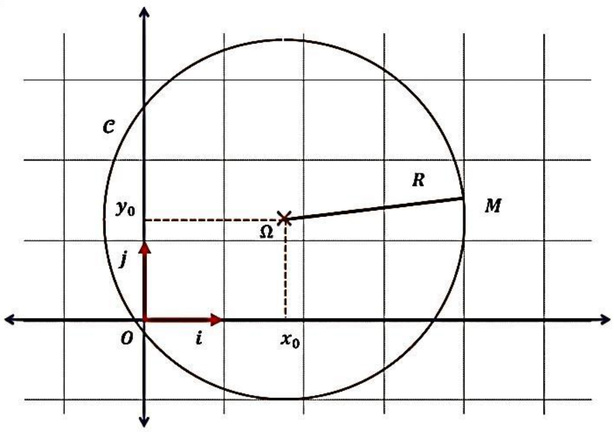
On a ; $(-4) \times 21 - (-7) \times 12 = 84 - 84 = 0$

$\Longrightarrow \vec{n}; \overrightarrow{n'}$ sont colinéaire, donc $(D)//(D')$.

On a ; $(-4) \times 7 + (-7) \times (-4) = -28 + 28 = 0$

$\Longrightarrow \vec{n}; \overrightarrow{n''}$ sont de directions orthogonales, donc $(D) \perp (D'')$.

6. Le cercle dans le plan



Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\Omega(x_0, y_0)$ un point donné, et soit R un nombre réel positif donné.

Une équation cartésienne de cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

- ✧ $\mathcal{C} : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ est le cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R.
- ✧ $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = R^2$ est le cercle de centre l'origine $O(0,0)$ et de rayon R.
- ✧ $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ est le cercle de centre l'origine $O(0,0)$ et de rayon 1.

Exemple 5

1) Soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ une base de **V.**

Soit $\vec{u} = 2\vec{i}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$.

b) calculer det($\vec{u}$; $\vec{v}$) dans la base ($\vec{i}$; $\vec{j}$).

($\vec{u}$; $\vec{v}$) est-elle une base de **V** ? Justifier.

2) On suppose que $(\vec{i} ; \vec{j})$ est une base orthonormal et **V** le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. Soit Γ l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que :

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ.

b) Donner une équation cartésienne de Γ dans le repère orthonormal $(\Omega\,;\ \vec{i}\,;\vec{j})$ où $\Omega(1\,;0)$ dans le repère $\left(O\,;\ \vec{i}\,;\ \vec{j}\right)$.

Solution

1) a) $\vec{u} = 2\vec{i} = 2\vec{i} + 0\vec{j}$; donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$;

$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} = 1\vec{i} + 1\vec{j}$; donc $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

b) $\det\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \begin{vmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{vmatrix} = 2(1) - (0)(1) = 2$.

Comme $\det\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) \neq 0$; donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaire,

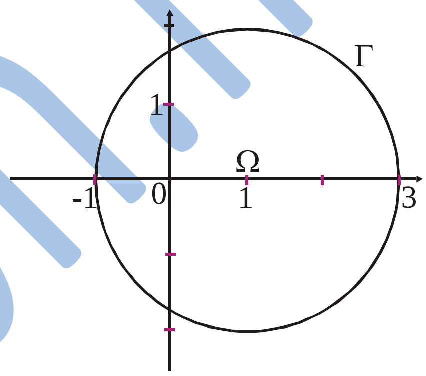
par conséquent, $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ est une base de **V.**

2) a) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 - 1 + y^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-0)^2 = (2)^2$.



Donc, Γ est le cercle de centre le point $\Omega(1\,;0)$ et d e rayon 2.

b) $\Gamma : (x-1)^2 + (y-0)^2 = 4$.

$M(x\,;y)$ dans $\left(O\,;\ \vec{i}\,;\ \vec{j}\right)$; $M(X\,;Y)$ dans $(\Omega\,;\ \vec{i}\,;\vec{j})$;

Donc $\begin{cases}X = x - 1\\ y = y\end{cases}$;

Donc, l'équation cartésienne de Γ dans le repère $(\Omega\,;\ \vec{i}\,;\vec{j})$ est $X^2 + Y^2 = 4$.

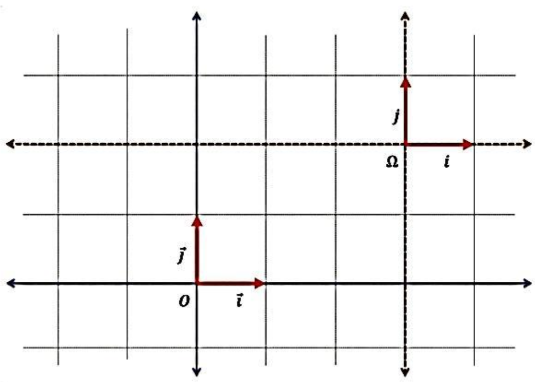
7. Changement d'un repère

a) (*Origine seulement*)

Dans ce repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, soit $\Omega(x_0, y_0)$ un point donné de $\mathcal{P}$.

$M(x,y)$ dans $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath}) \Leftrightarrow M(X,Y)$ dans $(\Omega;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec ;

$$\begin{cases}X = x - x_0\\ Y = y - y_0\end{cases}.\ En\ effet\ ;\ \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}.$$



b) (*Origine et base*)

Exercice

Soit un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ de $\mathcal{P}$, et soit deux vecteurs non nuls et non colinéaires $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$, et un point $\Omega(x_0,y_0)$ de $\mathcal{P}$.

Par définition, le triplet $(\Omega;\ \vec{u},\vec{v})$ constitue une base de $\mathcal{P}$.

Dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on donne le point $A(x_A,y_A)$, montrer que les coordonnées de A dans le nouveau repère $(\Omega;\ \vec{u},\vec{v})$ sont données par la relation ;

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\dfrac{(\boldsymbol{x_A}-\boldsymbol{x_0})\boldsymbol{b'}+(\boldsymbol{y_0}-\boldsymbol{y_A})\boldsymbol{a'}}{\boldsymbol{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})}\\ \dfrac{(\boldsymbol{x_0}-\boldsymbol{x_A})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{y_A}-\boldsymbol{y_0})\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{det}(\vec{\boldsymbol{u}};\ \vec{\boldsymbol{v}})}\end{pmatrix}$$

Exemple

Dans un repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan $\mathcal{P}$, on donne les deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et les deux points $A(-3,7)$ et $B(-8,-2)$.

1° Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ constituent une base de $\mathcal{P}$;

2° Donner les coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$;

3° Calculer les coordonnées du point A dans le repère $(B;\ \vec{u},\vec{v})$;

4° Calculer les coordonnées du point B dans le repère $(A;\ \vec{u},\vec{v})$.

Solution

1° Pour montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base, on a ;

$$Det(\vec{u};\ \vec{v})=\begin{vmatrix}6 & 4\\-5 & 3\end{vmatrix}=6\times3-(-5)\times4=38$$

$\Longrightarrow Det(\vec{u};\ \vec{v})\neq0\Longrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc, $(\vec{u};\ \vec{v})$ constitue une base du plan.

2° Coordonnées de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$:

$$\begin{cases}\vec{\imath}=\dfrac{3}{38}\vec{u}+\dfrac{5}{38}\vec{v}\Longrightarrow\vec{\boldsymbol{\imath}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\dfrac{3}{38}}\\ \boldsymbol{\dfrac{5}{38}}\end{pmatrix}\\ \vec{\jmath}=-\dfrac{4}{38}\vec{u}+\dfrac{6}{38}\vec{v}\Longrightarrow\vec{\boldsymbol{\jmath}}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\dfrac{4}{38}}\\ \boldsymbol{\dfrac{6}{38}}\end{pmatrix}\end{cases}$$

3° Coordonnées de A dans le repère $(B;\ \vec{u},\vec{v})$:

$$A\begin{pmatrix}\dfrac{(x_A-x_B)b'+(y_B-y_A)a'}{38}\\ \dfrac{(x_B-x_A)b+(y_A-y_B)a}{38}\end{pmatrix}\Longrightarrow A\begin{pmatrix}\dfrac{3(-3+8)+4(-2-7)}{38}\\ \dfrac{-5(-8+3)+6(7+2)}{38}\end{pmatrix}\Longrightarrow\boldsymbol{A}\left(-\boldsymbol{\frac{21}{38}};\ \boldsymbol{\frac{79}{38}}\right)$$

4° Coordonnées de B dans le repère $(A;\ \vec{u},\vec{v})$:

$$B\begin{pmatrix}\dfrac{(x_B-x_A)b'+(y_A-y_B)a'}{38}\\ \dfrac{(x_A-x_B)b+(y_B-y_A)a}{38}\end{pmatrix}\Longrightarrow B\begin{pmatrix}\dfrac{3(-8+3)+4(7+2)}{38}\\ \dfrac{-5(-3+8)+6(-2-7)}{38}\end{pmatrix}\Longrightarrow\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{\frac{21}{38}};\ -\boldsymbol{\frac{79}{38}}\right)$$

Exemple 6

ABCD est un carré de centre O. M un point du segment [BD] qui se projette orthogonalement en P sur (AB) et Q sur (AD).

On se propose de montrer que le triangle OPQ est isocèle rectangle en O.

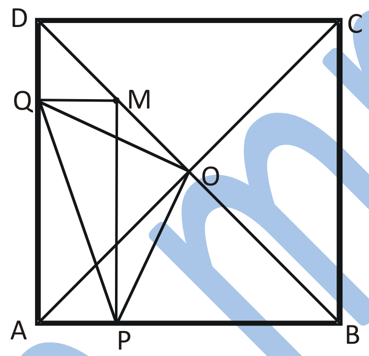
Le plan est rapporté au repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$) et on désigne par x l'abscisse du point M.

1) Exprimer en fonction de x l'ordonnée du point M.

En déduire les coordonnées des points P et Q.

2) a) Donner les coordonnés du point O.

b) Calculer OP^2 ; OQ^2 et PQ^2 ; conclure.



Solution

1) On a M $\in$ (BD).

Or B(1 ; 0) et D(0 ; 1).

Donc : l'équation réduite de (BD) est y = -x + 1.

Donc : l'ordonnée du point M est 1 – x.

Or ; les points P et M ont la même abscisse et les points Q et M ont la même ordonnée.

Donc ; P(x ; 0) et Q(0 ; 1 –x).

2) a) O$\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ (O milieu de [BD]).

b) $OP^2 = (x - \frac{1}{2})^2 + (0 - \frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{2}$.

$OQ^2 = (0 - \frac{1}{2})^2 + (1 - x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + (\frac{1}{2} - x)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - x + x^2 = x^2 - x + \frac{1}{2}$.

$PQ^2 = (x - 0)^2 + (0 - 1 + x)^2 = x^2 + (x - 1)^2 = x^2 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2x + 1$

Comme $OP^2 = OQ^2$ et $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$.

Donc, le triangle OPQ est isocèle rectangle en O.

Exercices généraux

Exercice 1

Soit ABC et A'B'C' deux triangles.

Démontrer que ces deux triangles ont même centre de gravité si, et seulement si, $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

2) ABC un triangle de centre de gravité G. A' ; B' ; C' les milieux respectifs de [BC] ; [CA] ;[AB].

Montrer que G est le centre de gravité du triangle A'B'C'.

Exercice 2

ABC un triangle. I ; J ; K les points tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \; ; \; \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \; ; \; \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}.$$

1) Faire une figure.

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$.

b) En déduire que les deux triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

Exercice 3

ABC un triangle tel que AB = 5 ; AC = 6.

D est le symétrique de A par rapport au milieu de [BC].

1) a) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

b) Montrer que AD ≤ 11.

2) Soit E le symétrique de C par rapport à D.

Montrer que BE ≤ 11 et AE ≤ 16.

Exercice 4

Soit $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ une base de $\mathscr{V}$

1) Démontrer que : $(\vec{i}+\vec{j}\ ;\vec{j})$; $(2\vec{i}\ ;2\vec{j})$; $(\vec{i}-\vec{j}\ ;\vec{i}+\vec{j})$; $(\vec{i}\ ;-\vec{j})$ sont des bases.

2) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés par leurs coordonnées dans $(\vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

a) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chacune des bases $(\vec{i}+\vec{j}\ ;\vec{j})$; $(2\vec{i}\ ;2\vec{j})$; $(\vec{i}-\vec{j}\ ;\vec{i}+\vec{j})$; $(\vec{j}\ ;-\vec{j})$.

b) Calculer det $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ dans chacune des bass.

c) Montrer que si det $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ = 0 dans l'une de ces bases alors, det $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ = 0 dans les autres bases.

Exercice 5

Soit $(O\ ;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$ un repère du plan. Soit D la droite d'équation : 2x – 3y + 1 = 0.

1) Les points suivants appartiennent- ils à D.

A(1 ; 1) ; B$\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{3}\right)$; C$\left(0\ ;\ \frac{1}{3}\right)$; D(-1 ; 3).

2) Donner :

a) u vecteur directeur de D.

b) l'équation réduite de D.

c) une droite D' parallèle à D.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$. Soit D la droite d'équation y = 3x -2.

1) Donner :

a) le coefficient directeur de D.

b) un vecteur directeur de D.

2) donner :

a) une équation de la droite D' parallèle à D et passant par le point A(0 ; 4).

b) une équation de la droite D'' perpendiculaire à D et passant par le point B(0 ; 1)..

3) tracer D ; D' et D''.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Placer les points A(3 ; 2) ; B(0 ; 3) ; C(-2 ; 0).

2) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme, puis déterminer les coordonnées de son centre I.

3) Soit G et H les centres de gravités respectifs des triangles ABC et ACD.

Déterminer les coordonnées de G et H.

b) Montrer que I est milieu de [GH].

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. A ; B ; C trois points de coordonnées respectives :

$(a_1 ; a_2)$; $(b_1 ; b_2)$; $(c_1 ; c_2)$.

I ; J ; K sont les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CA].

1) Exprimer les coordonnées des points I ; J ; K à l'aide des réels a_1 ; b_1 ; c_1 ; a_2 ; b_2 ; c_2. *

2) Démontrer que les deux triangles ABC et IJK ont le même centre de gravité.

Exercice 9

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1) Placer les points : A(2 ; 0) ; B(-1 ; $\sqrt{3}$)

C(-1 ; -$\sqrt{3}$) .

2) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral de centre O.

Exercice 10

ABCD un carré. BCE et CDF sont deux triangles équilatéraux respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de ABCD.

On se propose de montrer que les points A, E , F sont alignés. On considère le repère (B ; C ; A).

1) Quelles sont les coordonnées des points A ; B ; C ; D ?

2) Calculer les coordonnées des points E et F.

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.Calcule det($\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AF}$) et conclus.

Exercice 11

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan. Déterminer les équations des droites suivantes puis représente

ces droites.

1°) la droite D_1 est la droite (AB) avec A(1 ; 2) ; B(-2 ; 1).

2°) la droite D_2 est la droite (AC) avec A(1 ; 2) ; C(1 ; -2).

3°) la droite D_3 passe par A(1 ; 2) et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

4°) la droite D_4 passe par A(1 ; 2) et est dirigée par $\vec{i}$.

5°) la droite D_5 passe par A(1 ; 2) et est dirigée par $\vec{j}$.

Exercice 12

La droite D a pour équation 2x + 3y -1 = 0 dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Donner, pour D, les précisions suivantes :

a) un vecteur directeur
b) un vecteur directeur dont la première coordonnée est 1.
c) un vecteur directeur dont la seconde coordonnée est -3.
d) deux points
e) l'équation réduite.
f) le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

Exercice 13

Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère orthonormal du plan, et les points A(-3 ; 1) ; B(-2 ; -2) et C(5 ; $\frac{1}{2}$).

Soit D le quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

Déterminer les coordonnées de D et faire la figure.

Le parallélogramme ABCD est-il un rectangle.

Vérifier l'égalité 2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2.

Déterminer une équation du cercle de diamètre [AB].

Détermine et construis l'ensemble Γ des points M(x ; y) tels que : $x^2 + y^2 - 10x - y + 25 = 0$.

Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Soit D_m la droite d'équation $y = x + 1 - m^2$ où $m \in \mathbf{R}$.

Soit M_n le point de coordonnées $(2^n ; 2^{2+n}\sqrt{2})$ où $n \in \mathbf{N}$.

1). a) que peut-on remarquer sur la direction de D_m ?

b) Déterminer les valeurs de m, pour lesquelles D_m passe par O.

2) Montrer que le point M_n appartient à une droite fixe passant par O.