IX- GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Faire savoir

Le cours

1. Notion de fonction

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. f est une fonction de la variable réelle x définie sur $\mathcal{D}$, signifie que f est un procédé qui permet d'associer à tout réel $x \in \mathcal{D}$, un réel unique y noté $f(x)$.

a) Notations et expressions

On note ; $f : x \longmapsto y = f(x)$ ou $f(x) = y$.

On lit "*y est l'image de x par f*" ou, "*f associe à x le réel y*".

y est appelé image de x,

x est appelé antécédent y.

Exemple 1

A. Dans cet exercice on demande de traduire les phrases suivantes par des égalités du type ***f***(a) =b.

a) Un antécédent de 5 par ***f*** est -2.
b) L'image de 3 par ***f*** est nulle.
c) La courbe C_f passe par le point A(1 ; 4).
d) La courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -3.

B. Soit ***f***(x) = $-x^2 + 2x - 1$ et ***g***(x) = $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

a) Pour chacune des deux fonctions, calculer l'image de 0, de -2 et de $\sqrt{2}$.
b) Peut-on calculer l'image de 1 pour les deux fonctions ?
c) Déterminer le ou les antécédents de 1 pour chaque fonction.

Solution

A. ***f***(-2) =5 ; ***f***(3) = 0 ; ***f***(1) = 4 ; ***f***(-3) = 0 ;

B. a) ***f***(0) = $-0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1$; ***f***(-2) = $-2^2 + 2 \times (-2) - 1 = -4 - 4 - 1 = -9$;

f($\sqrt{2}$) = $-(\sqrt{2})^2 + 2 \times (-\sqrt{2}) - 1 = -2 - 2\sqrt{2} - 1 = -3 - 2\sqrt{2}$.

g(0) = $\dfrac{2\times 0-3}{0-1} = \dfrac{-3}{-1} = 3$; ***g***(-2) = $\dfrac{2\times(-2)-3}{(-2)-1} = \dfrac{-7}{-3} = \dfrac{7}{3}$;

g($\sqrt{2}$) = $\dfrac{2\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(2\sqrt{2}-3)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$$= \frac{(4+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-3)}{(2-1)} = 1-\sqrt{2}$$

b) $\boldsymbol{f}(1) = -1^2 + 2 \times 1 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$; donc 1 est un élément de D_f.
Par contre, on ne peut pas calculer $\boldsymbol{g}(1)$, car $\boldsymbol{g}(1)$ n'existe pas et par conséquent 1 n'est pas un élément de D_g.

c) Il suffit de résoudre les équations $\boldsymbol{f}(x) = 1$ et $\boldsymbol{g}(x) = 1$.
$\boldsymbol{f}(x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x + 1) = 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) = -1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = -1$, cette dernière égalité est impossible, donc 1 n'a pas d'antécédent par $\boldsymbol{f}$.
$\boldsymbol{g}(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3 = x - 1 \Leftrightarrow x = -4$, donc les antécédents de 1 par $\boldsymbol{g}$ sont les éléments du singleton $\{-4\}$.

Le sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble de définition de f ou domaine de définition de f noté aussi $\mathcal{D}_f$.

On peut noter ;

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} \longmapsto \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

N. B. *Pour des raisons pratiques, dans tout ce chapitre, nous dirons fonction lorsqu'il s'agit de fonctions numériques à variables réelles.*

Remarque

L'ensemble de définition d'une fonction f est en général donné par un énoncé de la forme ;

« *Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par ; $f(x) = x^2$* ».

Cet énoncé impose $\mathcal{D} = [0; 1]$ comme ensemble de définition pour la fonction $f : x \longmapsto x^2$.

Si l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ n'est pas explicitement donné, alors $\mathcal{D}$ est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

Exemple 2

La fonction ; $f : x \longmapsto x^3 + 5$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction ; $g : x \longmapsto \frac{x-7}{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

La fonction ; $h : x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$.

Exemple 3

Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{-5x^2 + 4x + 1}{x(x-3)(x+2)};\ g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 2}$$

Solution

$f(x) = \frac{-5x^2+4x+1}{x(x-3)(x+2)}$ est définie pour $x(x-3)(x+2) \neq 0$

C'est-à-dire pour ; $x \neq 0, x \neq -2$ et $x \neq 3$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 3\}}$$

$g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 2}$ est définie pour $3x^2 + 5x - 2 \geq 0$

On résout l'équation : $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 4\times 3\times(-2) = 49 \Longrightarrow \Delta > 0 \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = 7$$

$$x_1 = \frac{-5-7}{2\times 3} = \frac{-12}{6} = \mathbf{-2};\quad x_2 = \frac{-5+7}{2\times 3} = \frac{2}{6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

A partir du tableau de l'étude des signes, on a :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left]\mathbf{-2};\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right[$$

Exemple 4

Indiquer l'ensemble de définition D des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto x + \frac{1}{x}$; $x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x}$; $x \mapsto 2x^2 + \frac{|x|}{x^2+1}$.

b) $x \mapsto \sqrt{-x}$; $x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$; $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \sqrt{1-x}$; $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$; $(3-2x)(5x+1)$.

Solution

La fonction	Son ensemble de définition	La fonction	Son ensemble de définition
$x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$	$x \mapsto \sqrt{-x}$	$\mathbf{R}_-$
$x \mapsto x + \frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$x \mapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x+1}$	$\mathbf{R}_+ \cap \left[\frac{-1}{3};+\infty\right[= \mathbf{R}_+$
$x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	$\mathbf{R}^*$
$x \mapsto \frac{x^2+1}{x^3-x}$	$\mathbf{R}\setminus\{-1\,;\,0\,;\,1\}$	$x \mapsto \sqrt{1-x}$	$]-\infty\,;\,1]$
$x \mapsto 2x^2 + \frac{\lvert x\rvert}{x^2+1}$	$\mathbf{R}$	$x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$	$\left]\frac{-7}{3};+\infty\right[$
		$x \mapsto (3-2x)(5x+1)$	$\mathbf{R}$

2. La représentation graphique d'une fonction

Soit $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

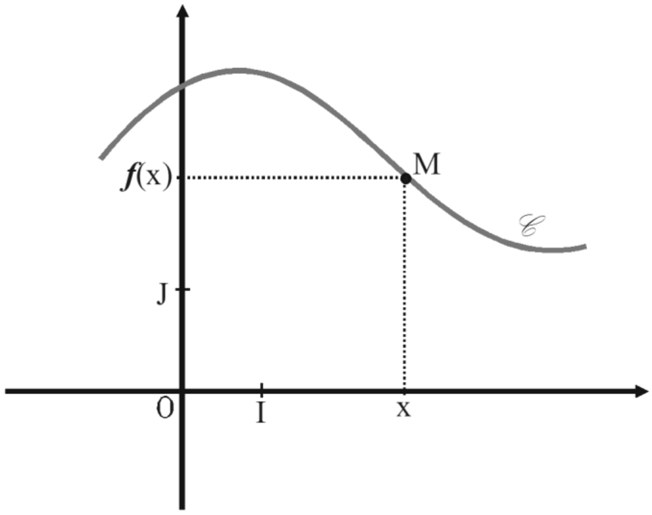
La représentation graphique $\mathcal{C}$ de f est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.

$\mathcal{C}$ est appelée la courbe représentative de f dans le repère $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Notation

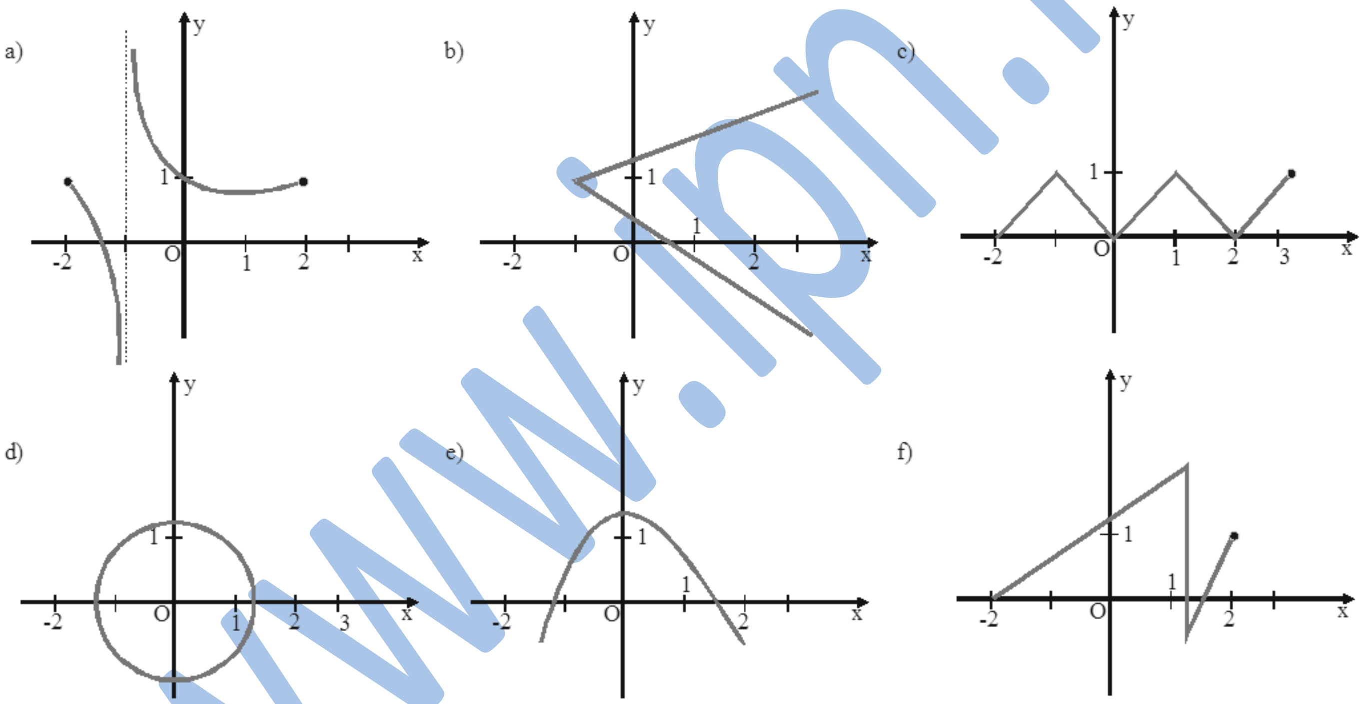
La courbe $\mathcal{C}$ de f est notée $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$.

$\mathcal{C}_f = \{M(x,y) / \ x \in \mathcal{D}_f \ et \ y = f(x)\}$



Exemple 5

Reconnaître les courbes représentant des fonctions, puis donner l'ensemble de définition de ces fonctions.



Solution

Courbes définissants des fonctions	Ensembles de définition associés
a) c) e)	[-2 ; 2] \ $\{-1\}$ [-2 ; 3] **R**

3. Variation d'une fonction et extrémums

a) Sens de variations

a- Croissance d'une fonction

On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

La fonction f fait correspondre à des valeurs (*antécédents*) de plus en plus grandes, des images de plus en plus grandes.

C'est-à-dire ; f est croissante sur I si ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

On dit qu'une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$$

b- Décroissance d'une fonction

On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

La fonction f fait correspondre à des valeurs (*antécédents*) de plus en plus grandes, des images de plus en plus petites.

C'est-à-dire ; f est décroissante sur I si ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 \geq 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$$

On dit qu'une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$$

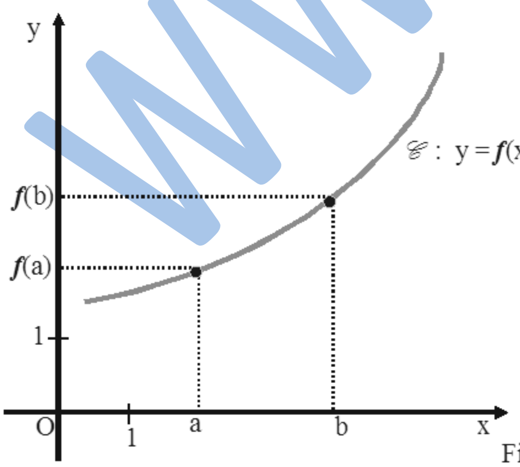


Fig. 1

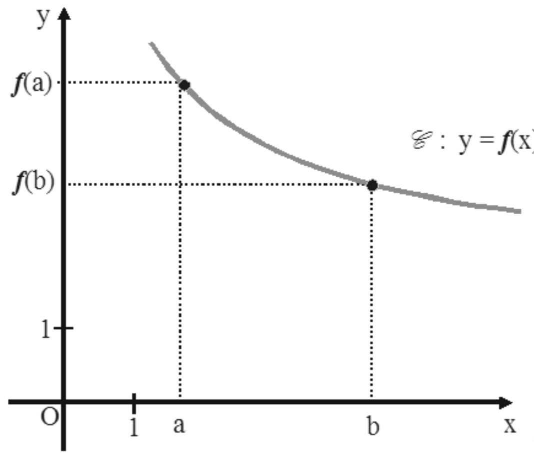


Fig. 2

On dit qu'une fonction f est constante sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}$, lorsque ;

$\forall x_1;\ x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Ou encore ;

$$x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$$

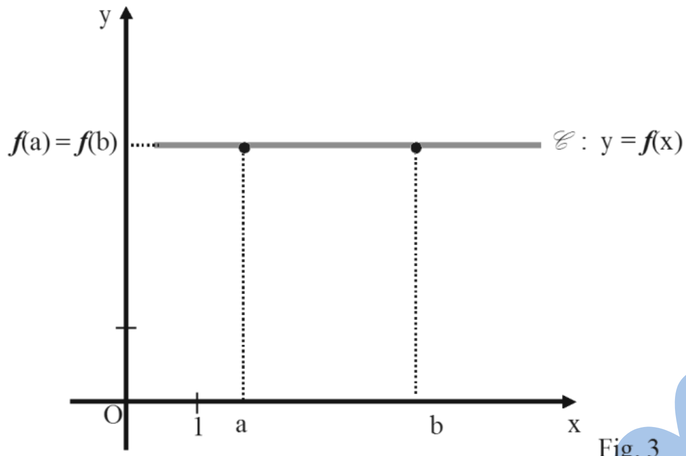


Fig. 3

Résumé

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

- *f* est strictement croissante sur I si, et seulement si :

 Pour tous a et b éléments de I, si a < b alors *f* (a) < *f* (b) (fig. 1)

- *f* est croissante sur I si, et seulement si :

 Pour tous a et b éléments de I, si a ≤ b alors *f* a) ≤ *f* (b).

- *f* est strictement décroissante sur I si, et seulement si :

 Pour tous a et b éléments de I, si a < b alors *f* (a) > *f* (b).

- *f* est décroissante sur I si, et seulement si :

 Pour tous a et b éléments de I, si a ≤ b alors *f* (a) ≥ *f* (b), (fig. 2)

- *f* est constante sur I si, et seulement si :

 Pour tous a et b éléments de I, *f* (a) = *f* (b), (fig. 3)

Exemple 6

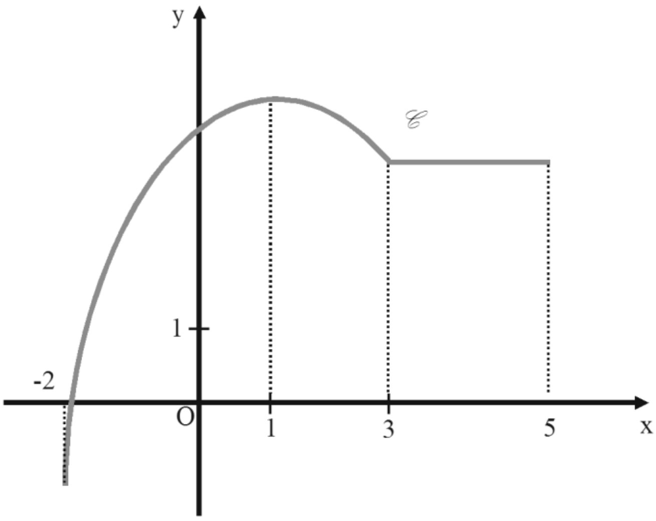
La courbe C de la figure ci- contre

est la courbe représentative

d'une fonction *f* qui est :

- strictement croissante sur [-2 ; 1] ;
- strictement décroissante sur [1 ; 3] ;

▪ constante sur [3 ; 5].



Exemple 7

Soit ***f*** la fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-2		2		5		10
f(x)	2	↗	5	↘	0	↗	6

a) Décrire les variations de ***f***.

b) Préciser, s'ils existent, les extremums de ***f*** sur son ensemble de définition.

Solution

a) ***f*** est croissante sur [-2 ; 2] ; décroissante sur [2 ; 5] ; croissante sur [5 ; 10].

b) ***f*** admet les nombres 5 et 6 en tant que maximums relatifs aux intervalles [-2 ; 2] et [5 ; 10].
Elle admet aussi 2 et 0 en tant que minimums relatifs aux intervalles [-2 ; 2] et [5 ; 10].

Etude des graphiques de fonctions

Quand on connaît l'écriture d'une fonction, on peut préciser son ensemble de définition et déterminer son sens de variation. On complète ensuite un tableau de valeurs pour faire sa représentation graphique.

Réciproquement, on peut partir de la représentation graphique d'une fonction pour trouver son ensemble de définition et déduire son tableau de variation.

On peut également utiliser les représentations graphiques de fonctions pour résoudre des équations ou des inéquations.

Lire les images et les antécédents d'un nombre sur une courbe de fonction

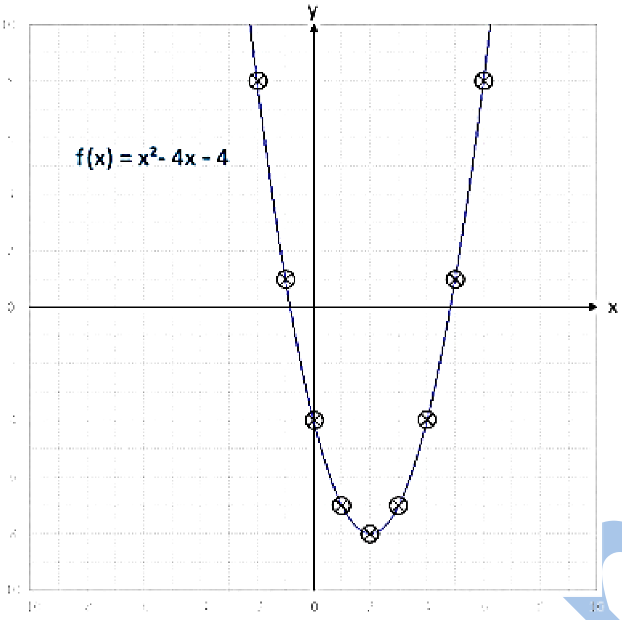
Exemple 8

Ici le tableau de valeurs de la fonction :

$$f(x) = x^2 - 4x - 4$$

Chaque couple $(x; f(x))$ de ce tableau est représenté par un point sur la courbe.

$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$
$\boldsymbol{y = f(x)}$	$\mathbf{8}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-7}$	$\mathbf{-8}$	$\mathbf{-7}$	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{8}$



Nous avons la courbe représentative de f, définie par ; $f(x) = x^2 - 4x - 4$ représentée dans un repère orthonormé.

Cette fonction est un polynôme du second degré, et sa courbe est une parabole… qu'on étudiera plus tard.

8 est l'image de -2 par f

-4 est l'image de 4 par f

2 est l'antécédent de -8 par f

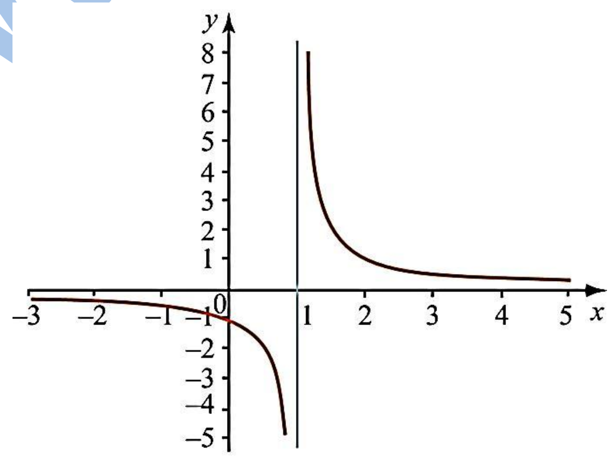
-2 et 6 sont les antécédents de 8 par f

Lire l'ensemble de définition sur la courbe d'une fonction

Sur l'axe horizontal, on lit les abscisses des points de la courbe. L'ensemble de définition est l'ensemble de ces abscisses. Il s'écrit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles.

Exemple 9

La représentation graphique ci-dessous est formée de points dont l'abscisse est comprise entre -3 et 5, le nombre 1 étant exclu. Elle représente une fonction définie sur la réunion des intervalles : $]-3;1[\cup]1;5[$.



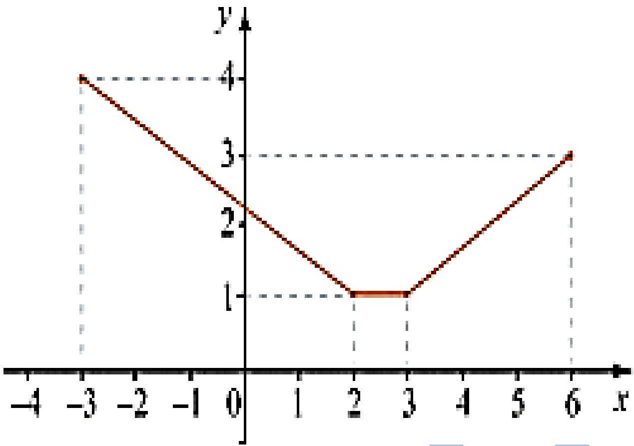
Etablir le tableau de variation d'une fonction à partir de sa courbe

Une fonction est croissante sur un intervalle I, si, en parcourant la courbe de gauche à droite, les images en ordonnées augmentent.

Une fonction est décroissante sur un intervalle I, si, en parcourant la courbe de gauche à droite, les images en ordonnées diminuent.

Une fonction est constante sur un intervalle I lorsque sa représentation graphique est un segment horizontal.

Exemple 10



La ligne brisée ci-dessus représente une fonction f :
– décroissante sur l'intervalle ; $[-3\ ;\ 2]$;
– constante sur l'intervalle ; $[2\ ;\ 3]$;
– croissante sur l'intervalle ; $[3\ ;\ 6]$.

Elle atteint son minimum 1 sur l'intervalle ; $[2\ ;\ 3]$.
On résume ces informations dans un tableau de variation :

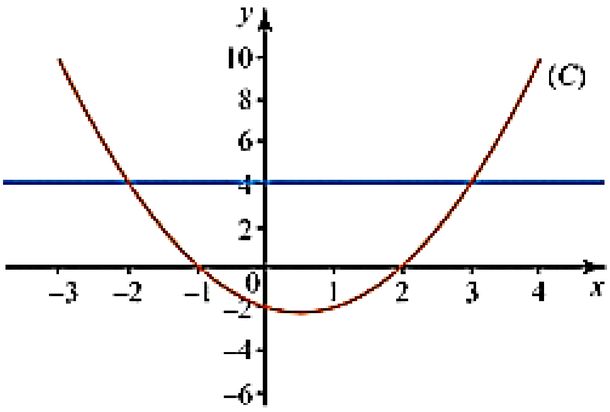
x	-3		2		3		6
sens de variation de f	4	↘	1	→	1	↗	3

Lire les solutions d'une équation sur une courbe de fonction

• Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant la fonction f avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

Dans le cas particulier de l'équation $f(x) = 0$, les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

Exemple 11

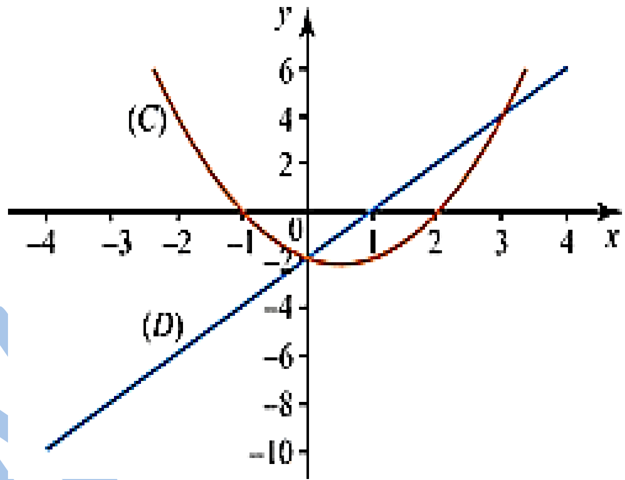


La courbe (C) ci-dessus représente une fonction f.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$ est : $S = \{-2\ ;\ 3\}$.
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est : $S = \{-1\ ;\ 2\}$.

• Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f avec la courbe représentant g.

Exemple 12

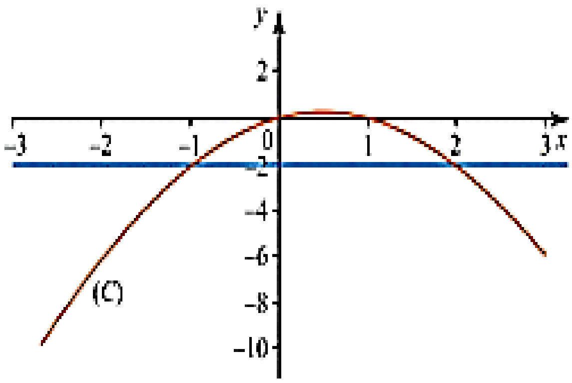
La courbe (C) ci-dessus représente une fonction f et la droite (D) une fonction g. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est : $S = \{0\ ;\ 3\}$.



Lire les solutions d'une inéquation sur une courbe de fonction

• Les solutions de l'inéquation $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de la droite d'équation $y = k$.

Dans le cas particulier de l'équation $f(x) < 0$, les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés au-dessous de l'axe des abscisses.



Exemple 13

La courbe (C) ci-dessus représente une fonction f.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > -2$ est : $S_1 =]-1; 2[$.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 0$ est : $S_2 =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

• Plus généralement, les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe représentant f, situés au-dessous de la courbe représentant g :

$$S_3 =]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

Remarque

Une fonction croissante conserve l'ordre ;

Une fonction décroissante inverse l'ordre.

b) Le taux d'accroissement (*de variations*) d'une fonction

Définition

Soit $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition d'une fonction numérique f, soit $I \subset \mathcal{D}_f$, et $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I que l'on note Δf ou T, le nombre réel défini par ;

$$\boxed{\boldsymbol{T = \Delta f = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}}$$

Si $\Delta f > 0$ alors f est croissante sur I,

Si $\Delta f < 0$ alors f est décroissante sur I,

Si $\Delta f = 0$ alors f est constante sur I,

Remarque

Une fonction est dite croissante lorsque ;

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow \Delta f > 0$$

Une fonction est dite décroissante lorsque ;

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow \Delta f < 0$$

Une fonction est dite constante lorsque ;

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow \Delta f = \mathbf{0}$$

c) Extrémum et extremum relatif (*local*)

a- Maximum

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel $f(x_0) = M$.

On dit que M est le maximum de f sur $\mathcal{D}_f$ lorsque ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow f(x) \leq M$$

b- Maximum relatif ou local

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = M_1$.

On dit que M_1 est un maximum relatif de f sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ lorsque ;

$$\forall x \in I \Longrightarrow f(x) \leq M_1$$

c- Minimum

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel $f(x_0) = m$.

On dit que m est le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$ lorsque ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow f(x) \geq m$$

d- Minimum relatif ou local

Définition

Soit f une fonction numérique et $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel $f(x_0) = m_1$.

On dit que m_1 est un minimum relatif de f sur un intervalle I de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ lorsque ;

$$\forall x \in I \Longrightarrow f(x) \geq m_1$$

Résumé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in$ I.

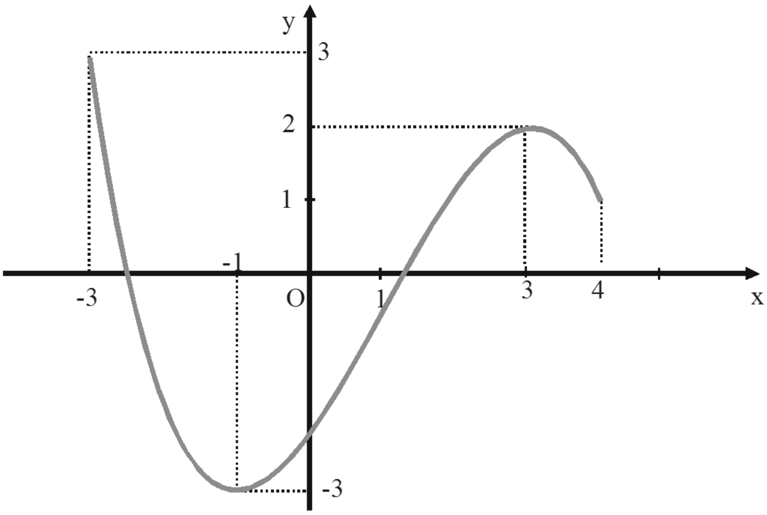
- f présente un maximum sur I en x_0 si, et seulement si, pour tout $x \in$ I, $f(x) \leq f(x_0)$.
- f présente un minimum sur I en x_0 si, et seulement si, pour tout $x \in$ I, $f(x) \geq f(x_0)$.

Exemple 14

Sur la figure ci-dessous, $\mathscr{C}$

est la courbe représentative

d'une fonction ***f*** définie sur I = [-3 ; 4].



Sur l'intervalle [-3 ; 4], $\boldsymbol{f}$ présente :

un maximum en -3, qui est égal à 3 ;

un minimum en -1, qui est égal à -3 ;

De plus, sur l'intervalle [1 ; 4]

par exemple, $\boldsymbol{f}$ présente un maximum

en 3, qui est égal à 2.

4. Courbes et symétrie, courbes et translation

a) Courbes symétriques par rapport à un point

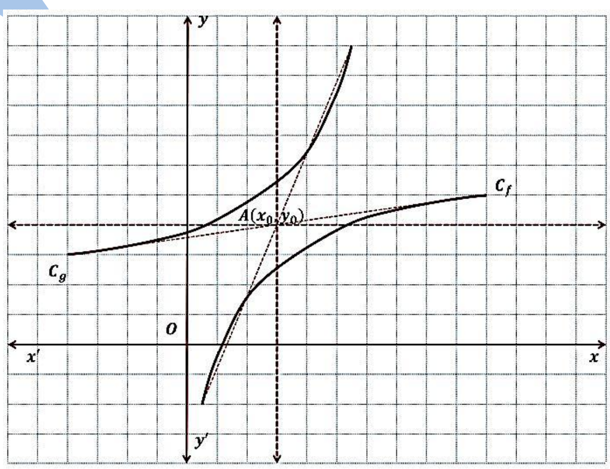
Propriété 1

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont symétriques par rapport à un point $A(a, b)$, si, et seulement si ;

$$\boldsymbol{g(2a - x) + f(x) = 2b}$$

Exercice

Démontrer la propriété 1.



Cas particuliers

Si $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont confondues, A est alors le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et on a ;

$$\boldsymbol{f(2a-x)+f(x)=2b}$$

Si $\mathcal{C}_f$ est confondue à $\mathcal{C}_g$, et O (*origine du repère*) est le centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors, on a ;

$$f(2\times 0-x)+f(x)=2\times 0$$

$$\Longrightarrow f(-x)+f(x)=0 \Longrightarrow \boldsymbol{f(-x)=-f(x)}$$

Définition

Une fonction f est dite impaire si, et seulement si elle admet O (*le point d'origine*) comme centre de symétrie.

C'est -à-dire si ; Soit ***f*** une fonction définie sur un ensemble D de réels.

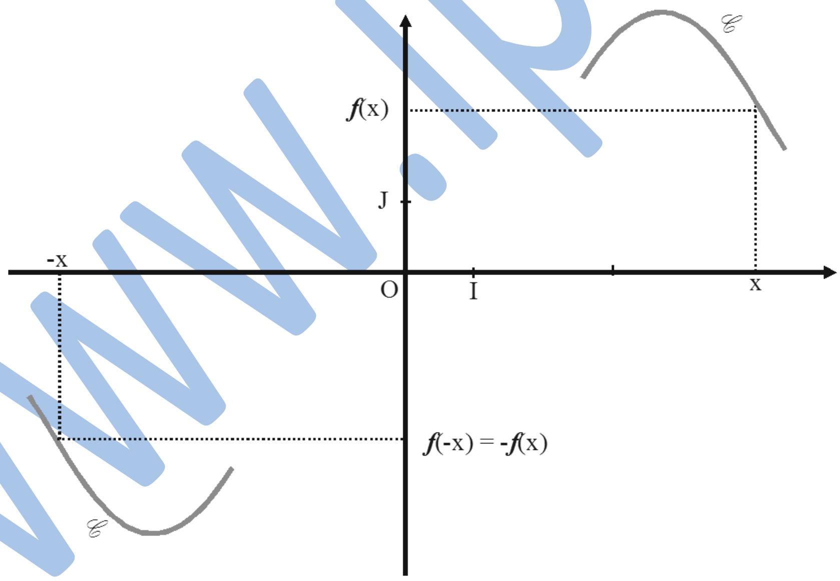
f est impaire si, et seulement si : pour tout x ∈ D, -x∈ D et ***f***(-x) =- ***f***(x).

Exemple 15

La fonction ***f*** définie sur $\mathbf{R}$ par f(x) = x^3 est impaire.

La fonction ***g*** définie sur $\mathbf{R}^*$ par g(x) = $\frac{1}{x}$ est impaire.

Dans un repère (O ; I ; J), la courbe représentative C d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

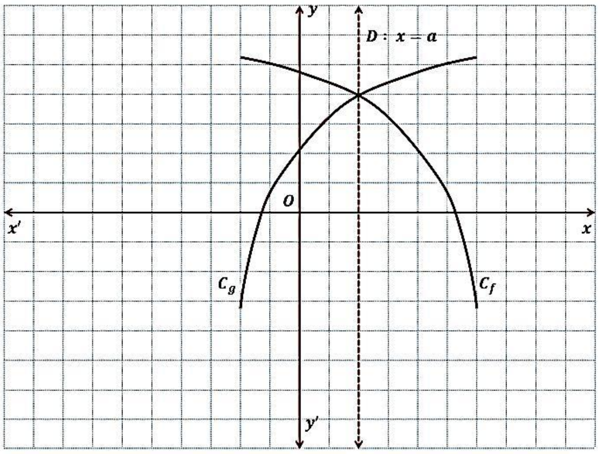


b) Courbes symétriques par rapport à un axe vertical

Propriété 2

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g sont symétriques par rapport à une droite $\Delta :\ x=a$, si, et seulement si ;

$$\boldsymbol{g(2a-x)=f(x)}$$



Exercice

Démontrer la propriété 2.

Cas particuliers

Si $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont confondues, Δ est alors l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, et on a ;

$$\boldsymbol{f(2a - x) = f(x)}$$

Si $\mathcal{C}_f$ est confondue à $\mathcal{C}_g$, et yOy' (*axe des ordonnées*) est l'axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, alors, on a ;

$$f(2 \times 0 - x) = f(x)$$
$$\Longrightarrow f(-x) = f(x) \Longrightarrow \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

Définition

Une fonction f est dite paire si, et seulement si elle admet yOy' (*axe des ordonnées*) comme axe de symétrie.

C'est -à-dire si ; Soit *f* une fonction définie sur un ensemble D de réels.

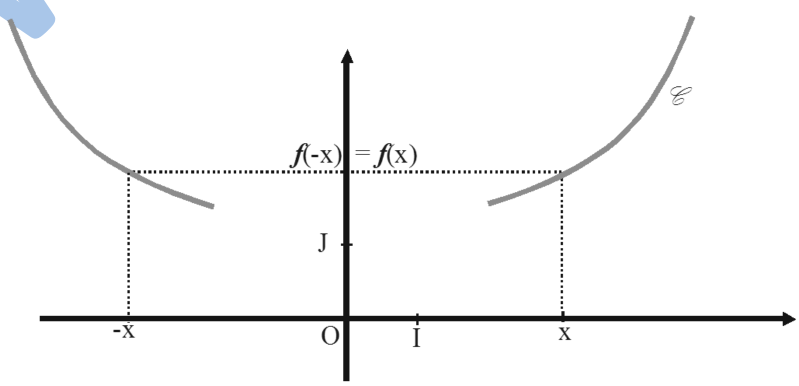
f est paire si, et seulement si : pour tout x ∈ D, -x∈ D et *f*(-x) = *f*(x).

Exemple 16

La fonction ***f*** définie sur $\mathbb{R}$ par ***f***(x) = x^2 est paire.

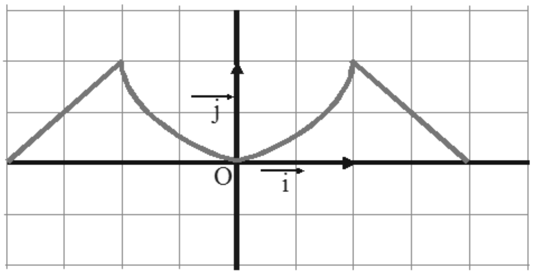
La fonction ***g*** définie sur $\mathbb{R}$ par ***g***(x) = $3x^4 - x^2 + 1$ est paire.

Dans un repère (O ; I ; J), la courbe représentative C d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

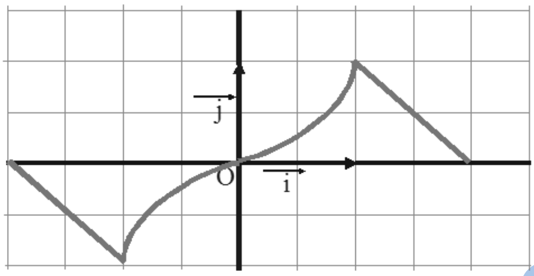


Conclusion

Si f est paire, alors
sa courbe est symétrique par rapport
à l'axe des ordonnées.



Si f est impaire, alors
sa courbe est symétrique par rapport
à l'origine du repère.

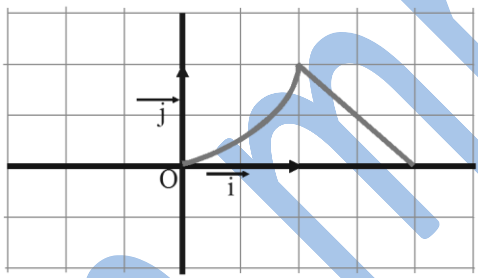


Exemple 17

A. Etudier la parité des fonctions données en **2.**

B. Le repère $(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j})$ est orthonormal.

La courbe C ci-contre est une partie de la courbe qui représente une fonction f définie sur [-2 ; 2].
La compléter, en supposant d'abord que f est paire, puis que f est impaire.



Solution

A. Le tableau suivant donne la parité des fonctions de l'application 2.

La fonction	Type de parité	La fonction	Type de parité
$x \mapsto 2x^2 + \dfrac{1}{x^2}$	Paire	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\lvert x\rvert}}$	Paire
$x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$	Impaire	$x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$	Impaire
$x \mapsto 2x^2 + \dfrac{\lvert x\rvert}{x^2+1}$	Paire		

c) Image d'une courbe par une translation

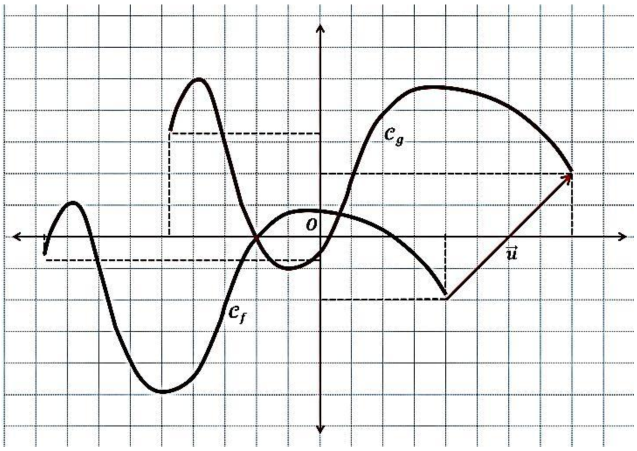
Propriété 3

La courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f est l'image de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g par la translation de vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$, si et seulement si ;

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = b + g(x-a)}}.$$

Exercice

Démontrer la propriété 3

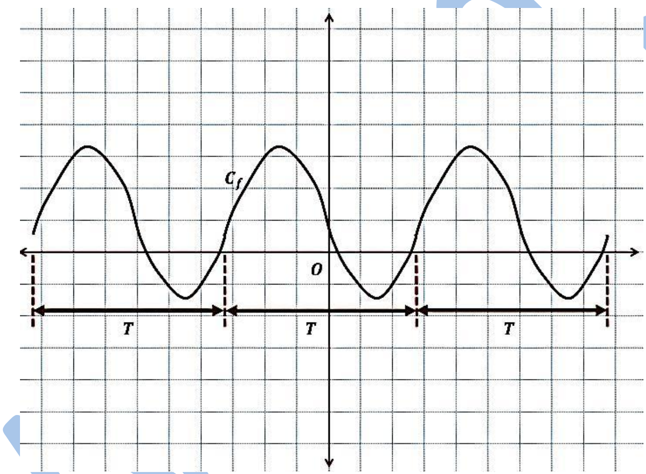


Cas particuliers

$b = 0 \Longrightarrow \vec{u}\binom{a}{0} \Longrightarrow g(x) = f(x-a) \Leftrightarrow t_u$ est une translation horizontale.

$a = 0 \Longrightarrow \vec{u}\binom{0}{b} \Longrightarrow g(x) = b + f(x) \Leftrightarrow t_u$ est une translation verticale.

5. Fonctions périodiques et période d'une fonction



Définition

Une fonction f est dite périodique, s'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que ;

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \Longrightarrow f(x+T) = f(x)$$

T est appelée la période de f.

Exemple 18

On considère les fonctions trigonométriques ;

$$f(x) = \sin x \Longrightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \cos x \Longrightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \tan x \Longrightarrow T = \pi$$

a) Expression de langage

Lorsqu'une fonction f est de période π, on dit que f est π −périodique ;

Lorsqu'une fonction f est de période 2π, on dit que f est 2π −périodique, etc.

6. Domaine d'étude d'une fonction

1° Lorsqu'une fonction est paire et définie sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe graphique présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Il suffit donc de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition $[0;\ +\infty[$ et compléter la courbe en procédant par symétrie autour de (yOy').

2° Lorsqu'une fonction est impaire et définie sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe graphique présente une symétrie par rapport à l'origine.

Il suffit donc de l'étudier sur la moitié de son domaine de définition $[0;\ +\infty[$ et compléter la courbe en procédant par symétrie autour de O.

3° Lorsqu'une fonction est périodique, alors sa courbe graphique présente une répétition sur chaque période.

Il suffit donc de l'étudier sur une période $[0;\ T[$ de son domaine de définition et compléter la courbe en procédant par reproduction, ou translations successives de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} kT \\ 0 \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Fonctions linéaires. Fonctions affines

Définitions

A. Fonction affine

On appelle fonction affine définie sur R toute fonction : ***f*** **:** x ↦ ax + b,

a et b étant des réels donnés.

B. cas particuliers

- si b = 0, ***f*** est une fonction linéaire.
- si a = 0, ***f*** est une constante.
- si a = b = 0, ***f*** est une fonction nulle.

Propriétés

A. Sens de variation

- Si a > 0, la fonction affine **:** x ↦ ax + b est strictement croissante sur R et l'on a le tableau de variation suivant :

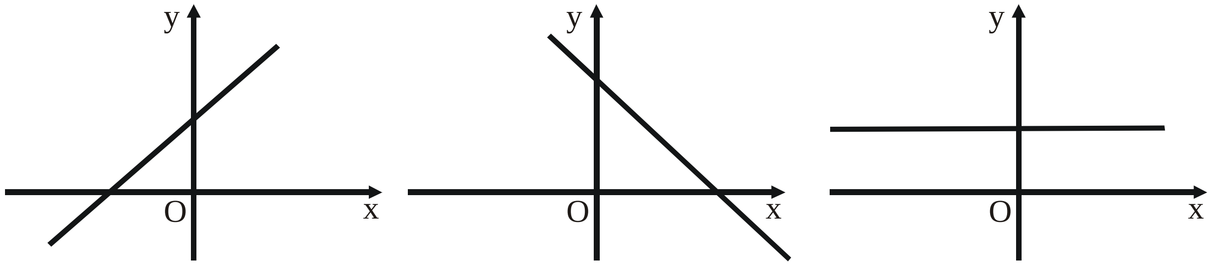
x	$-\infty$ $+\infty$
ax + b	↗

- Si a < 0, la fonction affine **:** x ↦ ax + b est strictement décroissante sur R et l'on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$ $+\infty$
ax + b	↘

B. Représentation graphique

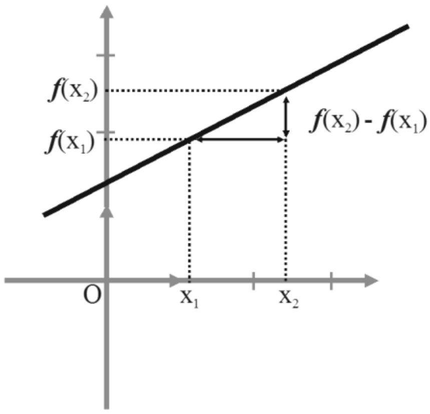
La représentation graphique de ***f*** est une droite qui sera déterminée par la construction de deux de ses points (par exemples, les points d'intersection avec les axes de coordonnées si ces points existent).



a > 0 a < 0 a = 0

- a est le coefficient directeur de la droite.

b est l'ordonnée à l'origine.



a = $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$;

b = ***f***(0).

C. Fonction affine et proportionnalité

- Cas des fonctions linaires : ***f***(x) = ax.

f (x) est proportionnelle à x. le coefficient de proportionnalité est a.

- Cas des fonctions affines : ***f***(x) = ax + b.

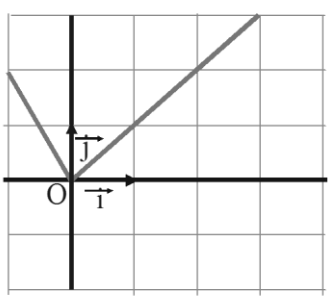
Pour tous réels x_1 et x_2 distincts : $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

L'accroissement ***f***(x_2) – ***f***(x_1) est proportionnel à l'accroissement $x_2 - x_1$.

On dit que l'accroissement de l'image est proportionnel à l'accroissement de la variable.

Le coefficient de proportionnalité est a.

Exemple 19



Soit ***f*** la fonction définie sur [-1 ; 4] par :

$$\begin{cases} \text{si } -1 \leq x \leq 0, \text{ alors } \boldsymbol{f}(x) = -2x \\ \text{si } 0 \leq x \leq 4, \text{ alors } \boldsymbol{f}(x) = x \end{cases}$$

a) Résoudre f(x) = 1.
b) Résoudre ***f***(x) = 3.
c) Vérifier graphiquement les résultats.

Solution

a) ***f***(x) = 1 ⇔ x = 1 ou x = $\frac{-1}{2}$; b) ***f***(x) = 3 ⇔ x = 3.

c) On observe ces solutions sur la représentation ci-contre.

Exercice généraux

Exercice 1

Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$h(x) = \sqrt{|x|}\ ;\ j(x) = \sqrt{3x^2 + 4|x|}$$

$$k(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 5|x|}\ ;\ l(x) = \sqrt{2|x| - 5}$$

$$m(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-4}}\ ;\ n(x) = \frac{3x-7}{\sqrt{3|x|+8}}$$

$$p(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{\big||x|-5\big|-2}}\ ;\ q(x) = \sqrt{3x^3 + |x|}$$

$$s(x) = \sqrt{\big||x^2-4|-8\big|-1}\ ;$$

$$t(x) = \frac{4x+1}{\sqrt{\big||x^2-2|-7\big|}}$$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions rationnelles suivantes, déterminer l'ensemble de définition et simplifier si possible l'expression :

$$A(x) = \frac{x^2}{x^3 + 2x^2}$$

$$B(x) = \frac{6-2x}{x^2 - 6x + 9}$$

$$C(x) = \frac{2}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$D(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2 - 4(2x-3)}{(x+1)^2(x-3)}$$

$$E(x) = \frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{x^2-4}$$

$$F(x) = \frac{16}{12x - 4} - \frac{15x + 5}{(3x + 1)^2} + \frac{9x}{9x^3 - x}$$

$$G(x) = \frac{x + \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} - 1} \times \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$H(x) = \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x - 2}\right) \times \frac{x^2 - 4}{2x}$$

$$I(x) = \frac{x - \frac{3x}{3 - x}}{x + \frac{3x}{3 - x}}$$

Exercice 3

On donne les fonctions suivantes ;

$$f(x) = 3x - 7; \quad g(x) = 4x^2 + 5x - 2;$$
$$h(x) = 5x^3 - 1 \text{ et } l(x) = -4x + 6.$$

1° Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et h est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

2° Montrer que l est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont les fonctions paires, les fonctions impaires et celles qui ne sont ni paires ni impaires ;

$$f : x \longmapsto x^2 ; \quad g : x \longmapsto x^3 ; \quad h : x \longmapsto \frac{1}{x} ;$$
$$j : x \longmapsto x + \frac{1}{x} ; \quad k : x \longmapsto 2x^2 + \frac{3}{x^2} ;$$
$$l : x \longmapsto x^2 + \frac{5}{x} ; \quad m : x \longmapsto \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x}$$
$$n : x \longmapsto 2x^2 + \frac{|x|}{x^2 - 6} ; \; p : x \longmapsto \sqrt{-x} ;$$
$$q : x \longmapsto \sqrt{x} \times \sqrt{3x + 1} ; \quad r : x \longmapsto \frac{3}{\sqrt{|x|}}$$
$$s : x \longmapsto \sqrt{1 - x} ; \; t : x \longmapsto \frac{-5x}{\sqrt{3x + 5}} ;$$
$$a : x \longmapsto (3 - 2x)(5x + 2)$$

Exercice 5

Etudier la parité des fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{-5x^2 - 4|x|}{(x - 3)(3 - x)}; \; g(x) = \sqrt{3x^2 + 5x - 2}$$
$$h(x) = \sqrt{|x|} ; \; j(x) = \sqrt{3x^2 + 4|x|}$$
$$k(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 5|x|} ; \; l(x) = \sqrt{2|x| - 5}$$

$$m(x) = \frac{2|x| + 5}{\sqrt{x^2 - 4}} \; ; \; n(x) = \frac{3x - 7}{\sqrt{3|x| + 8}}$$

$$p(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{\left||x| - 5\right| - 2}} \; ; \; q(x) = \sqrt{3x^3 - |x|}$$

$$s(x) = \sqrt{\left||x^2 - 4| - 8\right| - 1} \; ;$$

$$t(x) = \frac{4|x| + 1}{\sqrt{\left||x^2 - 2| - 7\right|}}$$

Notion de fonction

Exercice 6

Soit ***f*** la fonction définie par le tableau :

x	-1	-0,5	0	1	1,5	3
f(x)	2	4	3,5	2	-0,5	-14

Quelles sont les images par ***f*** des nombres : 0 ; 1 et 1,5 ?

Quels nombres ont pour image par ***f*** le nombre 2 ?

Exercice 7

Soit ***f*** la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

a) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-1	-0,5	0	0,5	2	4
f(x)						

b) Quels est le nombre dont l'image par f est 4 ?

Exercice 8

Soit ***f*** une fonction définie pour tout réel x sauf $\frac{4}{3}$, par $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$.

Déterminer les images par f de 4 ; -2 ; 7 ; 0,5 et 5.

Déterminer les antécédents par f de 2.

Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer, s'ils existent, les coordonnées des points d'intersections de C avec l'axe des abscisses.

Domaine de définition

Exercice 9

f et ***g*** sont définies par :

f(x) = $2x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x$.

g(x) = $\frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x}$.

Trouver D_f et D_g.

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction ***f***.

a) ***f***(x) = $(7 - \frac{3}{2x})(5x + 1)$; b) ***f***(x) = $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+7}}$.

c) ***f***(x) = $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$;

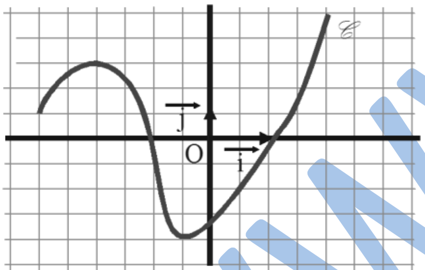
d) ***f***(x) = $\frac{1}{(x+2)(x-3)}$. e) ***f***(x) = $\frac{1}{|x|+1}$ f) ***f***(x) = $|x| - 1$.

Représentation graphique

Exercice 11

Pourquoi la courbe $\mathscr{C}$, de la figure ci-dessous, représente-t-elle une fonction ?

Soit ***f*** cette fonction.



a) L'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 1,5 ;

b) Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ dont l'ordonnée est -1.

c) Les coordonnées des sommets de $\mathscr{C}$;

d) L'image de -1 par ***f*** ;

e) Les antécédents de 3 par ***f***.

Exercice 12

La courbe $\mathscr{C}$, ci-dessous, représente la fonction définie su $\mathbf{R}$:\ $\{2\}$ par ***f***(x) = $\frac{2x+3}{x-2}$.

1°) Déterminer graphiquement :

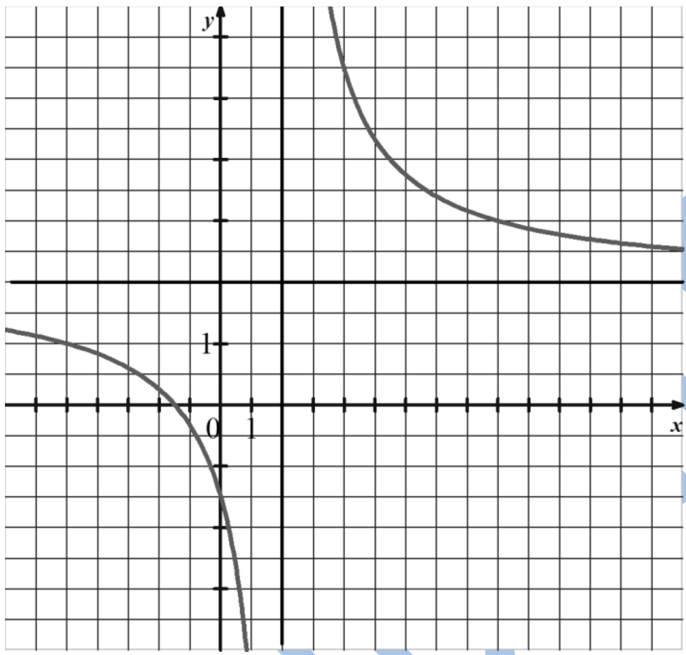
a) Les images de 1 et 11 ;

b) Les antécédents, s'ils existent, de 4, 2 et 0.

2°) a) Calculer les images de 1 et de 11.

c) Calculer les antécédents de 4 ; 2 ; 0.

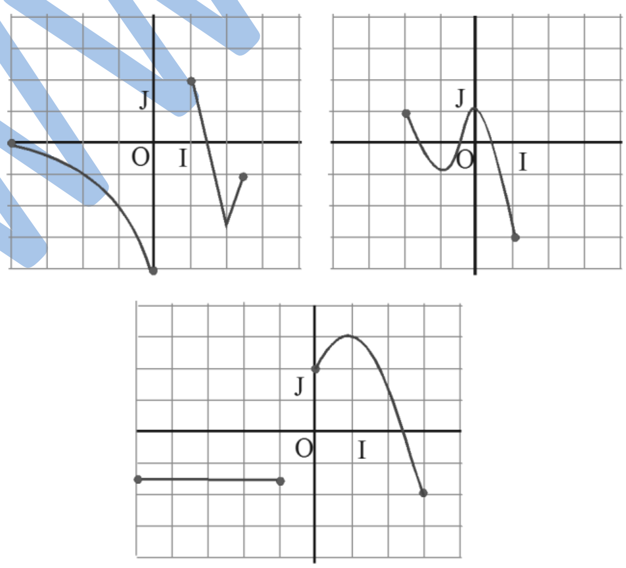
d) Soit m un nombre réel quelconque. Calculer les antécédents de m.



Exercice 13

Les courbes ci-dessous sont des représentations graphiques de fonctions numériques.

Donner l'ensemble de définition de ces fonctions.



Sens de variation

Exercice 14

Associer les tableaux de variation aux et les courbes représentatives.

1.

x	-3		0		1		2
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

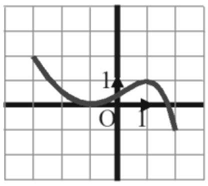
2.

x	-3		0		1		2
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

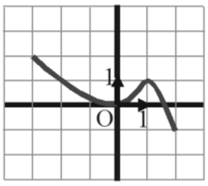
3.

x	-3		-1		1		2
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

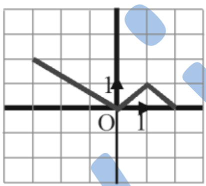
a



b)



c)



Exercice 15

Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x - 1$.

Soit a et b deux réels. Démontrer que :

$f(a) - f(b) = (a - b)(a + b + 2)$.

En déduire que f est décroissante sur $]-\infty ; -1]$ et que f est croissante sur $[-1 ; +\infty[$.

Exercice 16

Soit $f : x \mapsto \frac{-2}{x^2}$.

Montrer, en utilisant les règles sur les inégalités que la fonction f est croissante sur $]0 ; +\infty]$.

Parité d'une fonction

Exercice 17

Etudier la parité des fonctions définies par :

1) $x \in \mathbf{R}$ et $f(x) = 1 + x^2$; 2) $x \in \mathbf{R}$ et $f(x) = 5x^3 - 2x$

3) $x \in \mathbf{R}$ et $f(x) = |x^3 + x|$; 4) $x \in \mathbf{R}$ et $f(x) = x + 1$

5) $x \geq 2$ et $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}.$$

1) Exprimer $f(-x)$ puis comparer avec $f(x)$.

Soit M le point de coordonnées (x ; f (x)) et M' celui de coordonnées (-x ; f (-x)).

2) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$?

Exercice 19

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{x^3+3}{x^2+1}.$$

1) Exprimer $g(-x)$ puis comparer avec $g(x)$.

Soit N le point de coordonnées (x ; g(x)) et N' celui de coordonnées (-x ; g(-x)).

2) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}'$ représentative de g sur $\mathbb{R}$.

Fonctions affines

Exercice 20

On considère la fonction $f : x \mapsto |x|$.

1) Quel est son ensemble de définition ?

2) Tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O ; I ; J).

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = |x + 2|$.

1) Exprimer $f(x)$ sans valeur absolue suivant les valeurs du réel x.

2) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f.

Exercice 22

Soit la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. L'unité de longueur sur les deux axes perpendiculaires est 1 cm.

1) Calculer $f(x)$ dans l'intervalle

$[2n\ ;\ 2n + 1]$ ($n \in \mathbb{Z}$).

2) Trouver une période de f.

3) Trouver graphiquement les solutions de l'équation $\boldsymbol{f}(x) = \dfrac{1}{2}$ appartenant à l'intervalle [-1 ; 3].