Chapitre 1 Géométrie analytique dans le plan & l'espace

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. A propos des vecteurs

1. Quelques relations vectorielles

- Pour tout point A du plan ou de l'espace, on a $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ (vecteur nul).
- Pour tout point A et B du plan ou de l'espace, on a $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont opposés).
- Pour tout point A, B et C du plan ou de l'espace, on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ (Relation de Chasles).

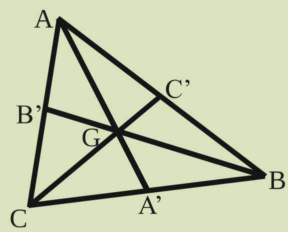
Soit [AB] un segment dans le plan ou de l'espace de milieu I :

- $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IB}$
- $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Pour tout point M du plan ou de l'espace, on a :

- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$
- $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$

Soit ABC un triangle dans le plan ou dans l'espace.
A', B', C' les milieux respectifs de [BC] , [AC] , [AB] ,
G le centre de gravité ABC.



- $\overrightarrow{A'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{A'B'}$

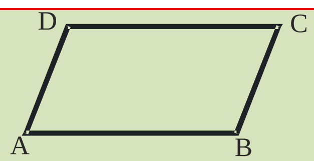
Les droites (AB) et (A'B') sont parallèles ;

- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
- $\overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$
- Pour tout point M du plan ou de l'espace

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$; $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$.

- Dans l'espace le point G appartient au plan du triangle ABC.
(G ; A ; B ; C sont coplanaires).

Soit ABCD un parallélogramme dans le plan ou dans l'espace.

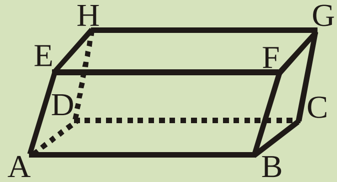


- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
- $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Dans l'espace les points A ; B ; C ; D sont coplanaires.

Soit ABCDEFGH un pavé dans l'espace

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$
- $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$



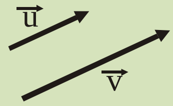
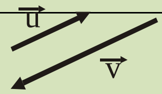
2. Produit d'un vecteur par un réel

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou dans l'espace

- $0\vec{u} = \vec{0}$; $1\vec{u} = \vec{u}$; $-1\vec{u} = -\vec{u}$;
- $\forall\ \alpha$; $\beta \in \mathbf{R}$; $\alpha\left(\beta\vec{u}\right) = \left(\alpha\beta\right)\vec{u}$; $\left(\alpha+\beta\right)\vec{u} = \overrightarrow{\alpha u} + \beta\vec{u}$; $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.

3. Vecteurs colinéaires

- $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur dans le plan ou dans l'espace.
- Deux vecteurs non nuls dans le plan ou dans l'espace, sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction (c'est-à-dire ils sont portés par la même droite ou par deux droites parallèles).
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbf{R}$.
- Si deux vecteurs sont colinéaires, alors, tout vecteur colinéaire à l'un est colinéaire à l'autre.

On a	Si, et seulement si,
$\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbf{R}^{+}$. > .	$\vec{u}$ et $\vec{v}$.sont colinéaires et de même sens. 
$\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbf{R}^{-}$. > .	$\vec{u}$ et $\vec{v}$.sont colinéaires et de sens contraires. 

4. Combinaison linéaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α, β deux réels.

Le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; α et β sont les coefficients respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

5. Norme d'un vecteur dans le plan ou dans l'espace

La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est la distance entre deux points origine et extrémité correspondant au vecteur $\vec{u}$. Elle est notée $\left\|\vec{u}\right\|$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$;

- $\left\|\vec{u}\right\| \geq 0$.
- $\left\|\vec{0}\right\| = 0$ et $\left\|\vec{u}\right\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$
- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

Pour tout réel k :

- $\left\|k\vec{u}\right\| = |k|\left\|\vec{u}\right\|$; $\left\|-\vec{u}\right\| = \left\|\vec{u}\right\|$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan ou dans l'espace;

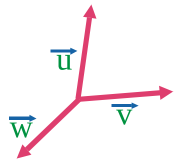
- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \leq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$.

- Si : $\|\vec{u}\| = 1$, alors $\vec{u}$ est un vecteur unitaire.

II. Bases de l'espace

Soit $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls dans l'espace $\mathscr{E}$.

Le triplet $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ est une base de l'espace $\mathscr{E}$ si, et seulement, si $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont non coplanaires.



- Le triplet $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ est une base dans l'espace $\mathscr{E}$ si et seulement :

$\forall\alpha\ ,\ \beta \in \mathbf{R}$ $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \neq \vec{w}$; $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \neq \vec{u}$; $\alpha\vec{w} + \beta\vec{u} \neq \vec{v}$

- Soit $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ une base de $\mathscr{E}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un triplet unique (x ; y ; z) de réels tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, x ; y ; z sont les composantes ou coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

On écrit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$;

- x est l'abscisse du vecteur $\vec{u}$,
- y est l'ordonnée du vecteur $\vec{u}$,
- z est la côte du vecteur $\vec{u}$.
- $\vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$; α et β deux réels, on a :

$$-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} ;\ \alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} ;\ \vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} ;\ \vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix} ;\ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha x+\beta x' \\ \alpha y+\beta y' \\ \alpha z+\beta z' \end{pmatrix}.$$

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$$

- Si $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ est une base de $\mathscr{E}$ et $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ sont deux à deux orthogonaux (portées par deux droites orthogonales).

  Alors la base $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ est une base orthogonale dans $\mathscr{E}$.
- Si $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ est une base orthogonale de $\mathscr{E}$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$

Alors, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ est une base orthonormale de $\mathscr{E}$

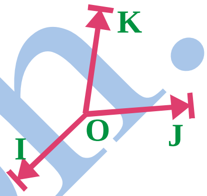
III. Repères

Si $(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ est une base de $\mathscr{E}$ et O un point donné de $\mathscr{E}$, alors $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ est un repère de $\mathscr{E}$.

Pour tout point M de l'espace $\mathscr{E}$; il existe un triplet unique (x ; y ; z) de réels tels que :
$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x ; y ; z sont les coordonnées du points M dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.
On écrit M(x ; y ; z) ;
- x est l'abscisse de M ; on écrit $x = x_M$
- y est l'ordonnée de M ; on écrit $y = y_M$
- z est la côte de M ; on écrit $z = z_M$

Avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$; $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$; $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$;
Le repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ est désigné aussi par (O, I ; J ; K).
- O est l'origine du repère,
- (OI) est l'axe des abscisses
- (OJ) est l'axe des ordonnées
- (OK) est l'axe des côtes
- O(0 ; 0 ; 0) ; I(1 ; 0 ; 0) ; (J(0 ;1 ; 0) ; K(0 ; 0 ; 1).



- Si $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$; $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$; alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

- Si $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$; $B(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et I milieu de [AB], alors,

$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$;

$y_J = \dfrac{y_A + y_B}{2}$;

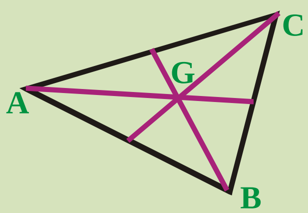
$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

- Si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors

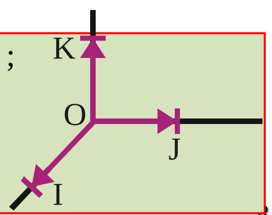
$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$;

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$;

$z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.



- Si (O ; I ; J ; K) est un repère de $\mathscr{E}$ et (OI) ⊥ (OJ) ; (OJ) ⊥ (OK) ; (OK) ⊥ (OI) ; alors ; (O ; I ; J ; K) est un repère orthogonal de $\mathscr{E}$.
- Si (O ; I ; J ; K) est un repère orthogonal de $\mathscr{E}$ et OI = OJ = OK = 1 ;



alors (O ; I ; J ; K) est un repère orthonormal de $\mathscr{E}$.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal de $\mathscr{E}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

- Si $A(x_A ; y_A ; z_A)$; $B(x_B ; y_B ; z_B)$, dans un repère orthonormal de $\mathscr{E}$, alors

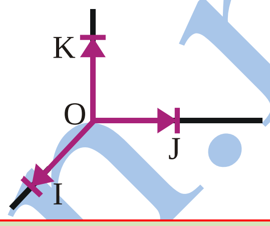
$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

- Dans un repère orthonormal de $\mathscr{E}$, la sphère de centre $\Omega(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de rayon R a pour équation cartésienne : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

VI. Equation de droite dans le plan et dans l'espace

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère (O ; I ; J ; K).

1. Equations des plans (OIJ) ; (OJK) ; (OKI) :



- Le plan (OIJ) a pour équation z = 0
- Le plan (OJK) a pour équation x = 0
- Le plan (OKI) a pour équation y = 0

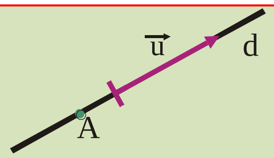
2. Equations des droites (OI) ; (OJ) ; (OK) :

- La droite (OI) a pour système d'équations : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- La droite (OJ) a pour système d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$
- La droite (OK) a pour système d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

3. Représentation paramétrique d'une droite

Soit (d) une droite passant par un point donné

$A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de vecteur directeur donné $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.



(d) est l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$; $t \in \mathbf{R}$

Ce système d'équations est la représentation paramétrique de (d).

4. Représentation paramétrique d'un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan contenant un point donné $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de base $(\vec{u} ; \vec{u'})$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $\vec{u'}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

$\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que :

$\begin{cases} x = x_0 + at + a't' \\ y = y_0 + bt + b't' \\ z = z_0 + ct + c't' \end{cases}$; $(t ; t') \in \mathbf{R}^2$; Ce système d'équations est la représentation paramétrique de $\mathscr{P}$.

4. Vecteur normal d'un plan de l'espace

- Soit $\mathscr{P}$ un plan, tout vecteur non nul $\vec{n}$ porté par une droite orthogonale à $\mathscr{P}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
- Soit $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ une base de $\mathscr{P}$: $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\vec{n}\perp\vec{u}$ et $\vec{n}\perp\vec{v}$.

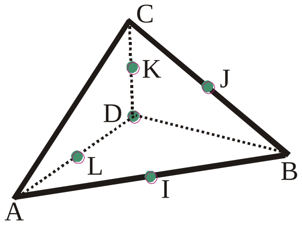
Savoir-faire

A. Applications

Vecteurs et configurations

Exercice1.

ABCD un tétraèdre. I ; J ; K ; L les milieux respectives de : [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA].
Montrer que IJKL est un parallélogramme.



Solution

Dans le triangle ABC, on a : $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

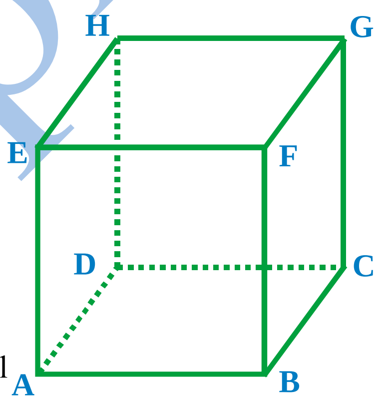
Dans le triangle ACD, on a : $\overrightarrow{LK}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

Donc, $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$.
Donc, IJKL est un parallélogramme.

Vecteurs et alignement

Exercice2.

ABCDEFGH un cube d'arête a.
1) Montrer que le triangle BDE est équilatéral.
2) Soit I le centre de BDE.
Montrer que : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$,
que peut-on déduire pour les points A ; I ; G ?
3) On prend a = 1. L'espace est rapporté au repère orthonormal (D ; A ; C ; H).
1) Donner les coordonnées des sommets de ce cube.
2) Déterminer les coordonnées de I.
Vérifier que : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.



Solution

1) On a : ABCD ; ADHE ; ABFE sont des carrés de côté mesurant a.
Donc : BD = $a\sqrt{2}$; DE = $a\sqrt{2}$; BE = $a\sqrt{2}$;
Donc : BD = DE = BE ;
Donc ADE est un triangle équilatéral.

2) ABCDEFGH est un pavé,
Donc, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$,
Or, I est le centre de gravité de BDE
Donc, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AI}$,
Donc, $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AI}$

Donc, $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$,

D'où les points A ; I ; J sont alignés.

3) a) On a : D(0 ; 0 ; 0) ; A(1 ; 0 ; 0) ; C(0 ; 1 ; 0) ; H(0 ; 0 ; 1).

On a : $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$; donc B(1 ; 1 ; 0),

On a : $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$; donc G(0 ; 1 ; 1) ,

On a : $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DH}$; donc E(1 ; 0 ; 1) ,

On a : $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$; donc F(1 ; 1 ; 1).

b) I est le centre de gravité de BDE,

Donc ; $x_I=\frac{x_A+x_D+x_E}{3}=\frac{1-0+1}{3}=\frac{2}{3}$; $y_I=\frac{y_B+y_D+y_E}{3}=\frac{1+0+0}{3}=\frac{1}{3}$;

$z_I=\frac{z_B+z_D+z_E}{3}=\frac{0+0+1}{3}=\frac{1}{3}$.

Don, $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-1\\ \frac{1}{3}-0\\ \frac{1}{3}-0\end{pmatrix}=\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$; $\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(0-1)\\ \frac{1}{3}(1-0)\\ \frac{1}{3}(1-0)\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Donc, $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

Equations de droites et de plans

Exercice3.

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$).

1) Déterminer la nature et les éléments géométriques de l'ensemble $\mathscr{P}$ des points M(x ; y ; z) de $\mathscr{E}$ tels que :

$$\begin{cases}x=1+t+t'\\ y=2t-t'\\ z=3+t\end{cases} ;\ (t\,;t')\in\mathbf{R}^2$$

2) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ (une relation entre x ; y ; z).

Solution

1 .) On a $\begin{cases}x=1+t+t'\\ y=0+2t-t'\\ z=3+t+0t'\end{cases}$, or $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, car $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0$.

Donc, $\mathscr{P}$ est le plan de base $(\vec{u}\ ;\ \vec{u'})$ et contenant le point A(1 ; 0 ; 3).

2.) On a $\begin{cases}t+t'=x-1\\ 2t-t'=y\end{cases}$

Donc, 3t = x + y – 1 et t = $\frac{x+y-1}{3}$, Or, z = 3 + t

Donc, $z = 3 + \dfrac{x+y-1}{3}$ et 3z = 9 + x + y -1 ,

Donc, $\boxed{\mathscr{P} : x + y - 3z + 8 = 0}$

B. Exercices

1. ABCD un tétraèdre, I, J, K, L les points tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$

1) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

2) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère IJKL ?

2. ABCD un tétraèdre, d'arête a (a > 0). A' milieu de [BD].
1) Montrer que le plan (AA'C est le plan médiateur du segment [BD].
2) Montrer que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.
3) Soit T, J, K, L les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ;[CD] ; [DA].
Montrer que IJKL est un carré et déterminer son aire en fonction de a.

3. ABCD un tétraèdre, I, J, K, L les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA].
L'espace est rapporté au repère (A ; B ; C ; D).
1) Donner les coordonnées des points I ; J ; K ; L.
2) Vérifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$.

4. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{k}$; $\vec{w} = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$.

1) $(\vec{u} ; \vec{v})$ est-elle une base de $\mathscr{E}$?

2) $(\vec{u} ; \vec{w})$ est-elle une base de $\mathscr{E}$?

5. L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère (O ; I ; J ; K). A(2 ;0 ;3), B(-1 ;2 ; 5) ; C(3 ;-2 ;0).
1) Les points A ; B ; I sont-ils alignés ?
2) les points I ; J ; C sont-ils alignés ?

6. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer $\|\vec{u}\|$, $\vec{u}$ est-il unitaire ?

coordonnées de G.
3) Déterminer la représentation paramétrique de la droite (OG).
4) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJK), puis une équation cartésienne de ce plan.

8. L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. A(1 ; 2 ; 3); B(2 ; 0 ; 1); C(-1 ; 3 ; -5).

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme et déterminer les coordonnées de son centre I.
3) Soit G et H les centres de gravité des triangles ABC et ACD.
a) Déterminer les coordonnées des points G et H.
b) Montrer que I est le milieu de [GH].

9. L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.
1) $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne 2x +3y +2z + 1 = 0. (d) la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \ ; \ t \in \mathbf{R} \\ z = 2t \end{cases}$

Déterminer la position relative de $\mathscr{P}$ et (d).
2) $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :
2x + 3y +2z + 1= 0. (d') la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{-1}{3} + t \ ; \ t \in \mathbf{R} \\ z = \frac{-5}{2}t \end{cases}$

Déterminer la position relative de $\mathscr{P}$ et (d').
3) $\mathscr{P}$ est le plan d'équation cartésienne 2x +3y +2z +1 = 0.
(d'') la droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \ ; \ t \in \mathbf{R} \\ \mathbf{z} = \frac{-5}{2}t \ \mathbf{z} \ \mathbf{z} \end{cases}$

10 L'espace est rapporté à un repère orthonormal

2) $\vec{v} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, donnes les coordonnées de $\vec{v}$, $\vec{v}$ est-il unitaire ?

7. L’espace est rapporté à un repère orthonormal (O ; I ; J ; K).

1) Calculer les longueurs IJ, JK, KI. Quelle est la nature du triangle IJK ?

2) Soit G le centre du triangle IJK. Déterminer les

$(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l’ensemble Γ des points M(x ; y ; z) de l’espace dans chacun des cas :

1) Γ d’équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

2) Γ d’équation cartésienne :
$x^2 + y^2 + z^2 -2x -6y +8z +3 = 0$

3) Γ d’équation cartésienne :
$x^2 + y^2 + z^2 -x - 1 = 0$