Chapitre **10**

Suites numériques

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Généralités sur les suites

1) Définitions relatives aux suites

a) Définition d'une suite

On appelle suite numérique toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

b) Notion et vocabulaire

Si E désigne l'ensemble de définition d'une suite numérique (U_n), on a les notations suivantes ;

Notation fonctionnelle : $U: E \to \mathbb{R}$
$\qquad n \mapsto U(n)$

Notation indicielle : $(U_n)_{n\in E}$; ou plus simplement (U_n).

- $U(n)$ ou U_n est appelé terme d'indice n ou terme général.
- le $n^{\text{ième}}$ terme est appelé terme de rang n.

b) Détermination d'une suite numérique

En général, une suite numérique (U_n) est déterminé par :

- Ou bien une formule explicite permettant de calculer U_n en fonction de n.
- Ou bien le premier terme et une formule de récurrence exprimant U_n en fonction de U_{n-1}.
- Ou bien les deux premiers terme et une formule de récurrence entre U_n ; U_{n+1} ; U_{n+2}.

Exemples

- Soit $(U_n)_{n\in N}$ la suite définie par : $U_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

  Cette suite est déterminée par une formule explicite, le terme général de cette suite est : $\dfrac{2n+1}{n+2}$, le premier terme est $U_0 = \dfrac{1}{2}$, le $15^{\text{ème}}$ terme ou terme de rang 15 est $U_{14} = \dfrac{2\times 14+1}{14+2} = \dfrac{29}{16}$.
- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $V_n = \sqrt{n^2-1}$.
  Cette suite est déterminée par une formule explicite,
  Le premier terme est $V_1 = 0$; le $3^{\text{ème}}$ terme est $V_3 = \sqrt{3^2-1} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
- Soit la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par :
- $\begin{cases} W0 = 0 \\ W_n = \dfrac{1}{2}W_{n-1} + 3 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ Cette suite est définie par son premier terme et une formule de récurrence.

On a : $W_1 = 3$; $W_2 = \dfrac{1}{2}W_1 + 3 = \dfrac{1}{2}\times 3 + 3 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{6}{2} = \dfrac{9}{2}$; $W_3 = \dfrac{1}{2}W_2 + 3 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2} + 3 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{12}{4} = \dfrac{21}{4}$; …

2) Représentations graphiques d'une suite numérique

Une suite numérique est une fonction, donc elle peut être représentée dans le plan muni d'un repère, il est également possible de représenter les termes d'une suite sur un axe.

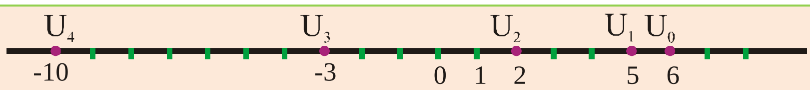
a) Représentation graphique d'une suite définie par une formule explicite

Exemple

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $U_n = 6 - n^2$.

Représentation de cette suite sur un axe :

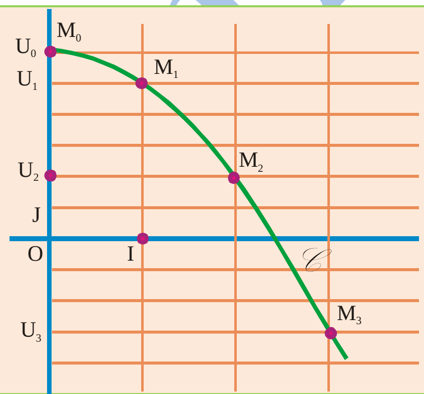
On a : $U_0 = 6$; $U_1 = 5$; $U_2 = 2$; $U_3 = -3$; $U_4 = -10$.



Représentation dans le plan

Le plan est muni du repère (O ; I ; J).

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{f} : x \longmapsto 6 - x^2$. Pour tout entier naturel n, on désigne par M_n le point de coordonnées (n ; $\boldsymbol{f}$(n)). L'ensemble des points M_n est une représentation graphique de la suite (U_n) dans le plan. Lorsqu'on projette les points M_n sur l'axe des ordonnées, on obtient une représentation des points de la suite sur l'axe (OJ).

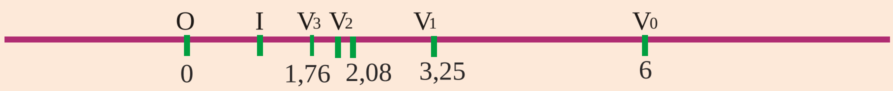


b) Représentation graphique d'une suite définie par une formule de récurrence

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} V_0 = 6 \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{2}(V_n + \dfrac{3}{V_n}) \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

- Représentation de cette suite sur un axe :

On a : $V_0 = 6$; $V_1 = \dfrac{13}{4} = 3{,}25$; $V_2 = \dfrac{217}{104} = 2{,}08$; $V_3 = 1{,}76$



Représentation de cette suite dans le plan

Le plan est muni du repère orthonormé (O ; I ; J).

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction

$\boldsymbol{g} : \longmapsto \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{3}{x})$

et Δ la droite d'équation y = x.

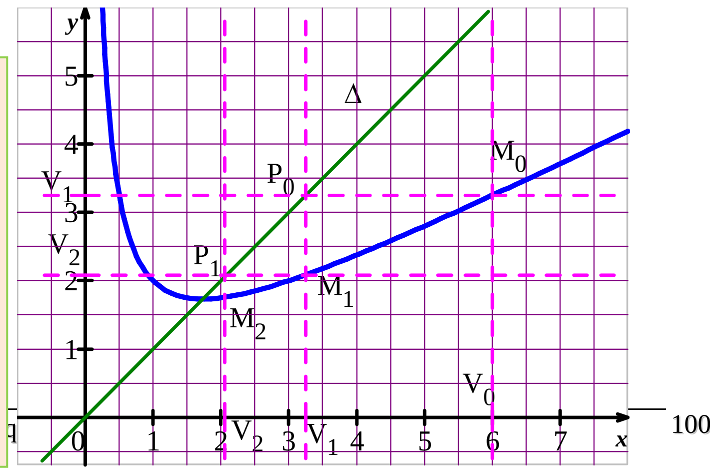
Construction de V_1

Soit M_0 le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $V_0 = 6$;

l'ordonnée de M_0 est $V_1 = g(V_0)$.

Soit P_0 le point de Δ d'ordonnée V_1 ; l'abscisse de P_0 est V_1.

Construction de V_2



Soit M_1 le point d'abscisse V_1 ; l'ordonnée de M_1 est $V_2 = \boldsymbol{g}(V_1)$,

Soit P_1 le point de Δ d'ordonnée V_2 ; l'abscisse de P_1 est V_2.
Cette méthode permet une construction de proche en proche sur l'axe (OI) des termes d'une suite définie par une formule de récurrence .

3) Propriétés d'une suite numérique

a) Suite majorée, Suite minorée ; Suite bornée

- Dire qu'une suite U est majorée signifie qu'il existe un réel M, tel que pour tout naturel n, $U_n \leq M$
- Dire qu'une suite U est minorée signifie qu'il existe un réel m, tel que pour tout naturel n, $U_n \geq m$
- Dire qu'une suite U est bornée signifie que U est majorée et minorée.

Exemples

- U(n) est la suite des naturels, c'est-à-dire que pour tout naturel n ; $U_n = n$; (U_n) est une suite minorée par 0, car pour tout n, $U_n \geq 0$; (U_n) n'est pas majorée.
- (V_n) est la suite telle que pour tout naturels n ; $V_n = \frac{n+1}{n+2}$

  (V_n) est une suite majorée par 1, car pour tout naturel n , $0 < n+1 < n+2$, donc $\frac{n+1}{n+2} < 1$, d'où $V_n < 1$.
  (V_n) est minorée par 0, car pour tout naturel n , on a : $V_n > 0$.
  Donc (V_n) est une suite bornée : pour tout naturel n, on a : $0 < V_n < 1$.

Remarques

- Une suite est positive si elle est minorée par 0.
- Une suite est négative si elle est majorée par 0.

b) Sens de variation d'une suite

- Dire qu'une suite (U_n) est croissante signifie que pour tout n, $U_n \leq U_{n+1}$
- Dire qu'une suite(U_n) est décroissante signifie que pour tout n, $U_n \geq U_{n+1}$
- Dire qu'une suite (U_n) est constante signifie que pour tout n, $U_n = U_{n+1}$
- Dire qu'une suite (U_n) est monotone signifie que (U_n) est décroissante ou décroissante.

Remarques

Pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n), il y a trois méthodes principales :

- On étudie directement le signe de $U_{n+1} - U_n$:
- Si pour tout naturel n, on a $U_{n+1} - U_n \geq 0$, alors $U_{n+1} \geq U_n$ et la suite (U_n) est croissante.
- Si pour tout naturel n, on a $U_{n+1} - U_n \leq 0$, alors $U_{n+1} \leq U_n$ et la suite (U_n) est décroissante.
- Si le signe de $U_{n+1} - U_n$ n'est pas constant, alors la suite (U_n) n'est ni, croissante, ni décroissante.

- Lorsque la suite (U_n) est définie explicitement par $U_n = \boldsymbol{f}(n)$, il suffit que la fonction numérique $\boldsymbol{f}$ à variable réelle soit croissante sur $[0 ; +\infty[$ pour que (U_n) soit croissante et il suffit que $\boldsymbol{f}$ soit décroissante sur $[0 ; +\infty[$ pour que (U_n) soit décroissante.

En effet, pour tout naturel n, on a évidement : $n + 1 \geq n \geq 0$ et par conséquent dans le cas où $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$: $\boldsymbol{f}(n+1) \geq \boldsymbol{f}(n)$ c'est-à-dire $U_{n+1} \geq U_n$, donc (U_n) est croissante et dans le cas où $\boldsymbol{f}$ est décroissante sur $[0 ; +\infty[$, $\boldsymbol{f}(n+1) \leq \boldsymbol{f}(n)$ c'est-à-dire $U_{n+1} \leq U_n$, donc (U_n) est décroissante.

Lorsque la suite (U_n) est à termes strictement positifs, on compare le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.

- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, alors $U_{n+1} \geq U_n$, donc (U_n) est croissante;
- Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$, alors $U_{n+1} \leq U_n$, donc (U_n) est décroissante.

Exemples

- (U_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $U_n = n^2$.
  Pour tout naturel n : $U_{n+1} - U_n = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1 \geq 0$.
  Donc, (U_n) est une suite croissante.
  Mais on peut dire aussi que l'on a : $U_n = \boldsymbol{f}(n)$ où $\boldsymbol{f}$ est la fonction : $x \longmapsto x^2$
  Or, $\boldsymbol{f}$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
  Donc, la suite (Un) est croissante.

- (W_n) est la suite telle que pour tout entier naturel n : $W_n = (-1)^n$; $W_0 = 1$; $W_1 = -1$; $W_2 = 1$, $W_3 = -1$…
  (W_n) est une suite qui n'est pas croissante car $W_2 > W_3$; et (W_n) n'est pas décroissante car $W_1 < W_2$.

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$.

  On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}$.

  Donc ; $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n < 0$; la suite (U_n) est décroissante.

II. Suites arithmétiques, suites géométriques

1) Suites arithmétiques

a) définition

Dire qu'une suite (U_n) est arithmétique signifie qu'il existe un réel r, tel que, pour tout naturel n ;
$U_{n+1} = U_n + r$,
r est appelé la raison de la suite (U_n).

Exemples

- La suite (Un) des naturels est une suite arithmétique de raison 1.
  $U_0 = 0$; $U_1 = 1$; $U_2 = 2$; …
- La suite (Vn) des naturels pairs est une suite arithmétique de raison 2.
  $V_0 = 0$; $V_1 = 2$; $V_2 = 4$; …
- La suite (Wn) des naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2.
  $W_0 = 1$; $W_1 = 3$; $W_2 = 5$; …
- La suite (x) telle que : pour tout naturel n :
  $x_n = 4 - 3n$ est une suite arithmétique de raison -3. En effet, pour tout naturel n,
  $x_{n+1} - x_n = (4 - 3(n + 1)) - (4 - 3n)$
  $= -3$, et par conséquent, $x_{n+1} = x_n - 3$.

Remarques

- Pour démontrer qu'une suite donnée est arithmétique, il suffit de montrer que pour tout naturel n, le réel : $U_{n+1} - U_n$ est constant (c'est-à-dire ne dépend pas de n).

- Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.
  - Si $r > 0$, alors la suite (U_n) est croissante
  - Si $r < 0$, alors la suite (U_n) est décroissante.
  - Si $r = 0$, alors la suite (U_n) est constante.

b) Expression explicite d'une suite arithmétique

On admet la Propriété suivante :

Si (U_n) est une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r, alors pour tout naturel n, on a :
$U_n = U_0 + nr$

Remarque

On déduit de cette propriété que pour tous naturels, n et k, on a : $U_n = U_k + (n - k)r$.
En particulier, si (U_n) a pour premier terme U_1, le terme général est : $U_n = U_1 + (n - 1)r$.

Exemples

- Soit (U_n) la suite des entiers naturels impairs, le premier terme de cette suite est $U_1 = 1$; la raison r = 2 ; On a : $U_n = U_1 + (n - 1)\,r$
  $U_n = 1 + (n - 1)\,2 = 2n - 1$.
- Soit (U_n) la suite arithmétique de raison -3, tel que $U_3 = 7$.

En appliquant : $U_n = U_k + (n - k)r$; on a, $U_{100} = U_3 + (100 - 3)(-3) = 7 + (97)(-3) = -284$.

c) Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

On admet la propriété suivante :

Si S est une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique (U_n), alors :

- $S = \dfrac{\text{Nombre de termes} \times (1^{er}\ \text{terme} + \text{dernier terme})}{2}$
- Cas particuliers $\begin{cases} S = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \dfrac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}; \ \text{si le } 1^{er} \text{ terme est } U_0 \\ S = U_1 + U_1 + \ldots + U_n = \dfrac{n(U_1 + U_n)}{2}; \ \text{si le } 1^{er} \text{ terme est } U_1 \end{cases}$

Exemples

- La somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls est : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \times (1+n)}{2}$.
- La somme des n premiers nombres impairs est : $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \dfrac{n \times (1 + (2n - 1))}{2} = n^2$.
- La somme des n premiers nombres pairs non nuls est : $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = \dfrac{n \times (2 + 2n)}{2} = n(n+1)$.

2) Suites géométriques

a) Définition

Dire qu'une suite (Un) est géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que :
pour tout naturel n, $U_{n+1} = qU_n$.
Le réel q est la raison de la suite U.

Exemple

- La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de raison 2.
  $U_0 = 2^0 = 1$; $U_1 = 2^1 = 2$; $U_2 = 2^2 = 4$; $U_3 = 2^3 = 8$; …
- Une suite constante est une suite géométrique de raison 1 ; $U_0 = k$; $U_1 = k$; $U_2 = k$;…
- La suite (V_n) telle que pour tout naturel n, $V_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

En effet, pour tout naturel n, on a : $V_{n+1} = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 3 \times \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2}\left[3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right] = \dfrac{1}{2} V_n$

Remarque

Pour démontrer qu'une suite donnée de termes non nuls est géométrique, il suffit de démontrer que le réel $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est une constante indépendante de n, alors si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$

On a évidement $U_{n+1} = qU_n$ et q est la raison de cette suite géométrique.

b) Expression explicite d'une suite géométrique

On admet la Propriété suivante :

Si (U_n) est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison non nulle q, alors pour tout naturel n, $U_n = U_0q^n$.

Remarques

On déduit de cette propriété que pour tous nombres entiers naturels n et k, on a :

$U_n = U_kq^{n-k}$.

En particulier, si une suite (U_n) a pour premier terme U_1, le terme général est : $U_n = U_1q^{n-1}$.

Exemples

- Soit la suite géométrique (U_n) de premier terme $U_1= 3$ et de raison q = 2, on a :$U_{10} = U_1\, q^{10-1}= 3\times (2)^9$.
- Soit la suite géométrique (U_n) de raison $q = \frac{-1}{2}$, et telle que $U_5 = 9$; On a $U_{100} = U_5\, q^{100-5}= 3\times (\frac{-1}{2})^{95}$.

c) Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

On admet la Propriété suivante :

Si S une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique (Un) de raison q différent de 1, alors :

- $S = 1^{er}\text{ terme } \times \frac{(1- q^{\text{nombre de terme}})}{1- q}$
- Cas particuliers ; $\begin{cases} S = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}; \text{ si le } 1^{er} \text{ terme est } U_0 \\ S = U_1 + U_1 + ... + U_n =; \ U_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{si le } 1^{er} \text{ terme est } U_1 \end{cases}$;

Exemples

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

  (U_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1^{er} terme $U_0 = 2$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 2\times\frac{1}{3^n}$.

  La somme des 20 premiers termes de cette suite est :

  $U_0 + U_1 + U_2 + ...+ U_{19} = U_0 \times\frac{(1- q^{20})}{1- q}$; $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^{19}} = 2 \times\frac{(1- (\frac{1}{3})^{20})}{1- \frac{1}{3}}$.
- Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_1 = 3$ et de raison q = 2.

  La somme des n premiers termes de cette suite est :$S = U_1 \times\frac{(1- q^n)}{1- q} = 3 \times\frac{(1- 2^n)}{1- 2} = 3(2^n - 1)$.

III. Limite d'une suite

1) **Convergence d'une suite**

Définition

Dire qu'une suite (Un) converge vers un réel ℓ , signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, On note alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

On admet la Propriété suivante :

Soit (U_n) une suite numérique définie par $U_n = f(n)$où f est une fonction numérique.
Si f a une limite en $+\infty$, alors (U_n) à une limite et on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} f(n)$.

Remarques

- On admet que si une suite a une limite, cette limite est unique.
- Si la fonction f n'a pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien conclure sur l'éventuelle limite de (U_n).

Exemples

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $\dfrac{-2n+1}{n+2}$ et f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+2}$.

  On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.
- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $\sin(\pi n)$ et g la fonction définie par $g(x) = \sin(\pi x)$.

  la fonction g n' a pas de limite en $+\infty$, par contre la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante , dont tous les termes sont nuls ; elle a pour limite 0.
- Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $\sqrt{n^4+3n^2+1}$ et hl a fonction définie par : $\mathbf{h}(x) = \sqrt{x^4+3x^2+1}$.

On a, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$.

2) Suites de références convergeant vers 0

- Les suites : $(\frac{1}{\sqrt{n}})$; $(\frac{1}{n})$; $(\frac{1}{n^2})$; $(\frac{1}{n^3})$;… sont des suites de limites 0.
- Les suites géométriques de raison strictement comprise entre -1 et 1 sont des suites de limite 0.

3) Suites de références divergeant vers $+\infty$

- Les suites : $(\sqrt{n})$; (n) ; (n^2) ; (n^3) ;… sont des suites de limites $+\infty$.
- Les suites géométriques (q^n) , avec q un réel strictement positif supérieur à 1 sont des suites de limite $+\infty$.

4) Opérations et limites

(U_n) ; (V_n) sont des suites réelles ; ℓ et ℓ' sont des réels :

Somme

Si (U_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (V_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(U_n + V_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\times$

Produit

Si (U_n) a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si (V_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(U_n \times V_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\times$

Quotient

Si (U_n) a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
Si (V_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$\pm\infty$
alors $(\frac{U_n}{V_n})$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\times$	$\times$

5) Théorèmes de comparaison

(U_n) ; (V_n) et (W_n) sont des suites ; ℓ est un réels.

- Si, à partir d'un certain rang : $U_n \geq V_n$ et si, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang : $U_n \leq V_n$ et si, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang : $|U_n - \ell| \leq V_n$ et si, $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

Théorème de gendarmes

Si, à partir d'un certain rang : : $V_n \leq U_n \leq W_n$ et si (Vn) et (Wn) convergent vers un même réel ℓ, alors (U_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

Savoir-faire

A. Applications

Calcul de termes d'une suite

Exercice. 1

Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5 dans chacun des cas suivants :

1. (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n : 5 \times 10^n + 2$.
2. (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{1+U_n}$.
3. (U_n) est la somme des inverses des n premiers naturels non nuls.

Solution

1. $U_n : 5 \times 10^n + 2$;
   On a : $U_1 = 5 \times 10^1 + 2 = 50 + 2 = 52$; $U_2 = 502$;
   $U_3 = 5002$; $U_4 = 50002$ et $U_5 = 500002$

2. $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{1+U_n}$;
   On obtient successivement ;
   $U_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$; $U_2 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$; $U_3 = \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{5}$; $U_4 = \dfrac{1}{1+\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{8}$ et $U_5 = \dfrac{1}{1+\frac{5}{8}} = \dfrac{8}{13}$.

3. Un est la somme des inverses des n premiers termes naturels non nuls.
   On a : $U_1 = \dfrac{1}{1} = 1$; $U_2 = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$; $U_3 = (\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2}) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$;
   $U_4 = (\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}) + \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{6} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{12}$; $U_4 = (\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}) + \dfrac{1}{5} = \dfrac{25}{12} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{137}{60}$

Remarque

on peut noter que pour tout naturel non nul : $U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{n+1}$

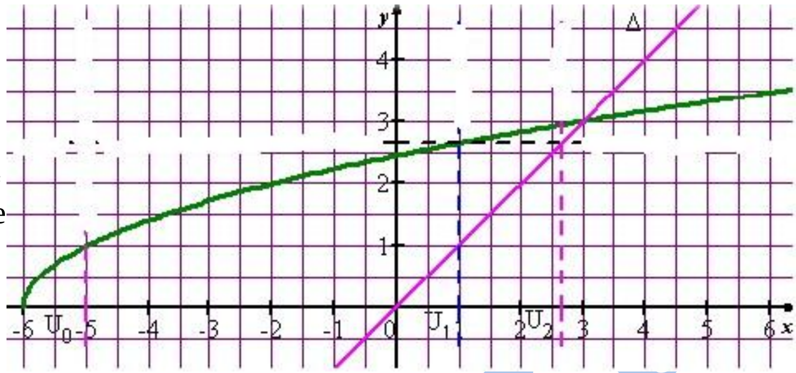
Représentation d'une suite

Exercice. 2

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -5$ et $U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}$

1. Représenter dans un même repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ la droite Δ d'équation $y = x$ et la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{6+x}$

2. Utiliser $\mathscr{C}$ et Δ pour représenter graphiquement les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
3. Faire une conjecture sur le sens de variation de (U_n), ses bornes éventuelles.
4. De quel nombre semble se rapprocher quand n devient grand ?



Solution

Il semble que la suite (U_n) soit croissante, donc minorée par son premier terme U_0 qui vaut -5.
De plus, il est raisonnable de penser qu'elle est majorée par 3 et que (U_n) ne cesse de se rapprocher de 3 quand n grandit ; plus précisément :
U_n est aussi proche de 3 que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

Suite majorée, minorée, bornée

Exercice. 3

Les suites proposées sont-elles bornées :

$U : n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} + 2$; $\quad V : n \mapsto (-1)^n$; $\quad W : n \mapsto \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Solution

- $U : n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} + 2$; U est définie sur $\mathbb{N}^*$; pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$; c'est-à-dire $2 \leq U_n \leq 3$,

  donc la suite est bornée par 2 et 3.

Remarque.

La valeur 3 est atteinte pour n = 1 et Un est aussi proche de 2 que l'on veut (sans jamais l'atteindre), pour que n soit suffisamment grand.

- $V : n \mapsto (-1)^n$ est définie sur $\mathbb{N}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $\begin{cases} V_n = -1 \text{ ; si } n \text{ est impair} \\ V_n = 1 \text{ ; si } n \text{ est pair} \end{cases}$

  Donc, la suite V est bornée par -1 et 1.

- $W : n \mapsto \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ est définie sur $\mathbb{N}$; pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq 0$; c'est-à-dire $W_n \geq 0$; de plus $\sqrt{n} \leq n+1$; donc ; $W_n \leq 1$, Donc, la suite W est bornée par 0 et 1.

Exercice. 4

Sens de variation d'une suite

Etudier le sens de variation de la suite U proposée :

$U : n \mapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$; $\quad U : n \mapsto (-5)^n$; $\quad U : n \mapsto \frac{3^n}{n+1}$; $\quad U_0 = 4$ et $U_{n+1} : n \mapsto U_n - 0,71$

$U : n \mapsto n^2 + n - 5$

Solution

- $U : n \mapsto n^3 - 4n^2 - 5n - 1$; pour tout naturel n ;
  $U_{n+1} - U_n = (n+1)^3 - 4(n+1)^2 - 5(n+1) - 1 - n^3 + 4n^2 + 5n + 1$;
  Or, $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$; donc ; $U_{n+1} - U_n = 3n^2 - 5n - 8$.

-1 est une racine du polynôme du second degré $x \mapsto 3x^2 - 5x - 8$, l'autre racine est donc $\frac{8}{3}$, d'où

$U_{n+1} - U_n = 3(n+1)(n - \frac{8}{3}) = (n+1)(3n-8)$;

$U_{n+1} - U_n$ est donc du signe de $3n - 8$, il vient

Si, $n \leq 2$, alors $U_{n+1} - U_n < 0$;

Si, $n \geq 3$, alors $U_{n+1} - U_n > 0$;

La suite U est strictement croissante à partir du rang 3.

- $U : n \mapsto (-5)^n$; la suite U est définie sur $\mathbb{N}$ et pour tout naturel n,
  - Si n est pair, alors $U_n > 0$
  - Si n est impair, alors $U_n < 0$

  U n'est pas monotone, même à partir d'un certain rang.

- $U : n \mapsto \frac{3^n}{n+1}$; la suite est définie sur $\mathbb{N}$ et à termes strictement positifs.

  Pour tout naturel n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = \frac{3(n+1)}{n+2} = \frac{3n+3}{n+2}$;

  Or, $\frac{3n+3}{n+2} > 1$, donc pour tout naturel n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, $U_{n+1} > U_n$ (car $U_n > 0$), cela prouve que U est strictement croissante.

- $U_0 = 4$ et $U_{n+1} : n \mapsto U_n - 0{,}71$; la suite U est définie sur $\mathbb{N}$ et pour tout naturel n,
  $U_{n+1} - U_n = -0{,}71$; donc $U_{n+1} - U_n < 0$. Par conséquent, U est strictement décroissante.

- $U : n \mapsto n^2 + n - 5$; la suite U est définie sur $\mathbb{N}$, d'autre par, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x - 5$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{N}$, donc il est de même de leur somme : $x \mapsto x^2 + x - 5$.
  Il en résulte qu U est strictement croissante.

Suite arithmétique

Exercice. 5

a) U est une suite arithmétique $U_{10} = 9$ et $U_{17} = 17{,}4$.

- Calculer U_{21}.
- Calculer la somme S telle que $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{21}$.

b) Soit U la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que : $U_4 + U_6 + U_8 + U_{10} = -8$, et $U_1 + U_4 = -3$.
Déterminer, sa raison r et son premier terme U_0.

Solution

a) Soit r la raison de la suite arithmétique ; $U_{17} = U_{10} + 7r$; or $U_{10} = 9$ et $U_{17} = 17{,}4$, donc $r = \frac{8{,}4}{7} = 1{,}2$

- $U_{21} = U_{17} + 4r = 17{,}4 + 4 \times 1{,}2 = 17{,}4 + 4{,}8$; donc $U_{21} = 22{,}2$.
- $S = U_{10} + U_{11} + \ldots + U_{21}$; S est donc la somme des onze termes consécutifs de la suite arithmétique U de U_{10} à U_{21}.
- On en déduit $S = 12 \times \frac{U_0 + U_{21}}{2} = 6 \times (9 + 22{,}2)$ d'où $S = 187{,}2$.

b) U est la suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0, donc pour tout naturel n ;

$U_n = U_0 + nr$. On en déduit :
$U_4 + U_6 + U_8 + U_{10} = 4U_0 + (4 + 6 + 8 + 10)r = 4U_0 + 28r$.
$U_1 + U_{11} = 2U_0 + (1 + 11)r = 2U_0 + 12r$.
Or ; $U_4 + U_6 + U_8 + U_{10} = -8$ et $U_1 + U_{11} = -3$

Donc, $\begin{cases} 4U_0 + 28r = -8 \\ 2U_0 + 12r = -3 \end{cases}$ la résolution du système donne $U_0 = \frac{3}{2}$ et $r = -\frac{1}{2}$.

Suite Géométrique

Exercice. 6

a) Soit U la suite géométrique de raison $\frac{-2}{3}$ et de premier terme U_0 tel que $U_0 = 9$.

Calculer S où $S = U_3 + U_4 + \ldots + U_{10}$.

b) U est une suite géométrique de raison positive, telle que $U_4 = 44$ et $U_{10} = 352$; calculer U_{13}.

Solution

a) S est la somme des huit termes consécutifs de la suite géométrique U, de U_3 à U_{10} ; la raison de cette suite est $\frac{-2}{3}$, donc $S = U_3 \dfrac{1-(\frac{-2}{3})^8}{1-(-\frac{2}{3})}$; Or $U_0 = 9$; donc $U_3 = 9 \times (\frac{-2}{3})^3$;

Donc, $S = 9 \times (\frac{-2}{3})^3 \times \dfrac{1-(\frac{-2}{3})^8}{1-(-\frac{2}{3})} = -9 \times \dfrac{2^3}{3^3} \times \dfrac{1-\frac{2^8}{3^8}}{1+\frac{2}{3}}$

$$= -9 \times \frac{2^3}{3^3} \times \frac{1}{3^7} \times \frac{3^8 - 2^8}{3+2} = -\frac{2^3}{3^8} \times \frac{3^8 - 2^8}{5} = \frac{-10088}{6561}$$

b) Soit q la raison de la suite géométrique U : $U_{10} = U_4 q^6$; donc $q^6 = \dfrac{U_{10}}{U_4}$

Or ; $U_4 = 44$ et $U_{10} = 352$, donc $q^6 = \dfrac{352}{44} = 8$

D'autre part, $U_{13} = U_{10} q^3 = 352 q^3$; on a :

- $q^6 = 8$, soit $(q^3)^2 = 8$;
- $q \geq 0$, donc $q^3 \geq 0$

On en déduit : $q^3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

Finalement : $U_{13} = 352 \times 2\sqrt{2}$; soit $704\sqrt{2}$.

Remarque : $q^3 = \sqrt{8} = (\sqrt{2})^3$; la fonction $x \mapsto x^3$ étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit : $q = \sqrt{2}$.

Limite d'une suite

Exercice. 7

A l'aide des opérations sur les suites, déterminer, la limite de la suite U proposée :

a) $U:\ n \mapsto -2+\sqrt{n}$; b) $U:\ n \mapsto \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$; c) $U:\ n \mapsto -5n^2 - n$; d) $U:\ n \mapsto 3^n + (\dfrac{-1}{3})^n$;

e) $U:\ n \mapsto \dfrac{(-0,5)^n}{7^n+6}$; f) $U:\ n \mapsto \dfrac{n^3}{(0,7)^n}$

Solution

a) $U:\ n \mapsto -2+\sqrt{n}$; cette suite est définie sur $\mathbb{N}$; c'est la somme de la suite constante $n \mapsto -2$ et la suite de référence : $n \mapsto \sqrt{n}$ qui diverge vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

b) $U:\ n \mapsto \dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}$; U est définie seulement su r $\mathbb{N}^*$, on sait que , $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$,

Donc , $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\sqrt{n} = +\infty$.

L'inverse d'une suite de limite $+\infty$, étant une suite de limite nulle, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

c) $U:\ n \mapsto -5n^2 - n$; U est définie sur $\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5n^2) = -\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$;

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ (la somme de deux suites de limite $-\infty$ a pour limite $-\infty$).

d) $U:\ n \mapsto 3^n + (\dfrac{-1}{3})^n$; U est définie sur $\mathbb{N}$, comme $\left|\dfrac{-1}{3}\right| < 1$; la suite géométrique $n \mapsto (\dfrac{-1}{3})^n$ a pour limite 0 ; d'autre part ; 3 > 1, donc la suite géométrique $n \mapsto 3^n$ a pour limite $+\infty$, on peut conclure $\lim\limits_{n\to\pm} = \pm\infty$

e) $U:\ n \mapsto \dfrac{(-0,5)^n}{7^n+6}$; U est définie sur $\mathbb{N}$, -1 < -0,5 < 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,5)^n = 0$;

7 > 1 ; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (7^n + 6) = +\infty$.

De plus, on sait que le quotient d'une suite de limite 0 par une suite de limite $+\infty$ est une suite de limite 0.
On obtient donc finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} U = 0$

f) U : $U:\ n \mapsto \dfrac{3^n}{(0,7)^n}$ est définie sur $\mathbb{N}$, on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

d'autre part, comme , $0 < 0,7 < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,7)^n = 0$

la suite U est donc le quotient d'une suite de limite $+\infty$ par une suite de limite 0.
Pour conclure il suffit, de remarquer que l'on a pour tout n de $\mathbb{N}$, $(0,7)^n > 0$,
On peut alors affirmer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U = +\infty$.

B. Exercices

1. Le plan est muni du repère (O ; I ; J) dans chacun des cas suivants, représenter sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de la suite (U_n)

a) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + 2\sqrt{U_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{U_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

c) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n^2 - 3 \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

2. Soit (V_n) la suite de terme général $V_n = 2 + n(-1)^n$

Calculer les 5 premiers termes de cette suite et représenter ces termes sur un axe.

3. Minorer et majorer aux mieux la suite

$U : n \mapsto \dfrac{1}{n}$.

4. U est la suite définie pour tout naturel n par : $U_n = n^2 - 2n + 4$.

Montrer que U est minorée par -5.

5. Montrer que la suite U définie pour tout naturel possible de choisir U_0 de telle sorte que U soit une suite constante.

a) $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 8$; b) $U_{n+1} = -U_n^2 + 2U_n + 1$

c) $U_{n+1} = \dfrac{3 + U_n}{1 - U_n}$

9. Etudier la monotonie de la suite U telle que, pour tout $n \geq 1$; $U_n = \dfrac{2^n}{n}$.

10 Dans chacun des cas suivants, démontrer que (Un) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 4 - 3(n-1)$;

b) $\begin{cases} U_5 = -1 \\ 5U_{n+1} = 5U_n - 2 \ ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

11 Dans chacun des cas suivants, préciser si la suite (U_n) est arithmétique, géométriques ou ni l'une ni l'autre.

a) $U_n = (-1)^n$; b) $U_n = 2^n - 3^n$; c) $U_n = -3(n+2)$

d) $U_n = (-3)^{n+2}$; e) $U_n = (-3)^n + 2$; f) $U_n = 10^{-n}$

12 U est la suite définie par $U_0 = 2$ et pour tout naturel n par $U_n = U_{n+1} - 5$.

1. Démontrer que U est une suite arithmétique et préciser sa raison.
2. Déterminer U_n explicitement en fonction de n .

n par : Un = $\frac{1}{n+2}$ est strictement décroissante.

6. Montrer que la suite U définie pour tout naturel n par : Un = $\frac{2n+1}{n+3}$ est strictement croissante.

7. Etudier la monotonie de chaque suite U et V définie ci-dessous

a) $U_n = \frac{2n+5}{n+1}$; b) $V_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

a) $U_n = 2^n 3^{n+1}$; b) $V_n = (n-3)^2$;

a) $U_n = \frac{n^2+1}{2n}$; b) $\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = V_n - 3 \end{cases}$

8. U est la suite définie par U_0 et pour tout naturel n par la récurrence ci-dessous. Est-il

15 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + 10U_n ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Calculer U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5.

Démontrer que pour tout naturel n non nul, U_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique que l'on déterminera.

En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

16 a ; b ; c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de plus :

$\begin{cases} a+b+c = 19 \\ 2a+b-c = 5 \end{cases}$; Calculer a ; b ; c.

3. Calculer $S_n = U_3 + U_4 + \ldots + U_n$ et déterminer n pour que $S_n = 6456$.

13 U est la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout naturel n, $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$.

1. Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 ; U4 ; U_5.

Si $U_n \neq 0$, on pose $t_n = \frac{1}{U_n}$, calculer : t_0 ; t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5.

2. Montrer que la suite est une suite arithmétique.
3. Déduisez une expression de U_n en fonction de n.

14 Dans chacun des cas suivants, démontrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = (2)^{n+3}$; b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = 4^{n-1}$;

c) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = \frac{3^n}{24^n}$; d) $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n = \frac{2^{n+2}}{5^n}$

17 En utilisant les théorèmes de comparaison, déterminer la limite de la suite U proposée.

a) $n \mapsto \frac{(-1)^n}{n}$; b) $n \mapsto \frac{1}{n^2}$; c) $n \mapsto \sqrt{n^4+3}$

d) $n \mapsto \sqrt{4n^2+1} - n$; e) $n \mapsto 2n + \cos n^2$;

f) $n \mapsto \frac{-n5}{n^2 - \pi}$

18 U est la suite définie sur par $U_n = (\frac{n}{10} - 1)^n$

1. Calculer les onze premiers termes de la suite U. Quelle conjecture est-on incité à formuler ?

Démontrer que U a pour limite $+\infty$.