Chapitre **11** ☛ # Transformations

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

A - Isométries du plan

A-1) Définitions et propriétés

On appelle isométrie toute transformation du plan telle que pour tous les points M et N d'images M'et N' on a : MN = M'N'.

Propriétés

P1 Toute isométrie conserve

- l'alignement des points
- le parallélisme des droites
- l'orthogonalité des droites
- la mesure des angles
- le barycentre des points pondérés
- les longueurs
- les aires

Théorème

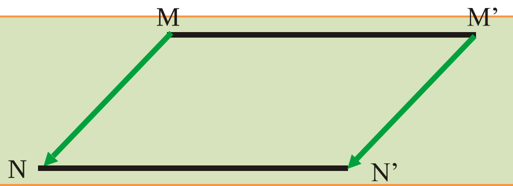
Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que : AB = A'B' ; BC = B'C' ; AC = A'C'.
Il existe une isométrie et une seule qui applique A sur A', B sur B' et C sur C'.

A-2) Rappel

2-1) Translation

a) Propriétés caractéristiques d'une translation

Soit ***f*** une application du plan dans lui-même, ***f*** est une translation si est seulement si, pour tous M et N d'images respectives M' ; N' ;
on a : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$;



Démonstration

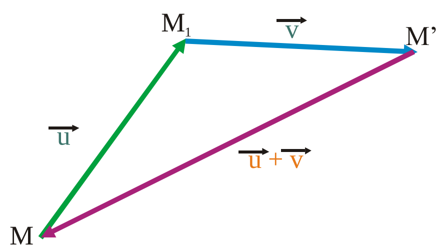
Si ***f*** est une translation pour tous points M, N d'images respectives M' etN' on a **:** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$.
Réciproquement, on suppose que pour tous points M ; N d'images respectives M' et N', on a :
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$, démontrons que f est une translation .
Soit A un point et A' son image par ***f***.
Pour tout point M du plan on a : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}$ donc $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$ et ***f*** est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

b) Composée de deux translations

Propriété : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, la composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Démonstration

Soit M un point du plan, M_1 son image par $t_{\vec{u}}$ et M' ; l'image de M_1 par $t_{\vec{v}}$.
On a : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1M'}=\vec{u}+\vec{v}$.
Ainsi, $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est l'application qui à tout point



M associe le point M’ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$.,
$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ est donc la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Remarque

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, donc $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.
  On dit que la composée des translations est commutative (Fig. 1)

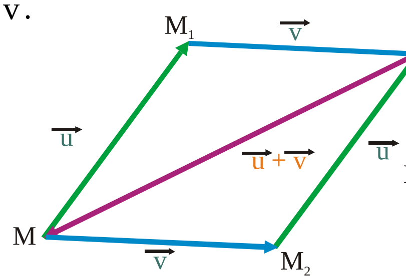


Fig.1

- Si $\vec{v} = -\vec{u}$ on obtient : $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = Id$.
  Cette relation caractérise les bijections réciproques.
- Toute translation est une transformation du plan, la transformation réciproque de $t_{\vec{u}}$ est $t_{-\vec{u}}$.

Exemple

Sur la figure.2 :

$t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$;

$t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{DC}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$;

$(t_{\overrightarrow{AD}})^{-1} = t_{\overrightarrow{CB}}$.

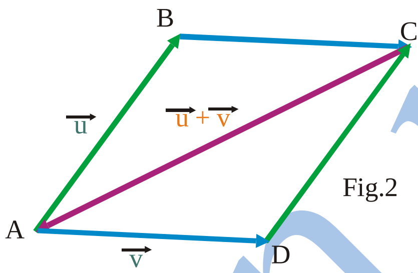


Fig.2

Expression analytique d’une translation

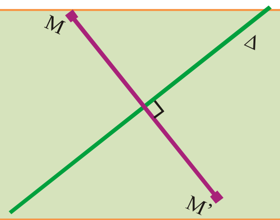
Le plan est muni du repère (O ; $\vec{I}$; $\vec{J}$) ; soit t la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; M(x ; y) un point du plan et M’(x’ ; y’) son image par t ; on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow$ x’ – x = a et y’ – y = b.

L’expression analytique de la translation du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est telle que : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

2.2) Symétries orthogonales

Propriétés caractéristiques d’une symétrie orthogonale

M’ est le est le symétrique de M par rapport à (Δ), si et seulement, si Δ = Med(M ; M’).



Composée de deux symétries orthogonales d’axe parallèles

Propriété

Soit (Δ) et (Δ’) deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O’ projeté orthogonal de O sur (Δ’) ; la composée $S_1 \circ S_2$ des symétries orthogonales d’axes respectifs (Δ) et (Δ’) est la translation t de vecteurs $2\overrightarrow{OO'}$.

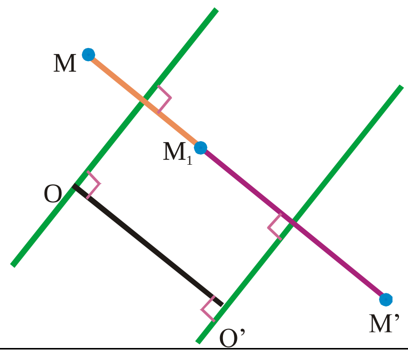
Démonstration

Soit M un point M_1 son symétrique par rapport à (Δ), M’ est le symétrique de M_1 par rapport à (Δ’).
H et H’ sont les projetés orthogonaux de M sur (Δ) et (Δ’).

Ona : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'}$

$= 2\overrightarrow{MM_1} + 2\overrightarrow{M_1H'}$

$= 2\overrightarrow{HH'} = 2\overrightarrow{OO'}$



Donc ; $S_{(\Delta)}$ o $S_{(\Delta')}$ = $t_{2\overrightarrow{OO'}}$

Remarques

- Lorsque les axes (Δ) et (Δ') sont confondus on obtient $S_{(\Delta)}$ o $S_{(\Delta')}$ = I_d.
- La transformation réciproque de $S_{(\Delta)}$ est $S_{(\Delta')}$.
- Les transformations $S_{(\Delta)}$ o $S_{(\Delta')}$ et $S_{(\Delta')}$ o $S_{(\Delta)}$ sont réciproques l'une de l'autre.

Décomposition d'une translation

Propriété

Soit une t translation de vecteur non nul $\vec{u}$.

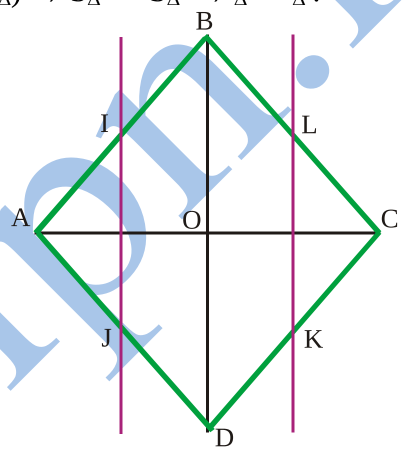
Pour toute droite de vecteur normal $\vec{u}$, il existe une droite et une seule telle que : $t_{\vec{u}}$ = S_Δ o $S_{\Delta'}$.

Démonstration

- Existence : soit Δ' l'image de Δ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

  D'après l'étude précédente Δ vérifie : $t_{\vec{u}}$ = $S_{\Delta'}$ o S_Δ
- Unicité : soit Δ'' une droite telle que : $t_{\vec{u}}$ = $S_{\Delta''}$ o S_Δ ; montrons que Δ'' et Δ' sont confondues.

  On a = $S_{\Delta''}$ o S_Δ = $S_{\Delta'}$ o S_Δ ⇒ ($S_{\Delta''}$ o S_Δ) o ($S_{\Delta'}$ o S_Δ) ⇒ $S_{\Delta''}$ = $S_{\Delta'}$ ⇒ ${}_{\Delta''}$ = ${}_{\Delta'}$.
  Donc, les droites (Δ') et (Δ'') sont confondues.



Exemples

Soit ABCD un losange, de centre O.
I ; J ; K et L les milieux respectifs des côtés [AB] ; [AD] ; [CD] et [CB].
On a :

$t_{\overrightarrow{AD}}$ = $S_{(BD)}$ o $S_{(IJ)}$;

$t_{\overrightarrow{AO}}$ = $S_{(KL)}$ o $S_{(BD)}$;

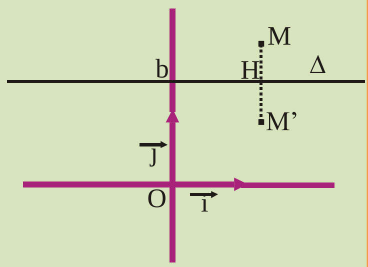
$t_{\overrightarrow{AC}}$ = $S_{(KL)}$ o $S_{(IJ)}$.

Expression analytique des symétries orthogonales particulières

Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{I}$; $\vec{J}$) , soit S une symétrie orthogonale d'axe (Δ). M(x ; y) un point du plan, M'(x' ; y') son image par s. On propose de déterminer l'expression analytique de s dans trois cas particuliers :

1) **(Δ) parallèle au axe des abscisses**

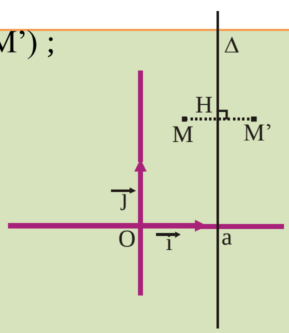
Soit (Δ) la droite d'équation : y = b et M
le point d'intersection de la droite (Δ) avec (MM') ; les points M et M' ont même abscisse et H le milieu de [MM']. Donc,
x = x' et y + y' = 2b.
L'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) : y = b est telle que : $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2b \end{cases}$



2) **(Δ) parallèle à l'axe des ordonnés** : Soit (Δ) la droite

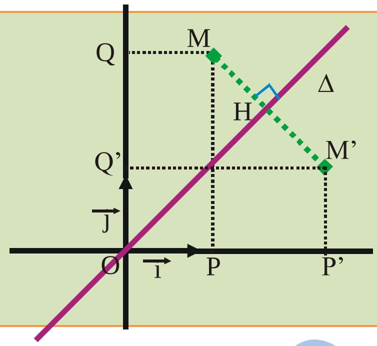
Soit (Δ) la droite d'équation x = a, et H le point d'intersection de (Δ) et (MM') ;
les points M et M'ont même ordonnée et H est le milieu de [MM'].Donc,
l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe (Δ)
d'équation : x = a est telle que :

$$\begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = y \end{cases}$$



3) **(Δ) est la première bissectrice du repère.**

(Δ) est la droite d'équation y = x ; soient P ; Q ; P' ; Q' les projetés orthogonaux des points M et M' sur les axes du repère.
Les images respectives par s des points P et Q sont les points P' et Q'. Donc, x' = y et y' = x.
L'expression analytique de la symétrie orthogonale autour de 1^{ere} bissectrice est telle que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$



2.3) Rotations

Composée de symétries d'axes sécants

Propriété

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La composée $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.

Démonstration

Le point O est invariant par $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$,
Soit M un point distinct de O. M1 son symétrique par rapport à (Δ').

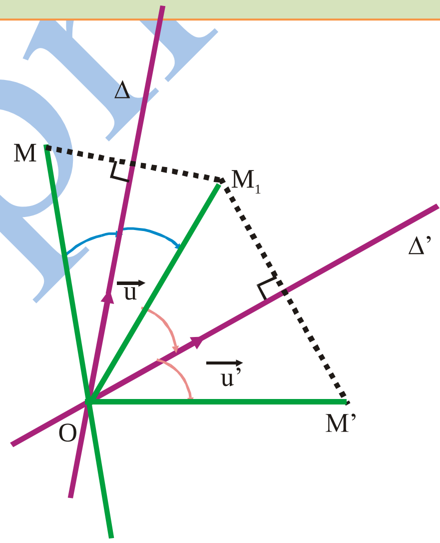
Démontrons que : $\begin{cases} OM = OM' \\ \left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right) = 2\left(\vec{u}\ ;\ \vec{u'}\right) \end{cases}$

On a : OM= OM_1 et OM_1 = OM' ; donc OM = OM'.

$\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OM_1}\right) + \left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\ \overrightarrow{OM'}\right)$

$= 2\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) + 2\left(\overrightarrow{OM_1}\ ;\ \vec{u'}\right)$

$= 2\left(\vec{u}\ ;\ \vec{u'}\right)$



Remarque

$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est la rotation de centre O et d'angle $2\left(\vec{u}\ ;\ \vec{u'}\right)$.

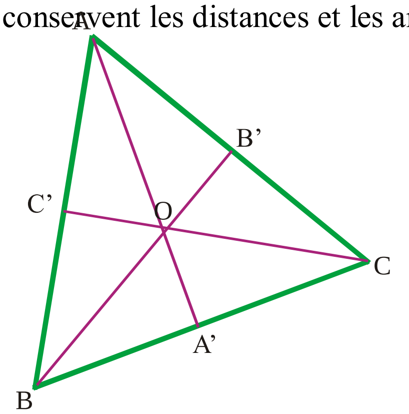
- Les transformations $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ et $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$ sont donc réciproques l'une de l'autre.
- Si (Δ) et (Δ') sont perpendiculaires $2\left(\vec{u}\ ;\ \vec{u'}\right)$ = π et $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est la symétrie de centre O.
- On déduit la décomposition d'une rotation que les rotations conservent les distances et les angles orientés.

Exemple

ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O ; soient A' ; B' C' les milieux respectifs des côtés [BC] ; [CA] ; [AB].

On a : $S_{(AB)} \circ S_{(AC)} = r_{\left(A;\ \frac{-2\pi}{3}\right)}$; $S_{(CB)} \circ S_{(CC')} = r_{\left(C;\ \frac{\pi}{3}\right)}$;

$S_{(CC')} \circ S_{(AA')} = S_{(BB')} \circ S_{(CC')} = r_{\left(O;\ \frac{2\pi}{3}\right)}$.



$S_{(BB')} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)} \circ S_{(BB')} = r(B; \frac{-\pi}{3})$.

Propriétés caractéristiques

Soit ***f*** une application du plan dans lui même et α un angle non nul.
f est une rotation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N'

On a : MN = M'N' et $(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{M'N'}) = \alpha$.

Démonstration guidée

On suppose que ***f*** est une rotation d'angle α. Démontrons que pour tous points M ; N d'images respectives M' et N'.

On a : $(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{M'N'}) = \alpha$. Soit O le centre de la rotation ***f*** ;

- Vérifier que $(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{MN'})$
- Justifier que : $(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{M'N'})$ sont opposés.

  (On pourra utiliser la conservation des angles par une rotation). Conclure

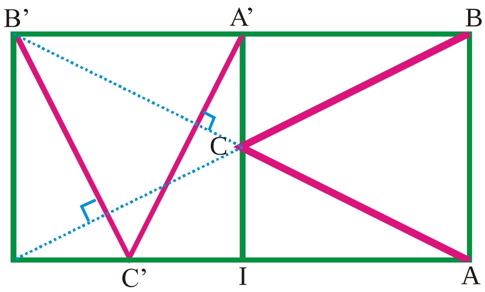
Réciproquement, On suppose que ***f*** est une application telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' on a : MN = M'N' et $(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{M'N'}) = \alpha$;

- Démontrons que ***f*** est une rotation d'angle α.
- Démontrons maintenant que ***f*** admet un point invariant. Soit M un point et M' son image par ***f***. O le point tel que le triangle OMM' soit isocèle en O et $(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{OM'}) = 0$. Soit O' l'image de O par ***f***.
- Démontrons que O'M' = OM' et $(\overrightarrow{O'M'} ; \overrightarrow{OM'}) = 0$ (on pourra introduire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ à l'aide de la relation de Chasles sur les angles orientés).

Exemple

Sur la figure ci-contre les images des points A ; B et C par la rotation $r_{(I ; \frac{\pi}{2})}$ sont respectivement A' ; B' et C' , si $\hat{\gamma}$ est l'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$.

On a donc ; $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{B'C'}) = (\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CA}) = \hat{\gamma}$.



A-3) Exemples de composées d'isométries

a) Composition de deux rotations r_1 et r_2 de même centre O et d'angles α_1 et α_2 est une rotation r_3 de centre O et d'angle orienté $\alpha_1 + \alpha_2$.

$r_{1(O;\alpha 1)} \circ r_{1(O;\alpha 2)} = r_{3(O;\alpha 1+\alpha 2)}$

b) Composition d'une rotation et d'une translation

P_2 : La composée d'une rotation r d'angle orienté non nul α et d'une translation est une rotation r' d'angle orienté α .

c) Composée de deux rotations de centres différents (distincts)

P_3 La composée de deux rotations r et r' de centres distincts et d'angles respectifs α et α' est :

- une rotation d'angle $\alpha + \alpha'$ si $\alpha + \alpha' \neq \hat{0}$;
- une translation si $\alpha + \alpha' = \hat{0}$;

d) Décomposition d'une rotation

P_4 : Soit r une rotation de centre K et d'angle α ; O un point distinct de K. Il existe deux translations t_1 et t_2 et une rotation r' de centre O et d'angle α telles que :
$r = t_1 \circ r'$; $r = r' \circ t_2$

B – Similitudes

B-1) Définitions et propriétés

Définition

K étant un nombre strictement positif, on appelle similitude de rapport K, toute transformation du plan telle que :
Pour tous les points M et N d'image M' et N' on a M'N' = kMN.

P_1 Toute similitude est une composée d'une isométrie et d'une homothétie.

Toute similitude conserve :	**Toute similitude multiplie**
• l'alignement des points • le parallélisme des droites • l'orthogonalité des droites • la mesure des angles • le barycentre des points pondérés	• Les longueurs par le rapport • Les aires par le carré du rapport

Théorème

Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$.
Il existe une similitude et une seul qui applique A sur A, B sur B' et C sur C'.

B-2) Exemples de composition de similitudes

a) Composition de deux similitudes de même centre

La composée de deux homothéties de même centre Ω et de rapport respectifs k1 et k2 est une homothétie de centre Ω et de rapport $k_1 \times k_2$.

b) Composition d'une homothétie et d'une translation

P3 La composée de deux homothéties de rapport k et d'une translation est une homothétie de rapport k.

c) Composition de deux homothéties de centres distincts

La composée de deux homothéties de centre distincts et de rapport k respectifs k_1 et k_2 est :
- une homothétie de rapport $k_1 \times k_2$ si $k_1 \times k_2 \neq 1$
- une translation si $k_1 \times k_2 = 1$

d) Décomposition d'une homothétie

P4 Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport $k \neq 1$; soit O un point distinct de
Il existe deux translations t_1 et t_2 et une homothétie h' de centre O et de rapport k telles que :
$h = t_1 \circ h'$ $h = h' \circ t_2$

Savoir-faire

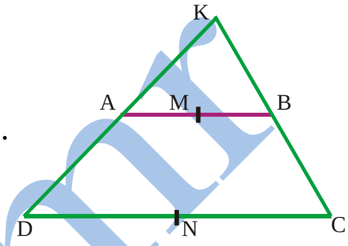
A. Applications

Démonstration des propriétés

Exercice 1

On considère un trapèze ABCD tel que (AB) / / (CD). On désigne par K le point d'intersection des droites (AD) et (BC).

Montrer que le milieu M de [AB], le milieu N de [CD] et K sont alignés.



Hypothèse :

ABCD un trapèze ; K = (AD) $\cap$ (BC) ; M milieu de [AB] et N milieu de [CD].

Conclusion

K, M et N sont alignés

Solution

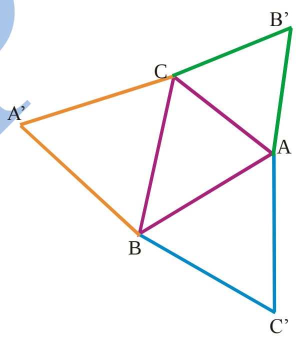
A ; B ; C et D sont quatre points tels que (AB) / / (DC) et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, Il existe une homothétie h et une seule qui transforme A en D et B en C. le centre de cette homothétie est K, l'image par h du milieu M de [AB] et le milieu N de [DC].

Et puisque un point et son image par h et le centre de h sont alignés, alors, K, M et N sont alignés.

Exercice 2

On considère un triangle quelconque ABC sur les côtés (AB) ; (BC) et (AC) extérieurement, on construit les triangles équilatéraux ABC' et BCA' et CAB'.

Montrer que : AA' = BB' = CC'.



Hypothèse :

ABC un triangle ; ABC' un triangle équilatéral ; BCA' un triangle équilatéral ; CAB' un triangle équilatéral

Conclusion :

AA' = BB' = CC'

Solution

On considère la rotation r de centre A et d'angle $\left(\overrightarrow{AC'};\overrightarrow{AB}\right)$.

Par r B est l'image de C', B' est l'image de C ; [BB'] est donc l'image de [CC'], on en déduit que : BB' = CC'.

La rotation r' de centre B et d'angle $\left(\overrightarrow{BC'};\overrightarrow{BA}\right)$, permet de montrer que CC' = AA'.

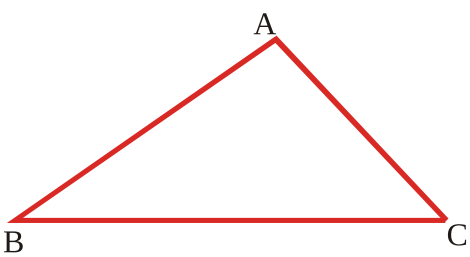
Construction des figures

Exercice 1

Figure auxiliaire satisfaisant à toutes les conditions sauf une.

On donne le triangle ABC. Construire un carré MNPQ tel que :

1) M$\in$[AB] ; 2) N$\in$[AC] ; 3) (PQ) = (BC)



Solution

Recherche d'une démarche ;

- Construire un carré qui satisfait à 2 des 3 conditions est simple, on peut trouver une infinité de solutions.
  Le problème consiste alors, à trouver parmi ces constructions celle ou celles qui satisfait à la 3ème condition.
- Construisons d'abord un carré EFGH qui satisfait au condition (1) et (2) : E $\in$[AB] et (GH) = (BC).
- Soit $\boldsymbol{f}$ une homothétie de centre B ;

f(E) = E' $\in$ [AB] ; f(GH) = (G'H') = (BC).
Toutes les homothéties de centre B transforment EFGH en un carré E'F'G'H' qui satisfait aux conditions (1) et (3) .
Il suffit d'en choisir celles qui transforment le carré EFGH en un carré qui satisfait à la 2$^{\text{ème}}$ condition.

Construction

- Sur la droite (AB) marquer un point E $\neq$ B ; tracer la perpendiculaire à (BC) passant par E ; elle coupe (BC) en (H). Sur (BC) placer un point G tel que GH = EH ;
- On désigne par N le point d'intersection de (BF) et (AC) ; Construire le carré MNPQ image de EFGH par l'homothétie de centre B qui applique F en N.

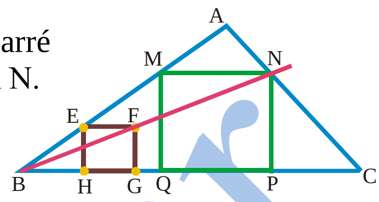


Image des supports

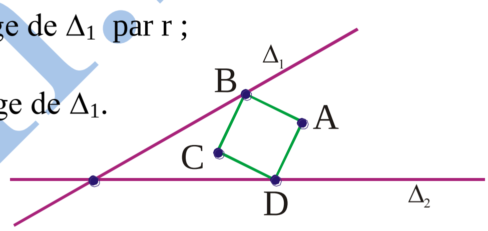
Exercice 2

On donne deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2, au point qui n'appartient ni à Δ_1 ni à Δ_2 .
Construire un carré ABCD tel que : B $\in \Delta_1$; D $\in \Delta_2$.

Solution

Recherche d'une démarche

Réalisons une figure solution (esquisse). Considérons la rotation r de centre A et d'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)$ et construisons l'image de l'esquisse par cette rotation. Soit Δ'_1 l'image de Δ_1 par r ;
on peut remarquer que D est le point d'intersection de Δ_2 et Δ'.
En effet D et l'image par r de B point de Δ_1, D appartient donc à l'image de Δ_1.



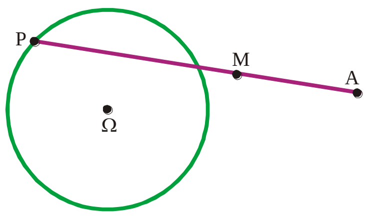
Construction

- Construire l'image Δ'_1 de Δ_1 par la rotation $r_{(A;\frac{\pi}{2})}$. On désigne par D le point d'intersection de Δ_2 et Δ'_1.
- Construire le carré direct ABCD.

Recherche des lieux géométriques

Exercice 1

On donne le point A et le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon r.
P étant un point de $\mathscr{C}$, on désigne par M le milieu de [AP].
Déterminer le lieu géométrique de M lorsque P décrit $\mathscr{C}$.



Solution

Analyse

- Considérons l'homothétie h de centreet de rapport $\frac{1}{2}$.
- Désignons par $\mathscr{C}$' l'image du cercle $\mathscr{C}$ par cette homothétie ; lorsque P décrit $\mathscr{C}$; M décrit $\mathscr{C}$' l'image de $\mathscr{C}$ par h.

Construction

Soit O' le milieu de [OA] ; construire le cercle de centre O' et de rayon $\frac{r}{2}$; c'est l'image de $\mathscr{C}$ par h.

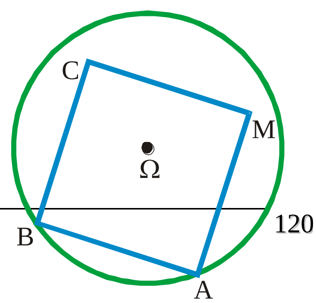
Exercice 2

On donne le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon r et le point A de ce cercle.
B désignant un point de $\mathscr{C}$ distinct de A.On construit le carré indirect ABCM.
Déterminer le lieu géométrique de M lorsque B décrit le cercle $\mathscr{C}$.

Solution

Analyse :

Considérons la rotation de centre A et d'angle droit indirect.



Lorsque B décrit $\mathscr{C}$, son image M décrit le cercle $\mathscr{C}$ ‘, image de $\mathscr{C}$ par r.

Construction

- Construire l’image O’ de O par la rotation r de centre A et d’angle droit indirect.
- Construire le cercle $\mathscr{C}$ ‘de centre O’ et de rayon r, c’est l’image du cercle $\mathscr{C}$ par la translation r.

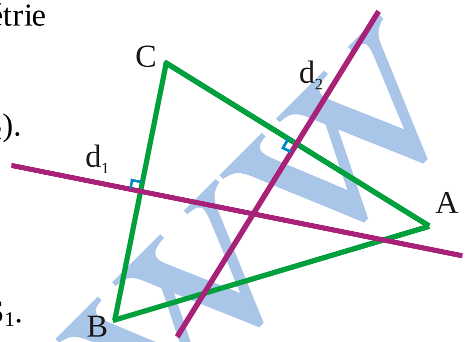
B. Exercices

1. La rotation r est donnée par son centre O et un point A et son image A’.
Soit B un point de $\mathscr{C}_{(O\,;\,OA)}$ et C un point de (OA).
Construire les images B’ et C’ des points B et C, Justifier.

2. On donne les points A et B . construire les centres des rotations r_1 et r_2 appliquant A sur B.
Et d’angles respectifs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

3. On donne les droites parallèles (d) et (d’) et un point O. Soit r la rotation de centre O et d’angle orienté $\frac{\pi}{2}$.
Construire un point M de (d) dont l’image par la rotation r appartient à la droite (d’).

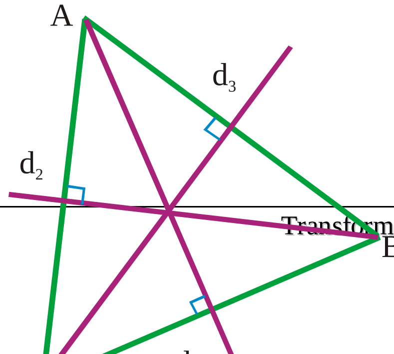
4. Soit le triangle ABC, On appelle (d_1) la médiatrice de [BC] et (d_2) la médiatrice de [AC].
Soit S_1la symétrie orthogonale d’axe (d_1) ; S_2 celle d’axe (d_2).
1) Construire l’image A’B’C’ du triangle ABC par S_2oS_1.



2) Démontrer que les points A ; A’ ; B ; B’ ; C ; appartiennent à un même cercle.
3) Quelle est la nature du triangle ABC pour que S_2oS_1 soit une symétrie centrale.

5. ABCD est un quadrilatère quelconque. Soient S_S ; S_B ; S_C les symétries centrales de centres respectifs A ; B et C.
Déterminer l’image du sommet D par S_AoS_B o S_C

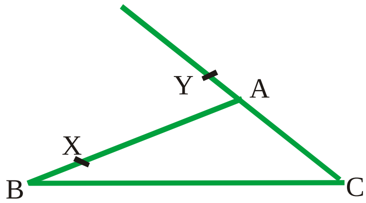
6. ABC est un triangle équilatéral, (d_1) ; (d_2) et (d_3) les



soient S_1 ; S_2 et S_3 les symétries orthogonales d’axes respectifs (d_1) ; (d_2) et (d_3).
Démontrer que :S_1oS_2 o S_3 est une symétrie orthogonale, préciser son axe.

7. ABC est un triangle rectangle en A. A’ ; B’ et C’ sont les milieux respectifs des côtés BC] ; [CA] et [AB].
Trouver une translation t telle que :
$S_{[A'C']}oS_A$= t o $S_{[A'B']}$.
ABC est un triangle rectangle en A. A’ ; B’ et C’ sont les milieux respectifs des côtés BC] ; [CA] et [AB].
Trouver une translation t telle que :
$S_{[A'C']}oS_A$= t o $S_{[A'B']}$.

8. ABC est un triangle quelconque.
X un point de [AB], sur la demi-droite [CA), on marque le point Y tel que CY =AX.
Déterminer une translation t, une symétrie orthogonale S et une rotation r telle que : l’image

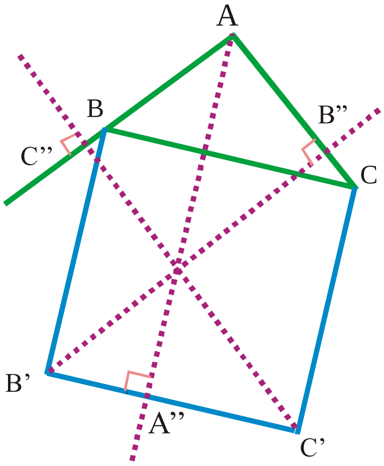


de [AX] par r o t et par S o t soit [YC].
Construire ensuite l’image du triangle ABC par r o t et par S o t.

9. (L_1) et (L_2) sont deux droites sécantes, en B non perpendiculaires. A est un point de (L_1) et (D un point de (L_2).
Tous deux distincts de B. la perpendiculaires à (L_2) passant par A coupe (L_2) en C ; la, perpendiculaire à (L_1) passant par D coupe (L_1) en E.
1) Démontrer que les triangles ABC et DBE sont semblables.
Soit ***f*** la similitude qui applique A sur D ; B en B et C en E.
2) Soit (Δ) la bissectrice de l’angle $\widehat{ABC}$. A’ et C’ les symétriques respectifs de A et C par rapport à (Δ).
Démontrer qu’il existe une homothétie de centre B qui applique A’ sur D. Soit h cette homothétie.

médiatrices
respectives
des côtés [BC] ;
[CA] et [AB]

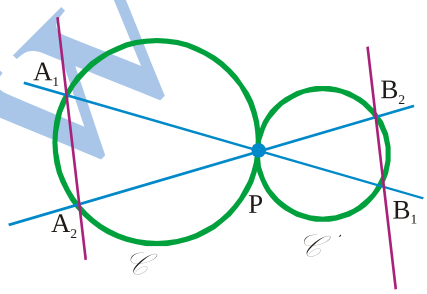
10 ABC est un triangle quelconque, sur le côté [BC] et extérieurement on construit un rectangle AB'C'C.



On désigne par B'' ; C'' et A'' les projetés orthogonaux de B sur [AC] de C sur [AB] et de A sur [B'C'].
Montrer que les droites (B'B'') ; (C'C'') et (AA'') sont concourantes.

11 Démontrer que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle ABC par rapport aux milieux des côtés sont sur le cercle circonscrit à ce triangle.

12 On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' tangents en P.
Par P on trace deux droites (d_1) et (d_2) qui recoupent $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$ ' respectivement en A_1 ; B_1 ; A_2 ; B_2.

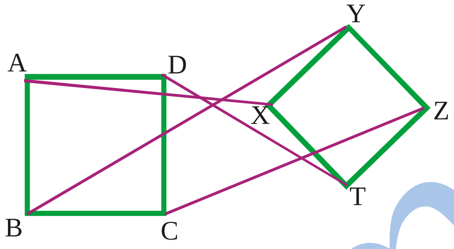


Démontrer que les droites (A_1A_2) et (B_1B_2) sont parallèles.

13 Les points A ; A ; B ; C ; A' et B' sont tels que OAB est un triangle équilatéral direct.
OA'B' est un triangle équilatéral direct,

3) S_Δ désignent la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
Démontrer que h o S_Δ = $\boldsymbol{f}$.
M étant un point quelconque du plan, construire l'image de M par S.
4) Construire l'image par $\boldsymbol{f}$ du triangle ABE.

14 ABCD et XYZT sont deux carrés ; ABCD est direct ; XYZT est indirect.

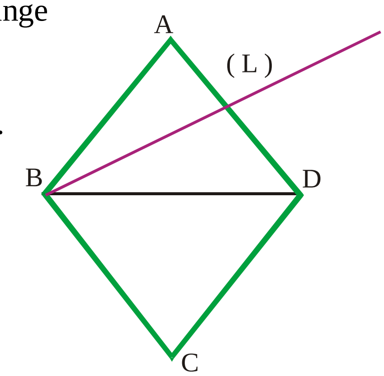


Démontrer que les milieux de [AX] ; [BY] ; [CZ] et [DT] sont alignés.

15 Soit (d_1) et (d_2) sont deux droites parallèles A est un point de la bande délimitée par (d_1) et (d_2).
Construire un cercle tangent à (d_1), à (d_2) et passant par A.

16 (d_1) et (d_2) étant deux droites sécantes, P un point qui n'appartient ni à (d_1) ni à (d_2).
Construire les points B de (d_1) et C de (d_2) tels que P soit le milieu de [AB].

17 On donne une droite (L) et un point A ;
On considère un losange ABCD de sens direct tel que
AB = BD et B$\in$ (L).
Quel est le lieu géométrique du point C lorsque B décrit (L).



18 On donne le cercle $\mathscr{C}$ et un point A de $\mathscr{C}$.
B désignant un point de $\mathscr{C}$ distinct de A.
On construit le carré ABCD de centre O.
Quel est le lieu géométrique du centre O du carré lorsque B décrit le cercle $\mathscr{C}$.

OA = OA’ et OBCA’ est un parallélogramme.
Démontrer que ACB’ est équilatéral.