Chapitre **12** ☛ # Dénombrement

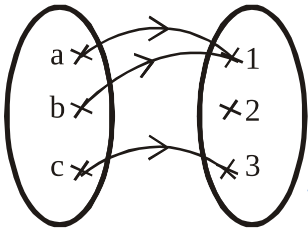
Faire savoir

L’essentiel du chapitre

1. Les applications

Soit E et F deux ensembles, en associant à chaque élément x de E un seul élément y de F, noté $f(x)$, on définit une application f de E vers F.

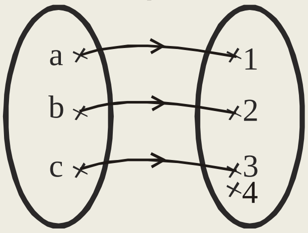
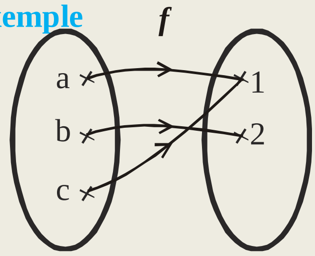
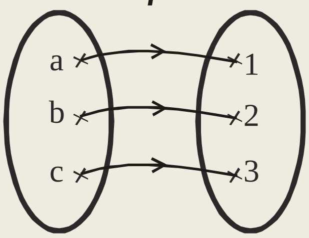
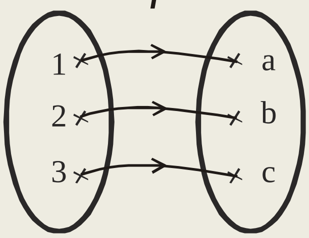
$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto y$$



Exemple: $E=\{a\ ;\ b\ ;\ c\}\ ;\ F=\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$;

$f(a) = 1$; $f(b) = 1$; $f(c) = a$.

En plus,

On a	Si et seulement si
f est une injection de E dans F	$\forall\, x_1\ ;\ x_2 \in E\ ;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ **Exemple** f 
f est une surjection de E sur F	$\forall\, y \in F\ ;\ \exists\, x \in E :\ f(x) = y$ **Exemple** f 
f est une bijection de E sur F	f est à la fois une injection et une surjection de E sur F, $\Leftrightarrow$ $\forall\, y \in F\ ;\ \exists!\, x \in E :\ f(x) = y$. En plus, f admet une application réciproque notée f^{-1}, par conséquent, $\forall\, y \in F\ ;\ \exists!\, x \in E :\ f^{-1}(y) = x$. **Exemple** f f^{-1}  

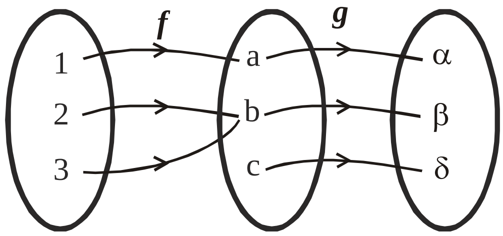
Composée de deux applications

Si est une f application d'un ensemble E vers un ensemble F et g une application de l'ensemble F vers un ensemble G.

Alors, $g \circ f$ est application de l'ensemble E cers l'ensemble G.

Définie par, $\forall\, x \in E$: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Exemple

	$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = \alpha$ $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = \beta$ $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = \beta$

Fonction et application

Une fonction f d'un ensemble E vers un ensemble F, est une application de E vers F, si et seulement si, L'ensemble de définition de f est E.

2. Notion de n ! avec $n \in \mathbb{N}$

- n ! se lit n factorielle ; $0! = 1$; $1! = 1$;
- $\forall n \geq 2$; $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$;

Exemple

$2! = 1 \times 2 = 2$; $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$; $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : \prod_{k=1}^{k=n} k = n!$
- $\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)n! = (n+1)!$; $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$; $\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{(n+1)}$.

Exemple

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$; $4 \times 3! = 4!$

- Soit p et q deux entiers naturels, si, $p \leq q$, alors $\dfrac{q!}{p!}$ est un entier naturel.

Exemple

$\dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$;

3. Cardinal d'un ensemble fini

Soit Ω un ensemble fini (ayant un nombre fini d'élément).

Le nombre d'éléments de Ω est le cardinal de Ω, noté card(Ω).

Exemple $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$; $\text{card}(\Omega) = 4$

$\Omega = \{a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 \ldots a_n\}$; $\text{card}(\Omega) = n$

$\Omega = \{a_0 ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 \ldots a_n\}$ $\text{card}(\Omega) = n+1$

$\Omega = \{a_0 ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 \ldots a_{n-1}\}$ $\text{card}(\Omega) = n$

- Si E est un ensemble vide (note $\varnothing$); cet ensemble n'a aucun élément., alors, card(E) = 0 ; card(E) = 0 $\Leftrightarrow$ E = $\varnothing$.

Vocabulaire & Propriétés

Si A est une partie de Ω (un sous ensemble de Ω), on écrit $A \subset \Omega$: (A inclus dans Ω)
Alors ; $0 \leq \text{card}(A) \leq \text{card}(\Omega)$

$\varnothing$ est la partie vide de Ω et Ω est la partie pleine de Ω.

Pour toute partie A d'un ensemble non vide Ω, on a ; $\dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \in [0\ ;\ 1]$

Soit A et B deux ensembles finis
$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

En plus si A et B sont disjoints $(A \cap B) = \varnothing$, alors : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Produits cartésiens d'ensembles

Soit A et B deux ensembles ; les ensembles $A \times B$ et $B \times A$ désignent les produits cartésiens de A et B.

- $A \times B = \{(a;b)/a \in A \text{ et } b \in B\}$; $B \times A = \{(b;a)/b \in B \text{ et } a \in A\}$

Soit A_1 ; A_2 ; …A_n (n ensemble)
L'ensemble :

- $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est le produit cartésien de A_1 ; A_2 ; …A_n.
  et $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1;a_2;\ldots;a_n)/a_1 \in A_1\ ;\ a_2 \in A_2\ ;\ldots\ a_n \in A_n\}$

En plus, si A_1 ; A_2 ; …An sont finis, alors $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est fini
et, $\text{card}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \text{card}(A_1) \times \text{card}(A_1) \times \ldots \times \text{card}(A_n)$

- Soit A un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$:
  A^2 désigne $A \times A$;
  $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ (\text{facteurs})}$
- Soit A et B deux ensembles finis ;

Il y a	Si, et seulement si
Possibilité d'injection de A dans B	$\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$
Possibilité de surjection de A surs B	$\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$
Possibilité de bijection de A sur B	$\text{card}(A) = \text{card}(B)$

4) Listes

Exemple

Soit $\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\}$ un ensemble; on a (1; 2; 3) est une liste dans Ω à 3 termes

on l'appelle une 3- liste dans Ω.
(1 ; 1 ; 2 ; 3) $\longrightarrow$ est une 4-liste dans Ω
(1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 3) $\longrightarrow$ est une 6-liste dans Ω
(1 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3) $\longrightarrow$ est une 9-liste dans Ω

- Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Le nombre de p- liste dans un ensemble Ω ayant n éléments est n^p

- Soit A et B deux ensembles finis non vides tels que ;

Card (A) = p ; card(B) = n

Le nombre d'applications de A vers B est n^p

5) Arrangement

Soit n et p deux entiers tels que : $p \leq n$;

On appelle p- arrangement dans un ensemble Ω ayant n éléments, toute p-liste dans Ω à termes distincts deux à deux.

Exemple

soit $\Omega = \{1 ;\ 2 ;\ 3 ;\ 4 ;\ 5\}$

- (1 ; 2 ; 3) est un 3- arrangement dans Ω
- (3 ; 2 ; 1) est un 3- arrangement dans Ω
- (1 ; 2 ; 5 ; 4 ; 3) est un 5- arrangement dans Ω
- un 6- arrangement dans Ω n'existe pas

- Soit n et p deux ensembles tels que $p \leq n$; le nombre p- arrangement dans un ensemble de Ω ayant n éléments est : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

- Soit A et B deux ensembles tels que ; card(A) = p ; card(B)= n ; avec $p \leq n$.

Le nombre d'injection de A dans B est A_n^p.

- Un n- arrangement dans un ensemble Ω ayant n éléments est appelé une permutation de Ω

Exemple

Soit $\Omega = \{1 ;\ 2 ;\ 3 ;\ 4 ;\ 5\}$;

(1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5) ; (2 ; 1 ; 4 ; 3 ; 5) ; (1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 2) sont des permutations de Ω.

- Le nombre de permutation d'un ensemble Ω ayant n éléments est : $A_n^n = n\,!$.

- Soit A et B deux ensembles finis tels que card(A) = card(B) = n.

Le nombre de bijections de A sur B est n !.

6) Combinaison

Soit Ω un ensemble fini.

On appelle une combinaison dans Ω toute partie (ou sous-ensemble) de Ω.

Exemple

Soit $\Omega = \{1 ;\ 2 ;\ 3 ;\ 4 ;\ 5\}$

- $\{1 ;\ 2 ;\ 3\}$ est <u>une</u> combinaison de 3 éléments dans Ω.

  $\{1 ;3 ;\ 4 ;\ 5\}$ est <u>une</u> combinaison de 4 éléments dans Ω.
- ϕ (partie vide) est <u>la</u> combinaison dans Ω de zéro élément.
- Ω (partie pleine) est la combinaison de 5 éléments.
- Une combinaison de 6 éléments dans Ω n'existe pas.

- Soit n et p deux entiers naturels tels que : $p \leq n$, Le nombre de combinaison de p éléments dans un ensemble Ω ayant n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés

- $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ C_n^0 = 1\ ;\ C_n^n = 1\ ;\ C_n^1 = 1$
- $\forall n\ ;\ p \in \mathbb{N}\ \ (p \le n) : C_n^p = C_n^{n-p}$

$C_n^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1}$ (Propriété à la base de la construction du triangle suivant appelé le triangle de Pascal.)

C_1^0	C_1^1				1	1				
C_2^0	C_2^1	C_2^2			1	2	1			
C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	$\Longrightarrow$	1	3 + 3	1			
.					1	4	6 + 4	1		
.					1	5	10	10	5	1
.										

$C_n^0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ C_n^p + C_n^{p+1}\ \ .\ \ .\ \ .;C_n^n$

$C_{n+1}^0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ ;C_{n+1}^{p+1}\ \ .\ \ .\ \ .+C_{n+1}^{n+1}$

Remarque

Le triangle de Pascal porte les valeurs des nombres C_n^p.

- Soit Ω un ensemble fini ayant n éléments

Propriétés des parties de Ω	**Propriétés des nombres C_n^p**
Il y a une seule partie (partie ayant 0 élément c'est $\varnothing$ (la partie vide)).	$C_1^0 = \boxed{1}$
Il y a une seule partie (partie ayant Ω élément c'est Ω (la partie pleine)).	$C_n^n = \boxed{1}$
Il y a (n) parties ayant chacune (1) élément (les singletons de Ω).	$C_n^1 = \boxed{n}$
A toute partie de Ωayant p éléments correspond une seule partie de Ω ayant $n-p$ éléments et réciproquement (ce sont des parties complémentaires dans Ω). Donc, le nombre de parties à (p) éléments est le même que le nombre de partie à (n- p) éléments .	$C_n^p = C_n^{n-p}$

7) Formules de développement du binôme de Newton

$$\forall a ; b \in \mathbb{R} ; \forall n \in \mathbb{N}^* ;\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} b^k \quad ; \quad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

Exemple

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_2^k a^{2-k} b^k = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^{3-k} b^k = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^4 = \sum_{k=0}^{4} (-1)^k C_4^k a^{4-k} b^k = C_4^0 a^4 b^0 - C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 - C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Savoir-faire

Listes

Exercice. 1

L’allumage d’une grande salle de jeux, est assuré par 10 ampoules commandées chacune par un interrupteur. Combien y-t-il de manières différentes d’éclairer cette salle ?

Solution

- On note 1 pour : une ampoule est allumée
  0 pour : une ampoule est éteinte
- On pose : $\Omega = \{0 \ ; 1\}$.
- Chaque manière d’éclairer la salle est une 10-liste dans Ω différentes de la 10-liste (0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0 ;0), qui correspond à la salle non éclairée.
- Donc, le nombre de manières d’éclairer la salle est :
  $2^{10} - 1 = 1024 - 1 =$ **1023**

Arrangements

Exercice. 2

Combien de façons différentes a-t-on pour ranger 3 livres dans 5 casiers de couleurs différentes ne pouvant contenir chacun qu’un seul livre ?

Solution

- On note C_1 ; C_2 ; C_3 ; C_4 ; C_5 ; les cinq casiers.
- On pose : $\Omega = \{C_1 \ ; C_2 \ ; C_3 \ ; C_4 \ ; C_5\}$.
- Chaque façon de ranger les 3 livres est un 3-arrangement dans Ω, alors, le nombre de façons différentes de ranger les livres est :

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2!} = 60 .$$

Tirages

Exercice. 3

Une caisse contient 7 boules indiscernables au toucher.

1) On tire au hasard <u>successivement avec remise</u> 3 boules de la caisse.
 Quel est le nombre de tirages possibles ?
2) On tire maintenant <u>successivement sans remise</u> 3 boules de la caisse.
 Quel est le nombre de tirages possibles ?
3) On tire maintenant <u>simultanément</u> 3 boules de la caisse.
 Quel est le nombre de tirages possibles ?

Solution

- On note : b_1 ; b_1 ; b_1 ; b_1 ; b_1 ; b_1 ; b_1, les 7 boules.
- On pose : $\Omega = \{b_1 ; b_2 ; b_3 ; b_4 ; b_5 ; b_6 ; b_7\}$.

1) Chaque tirage successif avec remise de 3 boules est une 3-liste dans Ω.
Donc ; le nombre de tirages possibles est : $7^3 = 7 \times 7 \times 7.=$ **343.**

2) Chaque tirage successif sans remise de 3 boules est un 3-arrangement dans Ω.
Donc ; le nombre de tirages possibles est : $A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7\times6\times5 = \mathbf{210}$.

3) Chaque tirage simultané de 3 boules est une combinaison de 3 éléments de Ω.
Donc ; le nombre de tirages possibles est : $C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = \mathbf{35}$.

Nombre de parties d'un ensemble finis

Exercice. 4

1.) a) Montrer que $\forall\ k \in \mathbb{N}$: $(k + 1)! - k ! = k\,k !$

b) Calculer la somme : $S = 1 \times 1 ! + 2 \times 2 ! + 3 \times 3 ! + \ldots + 2009 \times 2009 !$

2) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

b) Quel est le nombre de parties d'un ensemble Ω ayant (n) éléments ?

Solution

1)On a : $\forall\ k \in \mathbb{N}$: $(k+1)! = (k+1)k!$;

donc ; $\forall\ k \in \mathbb{N}$: $(k+1)! - k! = (k+1-1)k!$;

$= kk!$

Donc ; $\boxed{\forall\ k \in \mathbb{N} : (k+1)! - k! = kk!}$.

b) $S = \sum_{k=1}^{2009} kk! = \sum_{k=1}^{2009} ((k+1)! - k!)$

$= (2! -1!) + (3! -2!) + + (4! -3!) + \ldots + + (2010! -2009!)$.

Donc ; $\boxed{\mathbf{S = 2000 ! -1}}$

2) a) On a ; $\forall a;b \in \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N}$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Donc; avec $a = b = 1$; on a : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n$;

Donc ; $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n}$

b) le nombre de parties de Ω à 0 élément est C_n^0

- le nombre de parties de Ω à 1 élément est C_n^1
- le nombre de parties de Ω à 2 éléments est C_n^2
- .
- .
- .
- le nombre de parties de Ω à n éléments est C_n^n

- donc le nombre de parties de Ω est :
- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \boxed{2^n}$

B. Exercices

1. Les numéros de téléphones d'un réseau téléphonique sont des nombres entiers de 6 chiffres.
Quelle est la capacité de ce réseau ?

2. On lance deux dés cubiques de couleurs différentes, un noir et un jaune. On relève dans l'ordre le numéro présenté par le dé noir, puis celui présenté par le dé jaune.
Schématiser l'ensemble des résultats possibles.
Quels est le nombre de résultats possibles.

3. Combien de façons différentes 3 personnes peuvent occuper 5 chaises ?

4. Combien de groupes de 7 élèves peut-on former dans une classe de 12 élèves ?

5. De combien de manières différentes peut-on distribuer 5 stylos à 5 élèves ?

6.) 3 personnes occupent au hasard des places dans une voiture à 5 places. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?
2) Le chauffeur et 3 personnes occupent des places dans une voiture à 5 places, le chauffeur occupe la place de commande. Quel est le nombre de façons différentes possibles ?

7. Une caisse contient 8 boîtes dont 3 noires, 3 jaunes et 2 blanches.
On tire au hasard 3 boules simultanément

8. Une caisse contient cinq boules numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.
On tire successivement deux boules sans remise.
1) quel est le nombre de tirage possible ? schématiser le nombre de tirage possible.
2) Quel, est le nombre de tirages donnant a + b > 7.
(a et b les numéros des boules tirées).

9. 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$

10 Résoudre dans □ l'équation suivante :
$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k x^k = 0$

11 Une caisse contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
1) On tire successivement avec remise deux boules.
a) donner le nombre de tirages possibles, et schématiser ce nombre.
b) quel est le nombre de tirage donnant $|a - b| = 1$ (a et b les numéros de boules tirées).
2) On tire maintenant <u>successivement</u> <u>sans remise</u> deux boules.
a) Donner le nombre de tirages possibles et schématiser ce nombre.
b) Quel est le nombre de tirage donnant $|a - b| = 1$.
3) On tire maintenant <u>simultanément</u> deux boules.
a) donner le nombre de tirages possibles et schématiser ce nombre.
b) quel est le nombre de tirage donnant

a) quel est le nombre de tirage possible ?
b) quel est le nombre de tirage contenant 1 seule boule noire ?
c) quel est le nombre de tirage contenant au moins une boule noire?
2) On tire maintenant au hasard 2 boules simultanément.
a) quel est le nombre de tirage possible ?
b) quel est le nombre de tirage contenant deux boules de mêmes couleurs ?
c) quel est le nombre de tirage contenant deux boules de couleurs différentes ?

$|a - b| = 1$.

12 On lance une pièce de monnaie mauritanienne trois fois de suite.
On note a chaque fois la nature de la face visible (A : pour face en Arabe et F : pour face en Français).
Quel est le nombre de résultats possibles ?
Schématiser ces résultats à l'aide d'un arbre.