Chapitre 2 Equations, inéquations &systèmes

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

1. Equations

a) Equations du premier degré

La forme générale d'une équation du premier degré est $ax + b = 0$ où a et b sont deux réels donnés.

Si	alors l'ensemble des solutions est
$a = 0$ et $b = 0$	**R**
$a = 0$ et $b \neq 0$	$\varnothing$
$a \neq 0$	$\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

b) Equations du second degré

La forme générale d'une équation du second degré est $ax^2 + bx + c = 0$ où a est réel non nul donné et b, c sont deux réels donnés.

Le discriminant de cette équation est soit le nombre Δ, soit le nombre Δ' tel que :

$\Delta = b^2 - 4ac$ et $\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

Si	alors l'ensemble des solutions est
$\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)	$\varnothing$
$\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)	$\{x_1 ; x_2\}$ avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Ou : $x_1 = \frac{-\frac{b}{2}-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-\frac{b}{2}+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Si	alors
x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$
$a + b + c = 0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{1 ; \frac{c}{a}\right\}$.
$a - b + c = 0$	L'ensemble des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est $\left\{-1 ; \frac{-c}{a}\right\}$.
$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ où s et p sont deux réels donnés	Les nombres x et y (s'ils existent) sont les solutions de l'équation du second degré d'inconnue X : $X^2 - sX + p = 0$

L'équation $x^2 = k$ où k est un réel donné.

Si	alors l'ensemble des solutions est
$k < 0$	$\varnothing$
$k = 0$	$\{0\}$
$k > 0$	$\{-\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}\}$

c) Equation bicarrée

La forme générale d'une équation bicarrée est : $ax^4 + bx^2 + \ + c = 0$; avec a un réel non nul donné et b et c deux réels donnés.
En plus : $ax^4 + bx^2 + \ + c = 0 \Leftrightarrow X = x^2$ et $aX^2 + bX + c = 0$.

2. Inéquations

a) Inéquations du premier degré

La forme générale d'un binôme du premier degré est $ax + b$ où a est un réel non nul donné et b un réel donné.

- Signe de $ax + b$ sur **R**

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		Signe contraire de a	0	Signe de a	

La forme générale d'une inéquation du premier degré est :
$ax + b \leq 0$ où $ax + b < 0$ ou $ax + b \geq 0$ ou $ax + b > 0$

b) Inéquations du second degré

La forme générale d'un trinôme du second degré est $ax + bx + c$ ou a est un réel non nul donné, b et c deux réels donnés.

Signe d'un trinôme du second degré

<table>
<tr><td>Si</td><td>alors</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td>signe de a</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$-\frac{b}{a}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td></td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$)</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>Inf $(x_1\ ;\ x_2)$</td><td></td><td>Sup $(x_1\ ;\ x_2)$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$ax^2 + bx + c$</td><td></td><td>Signe de a</td><td>0</td><td>Signe contraire de a</td><td>0</td><td>Signe de a</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

La forme générale d'une inéquation du second degré est :
$ax^2 + bx + c \leq 0$ ou $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \geq 0$ ou $ax^2 + bx + c > 0$.

3. Système d’équations et d’inéquations

a) Système linéaire de deux équations à deux inconnues

La forme générale d’un système linéaire de deux équations à deux inconnues est :

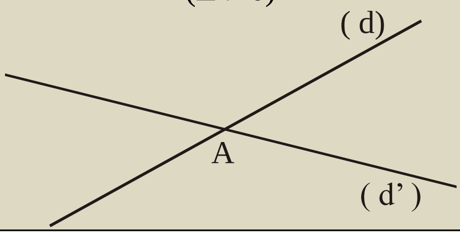
$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a ; b ; c ; a’ ; b’ ; c’ sont six nombres réels donnés et où (x ; y) est le couple de réels inconnus.

Le déterminant du système est le nombre Δ tel que : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

Si	alors l’ensemble des solutions est
$\Delta \neq 0$	Le système a une solution unique. On la détermine par substitution ou par combinaison linéaire.
$\Delta = 0$	Le système peut ne pas avoir de solution ou en avoir une infinité

Interprétation graphique

Soit (d) et (d’) les deux droites d’équations cartésiennes ax + by = c et a’x + b’y = c’ dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) du plan.

Si	alors l’ensemble des solutions est
(d) et (d’) sont sécantes ($\Delta \neq 0$) 	Le système a un couple solution unique qui est le couple des coordonnées du point A commun à (d) et (d’).
(d) et (d’) sont strictement parallèles ($\Delta = 0$). (d) (d’) Les droites n’ont pas de points communs	Le système n’a pas de solution.
(d) et (d’) sont confondues ($\Delta = 0$). (d’) = (d’) Les droites ont une infinité de points communs	Le système a une infinité de solution qui sont tous les couples de coordonnées du point de (d) (ou de d’).

b) Système linéaire d’inéquation à deux inconnues

La forme générale d’une inéquation linéaire à deux inconnues est :
ax + by + c ≥ 0 ou ax +by + c ≤ 0 ou ax +by + c > 0 ou ax +by + c < 0, avec a; b deux réels non nuls et c un réel donné.

Soit (d) la droite d’équation ax +by + c = 0.

On considère le nombre ax + by + c

- ce nombre est nul pour tous les couples M(x ; y) de (d).

- ce nombre est positif pour tous les points M(x ; y) de l'un des demi-plans de frontière (d).
- ce nombre est négatif pour tous les points M(x ; y) de l'autre demi-plan.

- On détermine le demi-plan où $ax + by + c \geq 0$ (respectivement $ax + by + c \leq 0$) en calculant ce nombre pour un point donné que l'on choisit en dehors de (d).
- Un système d'inéquations linéaires à deux inconnues ne peut se résoudre que graphiquement

4. Polynômes

Définition

- Soit $a \in \mathbf{R}^*$; $n \in \mathbf{N}$; f la fonction définie par $f(x) = ax^n$.
  La fonction f est appelée un monôme de coefficient a et de degré n.
- On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.
  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ où a_n est un réel non nul et a_{n-1} ; … ; a_1 ; a_0 des réels, est la forme réduite du polynôme P et n est appelée le degré du polynôme P. On écrit d°P = n.
- Un binôme $ax + b$ est un polynôme de degré 1.
- Un trinôme $ax^2 + bx + c$ est un polynôme de degré 2.

Zéro d'un polynôme- Factorisation

- On appelle zéro (ou racine) d'un polynôme P.
  Tout nombre réel α tel que $P(\alpha) = 0$.
- Déterminer les zéros d'un polynôme P ; c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$
- si α est un zéro de P(x) alors, P(x) est divisible par $x - \alpha$.

- **Des égalités remarquables**

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; 2) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; 3) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Forme canonique d'un trinôme du second degré :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ (forme canonique)}$$

Savoir-faire

A. Applications

Equations bicarrées

Exercice 1 Résoudre dans l'équation $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

Solution

Soit $x^2 = X$, on a : $x^4 + x^2 - 12 = 0 \Rightarrow X^2 + X - 12 = 0 \Leftrightarrow (X + 4)(X - 3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4)(x^2 - 3) = 0$.

- L'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution,
- L'équation $x^2 - 3 = 0$ a pour solution : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
- L'équation $x^4 + x^2 - 12 = 0$ a donc deux solutions $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Exercice 2

m est un nombre réel donné, on considère l'équation d'inconnue x : $x^4 - 3mx^2 + m^2 - 1 = 0$.

a) Résoudre dans cette équation pour chacune des valeurs suivantes de m : 0 ; 1 ; 3.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles cette équation a

- quatre solutions ;
- trois solutions distinctes ;
- deux solutions distinctes

Solution

a) Si $m = 0$; on a $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) = 0$.
Donc l'équation a deux solutions : -1 et 1.

- si $m = 1$ on a : $x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$.
  Donc l'équation a trois solutions : $-\sqrt{3}$; 0 et $\sqrt{3}$.
- si $m = 3$ on a : $x^4 - 9x^2 + 8 = 0 \Rightarrow (x^2 - 8)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2}) = 0$.
  Donc l'équation a quatre solutions : $-2\sqrt{2}$; -1 ; 1 et $2\sqrt{2}$.

b) On pose $X = x^2$, on obtient l'équation $X^2 - 3mx + m^2 - 1 = 0$; (2)

Dans l'équation (2) : $\Delta = 5m^2 + 4$; $p = m^2 - 1$ et $s = 3m$.

- On remarque que pour tout nombre réel m ; l'équation (2) admet deux solutions distinctes.
- L'équation (1) a quatre solutions distinctes si et seulement si l'équation (2) admet deux solutions distinctes et positives. Cette conditions est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$; $s > 0$ et $p > 0$; c'est-à-dire $m \in [1 ; +\infty[$.
- L'équation (1) a trois solutions distinctes si et seulement si, l'équation (2) a deux solution distinctes et positives dont l'une est nulle, cette condition est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$, $p = 0$ et $s > 0$ c'est-à-dire $m = 1$.
- L'équation (1) a deux solutions distinctes si et seulement si, l'équation (2) a deux solutions distinctes non nulles et de signes opposées, cette condition est réalisée si et seulement si $\Delta > 0$; $p < 0$ c'est-à-dire $m \in]-1 ; 1[$.

Inéquations bicarrées

Exercice 1

Résoudre dans □ l'inéquation $4x^4 - 5x^2 + 1 > 0$…(1)

Solution

Soit P le polynôme défini par $P(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$; on pose $X = x^2$.

On a : $4x^4 - 5x^2 + 1 = 4x^4 - 5x^2 + 1$; le polynôme $4x^4 - 5x^2 + 1$ a pour racine 1 et $\frac{1}{4}$.

Donc ; $4x^4 - 5x^2 + 1 = (4X - 1)(X - 1) = (4x^2 - 1)(x^2 - 1) = (2x - 1)(2x + 1)(x - 1)(x + 1)$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 $+\infty$
(2x -1) (2x +1)	+	+	-	+	+
(x-1)(x +1)	+	-	-	-	+
P(x)	+	-	+	-	+

Donc l'ensemble de solution de l'inéquation (1) est $S =]-1 ; -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2} ; 1[$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 \geq x^2 + 12$ ……(2)

Solution

On a : $x^4 \geq x^2 + 12 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 \geq 0$; on pose $X = x^2$. On a : $x^4 - x^2 - 12 = X^2 - X - 12$; le polynôme $X^2 - X - 12$ a pour racine -3 et 4, donc $X^2 - X - 12 = (X + 3)(X - 4)$

$= (x^2 + 3)(x^2 - 4)$

$= (x^2 + 3)(x - 2)(x + 2)$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2 + 3 > 0$; donc l'ensemble de solutions de l'inéquation (2) est $S =]-\infty ; -2[\cup [2 ; +\infty[$.

Autres équations et inéquations

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$……(1)

Solution

- Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$; $P(1) = 0$.
  Donc il existe un polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x - 1)\,Q(x)$; ….$P(-1) = 0$
  Donc il existe un polynôme R(x) tel que $Q(x) = (x + 1)R(x)$;
  Par la suite on a : $\forall x \in \mathbb{R}$; $P(x) = (x - 1)\,Q(x) = (x - 1)(x + 1)R(x) = (x^2 - 1)R(x)$
- Pour déterminer le polynôme R on peut effectuer une division euclidienne de P(x) par $(x^2 - 1)$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 & x^2 - 1 \\ \hline \underline{x^4 - x^2} & x^2 - x - 12 \\ -\underline{x^3 - 12x^2} & \\ \underline{-x^3 + x} & \\ -12x^2 + 12 & \\ \underline{-12x^2 + 12} & \\ 0 & \end{array}$$

On obtient $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x - 12)$

$= (x - 1)(x + 1)(x - 4)(x + 3)$

Donc l'ensemble de solutions de l'équation (1) est $\{-1 ; 1 ; -3 ; 4\}$

Exercice 2

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$

a) Vérifier que -3 et 2 sont racines de P et en déduire une factorisation du polynôme P(x).

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 + x^3 - 5x + x - 6 < 0$ ……..(2)

Solution

- $P(-3) = 81 - 27 - 45 - 3 - 6 = 0$ donc -3 est racine de P(x)
- $P(2) = 16 + 8 - 20 + 2 - 6 = 0$ donc 2 est racine de P(x)

On en déduit qu'il existe un polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x - 2)(x - 3)\,Q(x)$.

Pour déterminer ce polynôme Q, on peut utiliser la méthode de cœfficients indéterminés.

Q est un polynôme du 2[end] degré, on pose $Q(x) = ax2 + bx + c$; on a $\forall x \in$; $P(x) = (x^2 + x - 6)(ax^2 + bx + c)$.

Donc, $(x^2 + x - 6)(ax^2 + bx + c) = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$;

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + ax^3 + bx^2 + cx - 6ax^2 - 6bx - 6c = x^4 + x^3 - 5x + x - 6$

$ax^4 + (b + a)x^3 + (c + b - 6a)x^2 + (c - 6b)x - 6c = x^4 + x^3 - 5x + x - 6 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 1 & \Rightarrow b = 0 \\ c + b - 6a = -5 & \Rightarrow c = 1 \\ c - 6b = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ P(x) = (x^2 + x - 6)(x^2 + 1)$$

On a pour tout réel x ; $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow P(x)$ est du signe de $x^2 + x - 6$; donc l'ensemble de solution de l'inéquation (2) est S =] -3 ; 2[

Equations irrationnelles

On appelle équation irrationnelle toute équation où l'inconnue figure sous un radical.

Exercice 1

Résoudre dans □ l'équation $\sqrt{2-x} = x + 10$ …(1)

Solution

Nous allons proposer deux méthodes pour résoudre une telle équation.

- **Résolution par implication** : Pour tous nombres réels a et b on a
  $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$; on peut écrire : $\sqrt{2-x} = x + 10 \Leftrightarrow 2 - x = (x + 10)^2 \Leftrightarrow x^2 + 21x + 98 = 0$;
  $(x + 7)(x + 14) = 0$; l'équation $(x + 7)(x + 14) = 0$ a deux solutions -7 et -14.
  Pour terminer la résolution on doit vérifier si, -7 et 14 sont solutions de l'équation (1) :
  $\sqrt{2-(-7)} = -7 + 10$ -7 est solution ; $\sqrt{2-(-14)} = -14 + 10$ -14 n'est pas solution
  Donc ; l'équation (1) a une solution unique x = -7.
- **Résolution par équivalence** pour tous nombres réels a et b on a :

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b^2 \\ b \geq 0 \end{cases} \quad \text{Donc ; } \sqrt{2-x} = x + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 21x + 98 = 0 = b^2 \\ x \geq -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x+14) = 0 \\ x \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow x = -7$$

Donc l'équation (1) a pour solution x = -7.

Exercice 2

Résoudre dans □ l'équation $\sqrt{-x2 + 5x + 9} = \sqrt{x + 3}$; …….(2)

Solution

Pour tout nombre réel $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a \geq 0 \text{ et } b > 0 \end{cases}$. On peut écrire $\sqrt{-x2 + 5x + 9} = \sqrt{x + 3} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x2 + 5x + 9 = x - 3 = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$ x = 6. Donc, l'équation (2) a une seule solution : x = 6.

Pour résoudre une équation irrationnelle (E) on peut utiliser la méthode suivantes :

- éliminer les radicaux par élévation au carré
- résoudre l'équation (E)' sans radical ainsi obtenue ;
- déterminer parmi les solutions de (E)' celles qui sont solutions de (E).

Inéquations irrationnelles

Pour résoudre une telle inéquation, il est difficile de procéder par implication car les ensembles de solutions contiennent en général une infinité d'éléments ; on ne peut donc pas vérifier si chacun d'eux est solution de l'inéquation initiale.

Exercice 1

Résoudre dans □ l'équation $x + \sqrt{x-1} \geq 3$; …..(1)

Solution

- Contraintes sur l'inconnue $x \in]1 ; +\infty[$
- On a $\forall\ x \in]1 ; +\infty[: x + \sqrt{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 3 - x$,Or $\forall\ x \in]1 ; +\infty[$; $\sqrt{x-1} \geq 0$; donc
  - Si, $3 - x \leq 0$; l'inéquation est vérifiée, tout nombre réel de l'ensemble $[3 ; +\infty[$ est solution de (1).
  - Si $3 - x > 0$ on a : $\sqrt{x-1} \geq 3 - x \Leftrightarrow x - 1 \geq (3 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \leq 0.$

    $\Leftrightarrow x \in [\ 2 ; 5[.$

    Tout nombre réel de l'ensemble $[2 ; 3[$ est solution de (1).

    Donc ; l'ensemble des solutions de l'inéquation (1) est $[2 ; +\infty[$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geq 3$.....(2).

Solution

- Contraintes sur l'inconnue $x \geq -1$ et $x \geq -2$; donc $x \in [-1 ; +\infty[$,
- On a $\forall\ x \in [-1 ; +\infty[$: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow 2x + 3 + 2\sqrt{(x+2)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$

  $\sqrt{(x+2)(x+1)} \geq -x + 3$. Or $\forall\ x \in [-1 ; +\infty[$; $\sqrt{(x-1)(x+2)} \geq 0$; donc

  Si $-x + 3 \leq 0$; l'inéquation est vérifiée, tout nombre réel de l'ensemble $[3 ; +\infty[$ est solution de (2).

  Si ; $-x + 3 > 0$; on a $\sqrt{(x+1)(x+2)} \geq -x + 3 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) \geq (-x+3)^2 \Leftrightarrow 9x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{9}$.

  Tout nombre réel de l'ensemble $[\frac{7}{9} ; 3[$ est solution de(2), donc, l'ensemble de solutions de l'inéquation (2) est $[\frac{7}{9} ; +\infty[$

Systèmes linéaires d'équations et d'inéquations

Système à trois équations à trois inconnues

On considère le système $\Sigma : \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$; x ; y ; z sont les inconnues.

Σ est appelé système de trois équations du premier degré (ou système linéaire) à trois inconnues.
Résoudre Σ c'est déterminer les triplets (x ; y ; z) de nombres réels qui vérifient les trois équations.
Nous allons étudier deux méthodes de résolution d'un tel système, par substitution et par pivot de Gauss.

Résolution par substitution

Exercice 1

Résoudre le système $\Sigma_1 \begin{cases} x + y - 2z = -7 & ....(E_1) \\ 2x - y + z = 0 & ....(E_2) \\ 2x + y + z = 8 & ....(E_3) \end{cases}$

Solution

On déduit de l'équation (E_1) que $z = -2x - y$; on remplace z par sa valeur dans (E_1) et (E_2)

On obtient $\Sigma_1 \begin{cases} 7x + 3y = 23 \\ -x - 2y = -8 \\ z = -3x - y + 8 \end{cases}$; le système $\begin{cases} 7x + 3y = 23 \\ -x - 2y = -8 \end{cases}$ a un unique couple solution (2 ; 3).

On en déduit que $z = -3 \times 2 - 3 + 8 = -1$, donc ; le système Σ_1 a un unique triplet solution (2 ; 3 ; -1).

Exercice 2

Résoudre le système $\Sigma_2 : \begin{cases} 2x - y - 2z = 6 & ....(E_1) \\ x + y - z = 1 & ....(E_2) \\ x - 5y - z = 9 & ....(E_3) \end{cases}$.

Solution

On en déduit de l'équation E_1 que : $y = 2x - 2z - 6$; on remplace y par sa valeur dans E_2 et E_3 :

On obtient : $\Sigma_2 : \begin{cases} y = 2x - 2z - 6 & ....(E_1) \\ 3x - 3y = 7 & ....(E_2) \\ -9x + 9y = -21 & ....(E_3) \end{cases}$

Le système $\Sigma_2 : \begin{cases} 3x - 3y = 7 \\ -9x + 9y = -21 \end{cases}$ a pour solution tous les couples $(x ; y)$ de nombres réels tels que :

$3x - 3z = 7$. On donne à l'une des inconnues une valeur arbitraire λ ($z = \lambda$) ;On en déduit :

$\Sigma_2 : \begin{cases} x = \frac{7}{3} + \lambda \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = \lambda \end{cases}$; donc l'ensemble de triplets solutions de Σ_2 est $\left\{ \left(\frac{7}{3} + \lambda \ ; \ \frac{-4}{3} ; \ \lambda \right) ; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Résolution par Pivot de Gauss

On peut également résoudre un système d'équations par combinaison.

Cette méthode nécessite généralement une vérification sauf dans le cas du Pivot de Gauss,dont nous nous admettons qu'il transforme un système en un système équivalent

Exercice 1

Résoudre le système $\Sigma_1 : \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & ....(E_1) \\ 5x + 3y + z = 3 & ....(E_2) \\ 3x + y - 2z = -1 & ....(E_3) \end{cases}$

Solution

On élimine x dans (E_2) et dans (E_3) par combinaison de chacune de ces équations avec (E_1).

On obtient $\Sigma_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & ....(E_1) \\ -28x - 36z = 12 & ....5 \times (E_1) - (E_2) \\ -16y - 19z = 10 & ....3 \times (E_1) - (E_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 & ....(E'_1) \\ -7x - 9z = 3 & ....(E'_2) \\ -16y - 19z = 10 & ....(E'_3) \end{cases}$.

On élimine y dans (E'_3) par combinaison de (E'_2) et (E'_3)

On obtient $\Sigma_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ -7y - 9z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$. Il reste à résoudre ce système triangulaire ; on obtient en commençant par la dernière équation puis en remontant : $z = 2$; $y = -3$; et $x = 2$. Donc le système Σ_1 a pour solution un triplet (2 ; -3 ; 2).

Exercice 2

Résoudre le système $\Sigma_2 : \begin{cases} x + y - 2z = 1 & ....(E_1) \\ x - 2y + z = 1 & ....(E_2) \\ -2x + y + z = 1 & ....(E_3) \end{cases}$

Solution

On obtient $\Sigma_2 \Leftrightarrow \Sigma_2 : \begin{cases} x + y - 2z = 1 & ....(E_1) \\ 3y - 3z = 0 & ....(E_1) + (E_2) \\ 2y - 3z = 3 & ....3 \times (E_1) + (E_3) \end{cases}$ le système $\begin{cases} 3y - 3z = 0 \\ 2y - 3z = 3 \end{cases}$ n'a pas de solution ; donc le système Σ_2 n'a pas de solution.

Exercice 3

Résoudre le système $\sum_3 : \begin{cases} x+2y+5z=4 & ....(E_1) \\ x+2y+2z=6 & ....(E_2) \\ 2x+3y+7z=10 & ....(E_3) \end{cases}$

Solution

On obtient $\sum_3 \Leftrightarrow \sum_3 : \begin{cases} x+2y+5z=4 & ....(E_1) \\ y+3z=-2 & ....(E'_2)=(E_1)-(E_2) \\ y+3z=-2 & ....(E_3) \end{cases}$; Donc $\sum_3 \Leftrightarrow \sum_3 : \begin{cases} x+2y+5z=4 \\ y+3z=-2 \end{cases}$; on donne à l'une des inconnues y ou z une valeur arbitraire ; $z = \lambda$. On en déduit que $y = -2 - 3\lambda$ (E'_2) ; on déduit que $x = 4 - 2(-2-3\lambda) + 5\lambda = 8 + 11\lambda$.

Donc l'ensemble des triplets solutions de $\sum_3$ est $\{(8+11\lambda \ ; \ -2-3\lambda \ ; \ \lambda) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

B. Exercices

1. Résoudre dans **R**: les équations suivantes :

$x^2 - 4x + 3 = 0$; $x^2 + x + 1 = 0$; $x^2 + 1 = 0$;
$x^2 + 3x - 4 = 0$; $x^2 - 2x - 2 = 0$; $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$
$x^2 - 3x - 4 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x + 3\sqrt{x}\ 1 = 0$;
$2x^2 - x - 1 = 0$; $1 - 4x^2 = 0$; $(2x+1)2 - 3(2x+1) - 4 = 0$
$(x-1)(x+3) = 0$; $(1-2x)^2(1+x) = 0$; $x(1-x^2) = 0$

2. Résoudre dans **R**: les inéquations :

$x + 1 \geq 0$; $2x - 1 \leq 0$; $\frac{1}{3}x + 1 \geq 0$.

3. Soit m un réel. Soit E_m l'équation : $mx^2 - x + 1 = 0$. Déterminer, suivant les valeurs de m, l'ensemble des solutions de E_m.

4. Soit g_m le trinôme défini pour tout x réel, par : $g_m(x) = x^2 + 2x - 2m$ où m est un paramètre réel non nul.

1) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solution dans **R**, de l'équation $g_m(x) = 0$.

2) Dans le cas où l'équation gm(x) = 0 admet deux solutions réelles x' et x'' telles que x' < x'' et que si m > 0 alors x' < -2 < 0 < x''.

5. On considère l'équation (E) :
$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

1) Montrer que(E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X = x + \frac{1}{x} \\ X^2 - 5X + 6 = 0 \end{cases}$

2) Résoudre dans **R** l'équation (E) = 0

6. 1) Résoudre dans **R**, le système :
$\begin{cases} 5a + 2b = 26 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases}$.

2) Déterminer, de la question précédente, la

8. Résoudre dans $\mathbf{R}^3$, chacun des systèmes :

1) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+2y+4z=5 \\ -2x-5y+2z=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 3x-2y+3z=12 \\ 5x-y+z=12 \end{cases}$.

9. Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) un repère du plan.

1) Les droites (d1) ; (d2) ; (d3) d'équations respectives :
x + y – 2 = 0 ; 3x –y -1 = 0 ; 2x -3y + 2 = 0 sont elles concourantes.

2) Vérifier graphiquement la réponse.

10 1) Quelles valeurs faut-il donner au nombre réel m pour que les droites (d1) ; (d2) ; (d3) d'équations respectives :
x + y – 2 = 0 ; 3x –y -1 = 0 ; 2x -3y + m = 0 soient concourantes ?

2) Faites la figure pour la valeur de m trouvée.

11 Résoudre graphiquement les inéquations ou systèmes d'inéquations suivantes :

1) $2y - x + 2 \leq 0$; 2) $y \geq 0$; 3) $x \leq 1$.

4) $\begin{cases} x+y-1<0 \\ 2x-3y>0 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x-2y+4 \geq 0 \end{cases}$

12 On donne un polynôme P et un nombre réel

a. Dans chacun des cas suivants :
Vérifier que P(x) est factorisable par x – a.
Déterminer le quotient de P(x) par x – a.
Factoriser, si possible, ce quotient.
Etudier le signe de P(x).

1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et a = 2

2) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$.

3) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ et a = -3

4) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $a = \sqrt{3}$.

13 Le plan est muni d'un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$). On résolution des systèmes suivants :

$\begin{cases} 5x+2y^2=26 \\ 2x-3y^2=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} 5\sqrt{x}+2\sqrt{y}=26 \\ 2\sqrt{x}-3\sqrt{y}=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{2}{y}=26 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-1 \end{cases}$

7. Le plan est rapporté à un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
Déterminer l'intersection des droites (d) et (d')
données par leurs équations :

(d) 4x + 5y -1 = 0 2) (d) 2x - 10y -4 = 0
(d') 3x + 4y -2 = 0 (d') -3x + 15y + 6 = 0
3) (d) 4x - 2y -1 = 0 (d') y = 2x + 1

donne les points A(-3 ; 2) ; B(0 ; -3) ; C(2 ; 2).
1) Déterminer une équation de chacune des droites (AB) ; (AC) et (BC).
2) Déterminer un système d'inéquation définissant l'intéieur du triangle ABC.

14 Dans chacun des cas suivants, où P est un polynôme de degré 2. Mettre P(x) sous la forme canonique. Déterminer les racines éventuelles de P
Etudier le signe de P(x).

1) P(x) = x^2 + 2x -1 5) P(x) = x2 + 2x +2
2) P(x) = -x^2 + x -1 6) P(x) = $\frac{1}{2}x^2$ + 5x - 1