Chapitre 3 Limites & continuité

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

1. Limite en $+\infty$ et $-\infty$

a) Limite infinie en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a\,;+\infty[$; $a \in \mathbb{R}$.
Nous écrivons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ pour rendre compte du comportement suivant :
un réel arbitrairement choisi et ce aussi grand que l'on veut, alors toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction dépassent ce réel dés que x est assez grand.
On dit alors, que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exemple

Chacune des fonctions suivantes tend vers $+\infty$, quand x tend vers $+\infty$.

$x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$.

b) limite finie en $+\infty$

- Limite nulle ; f une fonction positive définie sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$; $a \in \mathbb{R}$.
  L'écriture $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ traduit le comportement suivant :
  Un réel arbitrairement choisi et ce aussi petit que l'on veut, alors toutes les valeurs $f(x)$ de la fonction sont plus petites que ce réel dés que x est assez grand.

- Si f est une fonction de signe quelconque, alors par définition :
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ signifie $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| = 0$.
  On dit alors que f tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exemple

Chacune des fonctions suivantes tend vers 0, quand x tend vers $+\infty$.

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$; $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Limite finie

Dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$; c'est dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - \ell| = 0$;
Ou encore $f(x) = \ell + \varphi(x)$ avec $\varphi(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

- Une fonction n'a pas nécessairement une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$.
  C'est le cas par exemple de la fonction $x \mapsto \sin x$.

Autres situations

- Limite égale à -∞

Par définition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ signifie $\lim\limits_{x\to+\infty} -f(x) = +\infty$.

- Limite en -∞ ; cette notion n'intéresse que les fonctions définies sur un intervalle de type]- ∞ ; a]. $a \in \mathbb{R}$.

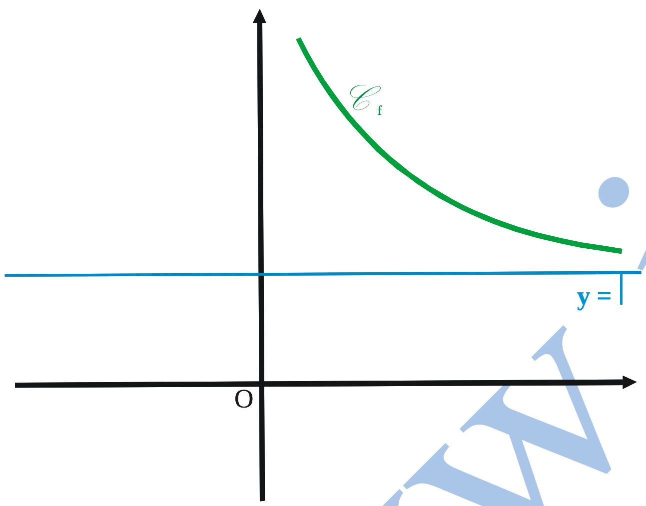
Il suffit de remarquer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$

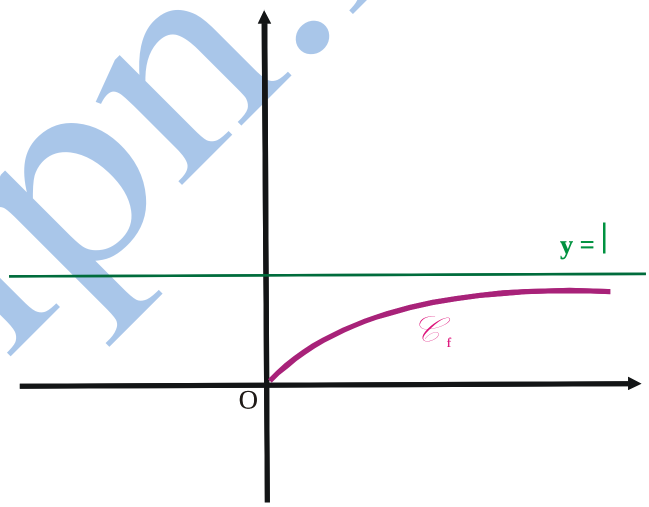
Exemple

- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ont pour limite 0 en -∞.
- Les fonctions : $x \mapsto x$; $x \mapsto x^3$ tendent vers -∞ quand x tend vers -∞.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ (fonction paire)

Remarque

Lorsque $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$, on dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale de $\mathscr{C}_f$.





2. Limite en un réel a

a) limite nulle en 0

Exemple

les fonctions : $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$ tendent vers 0 quand x tend vers 0.

b) limite finie en a

Dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ c'est dire que $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0$,

Ou encore $f(x) = \ell + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\mapsto a} \varphi(x) = 0$.

Le changement de variable x = a + h permet de se ramener à la recherche de la limite en 0.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = \ell$.

c) Limite infinie : asymptotes verticales

On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ lorsque pour tout A > 0 ;

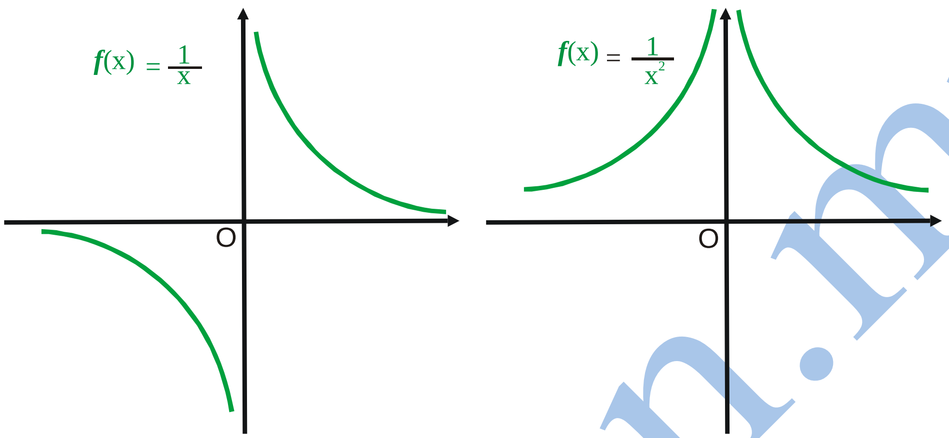
la valeur de f(x) dépasse A lorsque x est très proche de a.

Exemple

$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ (limite à gauche) ; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; (limite à doite).

Lorsque la fonction f admet une limite infinie en un point a, on dit que la droite Δ : x = a est une asymptote verticale de $\mathscr{C}_f$.

Exemple



3. Théorèmes de comparaison

a) Théorème de majoration, de minoration

Si pour x assez grand on a $f(x) \geq U(x)$ et si $\lim\limits_{x\leftarrow+\infty} U(x) = +\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Si pour x assez grand on a $f(x) \leq U(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = -\infty$ alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x + \sin x)$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\sin x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1 - x$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- On a : $1 \leq 1 + x^2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \geq \dfrac{1}{x^2}$ et comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = +\infty$.

b) Théorèmes d'encadrements

Si pour x assez grand on a $|f(x) - l| \leq U(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} U(x) = 0$.

Alors, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Exemples

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} (2 - x\cos\dfrac{1}{x})$.

- On a : $f(x) - 1 = \dfrac{\sin x}{x}$; d'où $|f(x) - 1| = \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = \dfrac{|\sin x|}{x}$; pour x > 0 ; et comme

  $|\sin x| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - 1| \leq \dfrac{1}{x}$; pour x > 0. Comme $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto+\infty} (1 + \dfrac{\sin x}{x}) = 1$.
- On a : $f(x) - 2 = - x\cos\dfrac{1}{x} \Rightarrow |f(x) - 2| = \left|x\cos\dfrac{1}{x}\right| = |x|\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|$, et comme

  $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leq 1 \Rightarrow |(f(x) - 2)| \leq |x|$; et comme $\lim\limits_{x\mapsto 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = 0$.

c) Théorème des Gendarmes

Si, pour x assez grand, $u(x) \le f(x) \le v(x)$; avec $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} v(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \boldsymbol{f}(x) = \ell$

Exemples

Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$; On a : $x^2 \le 1 + x^2 \le (1 + x^2)^2 \Rightarrow 1 \le \boldsymbol{f}(x) \le 1 + \dfrac{1}{x}$; et comme on a :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = 1$.

d) Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Si $\boldsymbol{f}$ a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\boldsymbol{g}$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Limite d'un produit

Si $\boldsymbol{f}$ a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si $\boldsymbol{g}$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g})$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

Limite d'un quotient

Si $\boldsymbol{f}$ a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
Si $\boldsymbol{g}$ a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	0	$\pm\infty$
alors $(\dfrac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}})$ a pour limite	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		

4. Continuité

Définition

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction et x_0 un nombre réel. On dit que $\boldsymbol{f}$ est continue en x_0 si, $\lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(x_0)$.

Exemples

Les fonctions suivantes sont continues en tout point x_0 de leurs domaines de définitions :

- $x \mapsto k$; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \cos$; $x \mapsto x$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sin x$

Propriétés

Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions continues en x_0, alors les fonctions :

- $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$; $\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{g}$; $k\boldsymbol{f}$ $(k \in \mathbb{R})$ et $|\boldsymbol{f}|$ sont continues en x_0.
- Si $\boldsymbol{g}(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ est continue en x_0 et si $\boldsymbol{f}(x) \ge 0 \Rightarrow \sqrt{\boldsymbol{f}}$ est continue en x_0

4. Prolongement par continuité

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction non définie en x_0, et ℓ un nombre réel tel que : $\lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{f}(x) = \ell$;

On appelle prolongement par continuité de $\boldsymbol{f}$ la fonction $\boldsymbol{g}$ définie par : $\begin{cases} \boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{f}(x) \quad ; \quad x \in D_f \\ \boldsymbol{g}(x_0) = l \end{cases}$

Exemple

Un prolongement par continuité de la fonction : $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x-1}$ au point $x_0 = 1$ est tel que : on a :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$; donc la fonction

$g(x) = \begin{cases} f(x) & ;\ x \in Df \\ g(1) = 1 \end{cases}$ est un prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Savoir-faire

A. Applications

Limites d'une fonction polynôme à l'infini

Exercice 1.

Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction : $f(x) = 3x^4 - 2x^2$

Solution

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $f(x) = 3x^4 - 2x^2 = 3x^4(1 - \dfrac{2}{3x^2})$ et on a: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 - \dfrac{2}{3x^2}) = 1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; Plus généralement, on a, la propriété suivante :

- La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme du plus haut degré.

Limite d'une fonction rationnelle à l'infini

Exercice 2.

Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction rationnelle : $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2x^2}{-7x^5 + 11}$.

Solution

On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $\dfrac{3x^4 + 2x^2}{-7x^5 + 11} = \dfrac{3x^4(1 + \dfrac{2x^2}{3x^4})}{-7x^5(1 - \dfrac{11}{7x^2})} = \dfrac{3x^4}{-7x^5} \times \dfrac{1 + \dfrac{2x^2}{3x^4}}{1 - \dfrac{11}{7x^5}}$; on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4}{7x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{7x} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1 + \dfrac{2x^2}{3x^4}}{1 - \dfrac{11}{7x^5}} = 1$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4 + 2x^2}{-7x^5 + 11} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4}{-7x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{-7x} = 0$,

plus généralement, on a la propriété suivante :
La limite à l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Autres types de fonctions

Exercice 3.

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ et en 2 de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8}$.

Solution

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} - x = +\infty - (+\infty) =$; donc on ne peut pas conclure directement.

  Mais, $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x^2+1} + x \neq 0$; donc on peut écrire ;

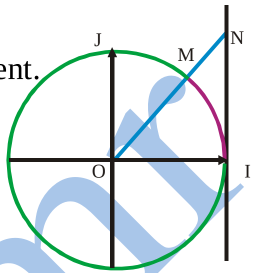
  $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1} + x)}$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = 0$.

- On a $\lim\limits_{x\to 2} x^2-4=0$ et $\lim\limits_{x\to 2} x^2+2x-8=0$; donc on ne peut conclure directement.

  Mais, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\ ;\ 2\}$;on a : $\dfrac{x^2\text{-}4}{x^2+2x\text{-}8}=\dfrac{(x\text{-}2)(x\text{+}2)}{(x\text{-}2)(x\text{+}4)}=\dfrac{(x\text{+}2)}{(x\text{+}4)}$.

  Or, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)}{(x+4)}=\dfrac{2}{3}$; donc $\lim\limits_{x\to 2} \boldsymbol{f}(x)=\dfrac{2}{3}$.

Exercice 4.



L'objectif de cet exercice est d'établir des limites qui seront investies ultérieurement.

1) Soit $x \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, M son image sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et N le point d'intersection de la droite (OM) avec la tangente de $\mathscr{C}$ en I.
Calculer en fonction de x les aires des triangles OIM et OIN,
ainsi que l'aire du secteur circulaire OIM.
En déduire que : $\sin x \le x \le \tan x$.

2) On suppose maintenant que $x \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$,

a) Démontrer que $|\sin x| \le |x|$,

en déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.

b) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \cos 2x = 1$, en déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

3) On suppose maintenant que $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;0\right[\cup \left]0\ ;\dfrac{\pi}{2}\right[$

a) Démontrer que : $\cos x \le \dfrac{\sin x}{x} \le 1$; en déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

b) Vérifier que

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=(\dfrac{\sin x}{x})^2.\dfrac{1}{1+\cos x}$,

en déduire que :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

c) Déterminer la limite en 0 de la fonction

$\boldsymbol{f}(x)=\lim\dfrac{\cos x-1}{x}$

Solution

1) $\mathscr{A}(\text{OIM})=\dfrac{B\times h}{2}=\dfrac{1\times\sin x}{2}=\dfrac{1}{2}\sin x$; $\mathscr{A}(\text{OIN})=\dfrac{B\times h}{2}=\dfrac{1\times\tan x}{2}=\dfrac{1}{2}\tan x$;

$\mathscr{A}(\overset{\frown}{\text{OIM}})=\dfrac{x}{2\pi}\times\pi\times 1^2=\dfrac{x}{2}$; $\mathscr{A}(\text{OIM}) \le \mathscr{A}(\overset{\frown}{\text{OIM}}) \le \mathscr{A}(\text{OIN}) \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{2}\le\dfrac{x}{2}\le\dfrac{\tan x}{2} \Leftrightarrow \sin x \le x \le \tan x$.

2) a) l'inégalité est évidente pour x = 0; pour $x \neq 0$; deux cas sont envisageables ;

- 1^{er} cas : $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$; d'après la question 1) ona : $0 \le \sin x \le x$; donc $|\sin x| \le |x|$.
- $2^{\text{ème}}$ cas : $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0$; on a : $0 \le -x \le \dfrac{\pi}{2}$; donc ; d'après 1) on a : $|\sin(-x)| \le |-x| \Rightarrow |\sin(x)| \le |x|$;

  On a ; $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ et $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$; $|\sin x| \le |x| \Rightarrow \lim\limits_{x\mapsto 0}\sin x=0$. (Th. des Gendarmes).

b) On a $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin^2 x)=1$.On pose x = 2a ; on a : $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{a\to 0}\cos 2a=1$

3) a) Deux cas sont à envisager :

- 1^{er} cas ; $0<x<\dfrac{\pi}{2}$; d'après la question 1) on a : $0<\sin x<x<\dfrac{\sin x}{\cos x}\le\dfrac{1}{\cos x}$; on en déduit que : $\cos x \le \dfrac{\sin x}{\cos x} \le 1$.
- $2^{\text{ème}}$ cas ; $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$; $\Rightarrow$ $0<-x<\dfrac{\pi}{2}$; d'après le cas précédent

  $\cos(-x) \le \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \le 1$; on en déduit que : $\cos x \le \dfrac{\sin x}{\cos x} \le 1$;

on a : $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$; donc,d'après les théorème d'encadrement : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

b) On a : $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^2 \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos x}{x^2}$.

De plus ; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$; donc, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

c) On a : $\frac{1-\cos x}{x} = x\frac{1-\cos x}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$

B. Exercices

1. Soit la fonction $f(x) = x - \sqrt{x}$,

Démontre que $\forall x \in]4 ; \infty[; f(x) > \sqrt{x}$.

2)a) Trouver un réel A pour lequel :

$x > A \Rightarrow f(x) > 10^4$

b) B étant un nombre réel strictement positif, trouve un réel A tel que $x > A \Rightarrow f(x) > B$.

c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Soit la fonction $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $|f(x) - 1| < \frac{1}{x}$,

2) a) Trouver un réel A pour lequel : $x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < 10^{-4}$.

b) ε étant u réel strictement positif, trouver un nombre réel A pour lequel $x > A \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

c) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

1) Démontrer que : $\forall x \in]1 ;+\infty[; f(x) > \frac{x}{2}$

2) a) Comment choisir x pour que $|f(x)| > 10^6$?

b) Peut-on rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut ?

c) En déduire la limite de f en $+\infty$.

4. Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer les limites des fonctions suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+\cos^2 x}$; $\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{1+\sin^2 x}$;

$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{1+\sin^2 x}$

5. Soit la fonction $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x} - 1}$

Démontrer que $\forall x \in]1 ;+\infty[; f(x) > \sqrt{x} + 1$, en

i) $f(x) = \frac{x^3+4}{1-2x}$; j) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{1-3x^2}$

7. Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f en x_0 (éventuellement à gauche et à droite).

a) $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$; $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$; $x_0 = -2$;

c) $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-2}$; $x_0 = -1$;

d) $f(x) = \frac{x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$; $x_0 = 2$;

e) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x}$; $x_0 = 0$;

8. Dans chacun des cas suivants étudier la limite de f en x_0 (éventuellement à gauche et à droite).

a) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $x_0 = 4$;

b) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; $x_0 = 2$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; $x_0 = 4$;

9. Dans chacun des cas suivants calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

a) $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{3x-1}$;b) $f(x) = x + 2+\sqrt{x^2-3x+1}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1}$;d) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$;f) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$.

10

déduire la limite de f en $+\infty$.

6. Dans chacun des cas suivants calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$; b) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$;

c) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x$; d) $f(x) = 4x^2 - 3x^2 + 2x$

e) $f(x) = -x^6 - x^2 + 4$; f) $f(x) = \dfrac{4x-5}{2x+3}$;

g) $f(x) = \dfrac{4x-5}{x+4}$; h) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^3-1}$;

11 Dans les deux cas suivants calculer la limite de f en 0.

a) $f(x) = \dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}}{x}$; b) $f(x) = \dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x}$.

12 Soit $f(x) = \dfrac{E(\sqrt{x})}{x}$, ou E désigne la partie entière.

1) Démontrer que : $\forall x \in \left]0;1\right[$; $f(x) = 0$, en déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2) Démontrer que : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$; $0 \le f(x) \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, en déduire la limite de f en $+\infty$.

13 Soit la fonction : $f(x) = \dfrac{x + E(\sqrt{x})}{x}$;

1) Démontrer que :

$\forall x \in \left]0;+\infty\right[$; $2 \le f(x) \le \dfrac{2x+1}{x}$,

2) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

14 Dans chacun des cas, étudier la continuité de f en x_0.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x - 7$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \sqrt{4-x}$; $x_0 = 4$,

c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x - 7}{8x^2 - 5x + 3}$; $x_0 = 1$,

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x+2}$; $x_0 = -2$.

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{\sin x}{x} + \tan x)$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{5x}$; f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}$; h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$

15 Etudier la continuité des fonctions en x_0.

a) $f(x) \begin{cases} x^2 + 4 \; ; x \le 2 \\ 3x + 2 \; ; x > 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

b) $f(x) \begin{cases} \dfrac{x+1}{2x+3} \; ; x \le 0 \\ x^2 + x + 0 \; ; x > 0 \end{cases}$; $x_0 = 0$

16 Donner les prolongements par continuité éventuelle de f en x_0.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 7x + 2}$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$; $x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $x_0 = 0$; d) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$; $x_0 = 0$

17 Vérifier que la fonction : $g(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ est le prolongement par continuité en 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.