Chapitre **4** ☛ # Barycentre

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I) Barycentre de quatre points dans le plan ou dans l'espace

1) Définition

Soit A ; B ; C ; D quatre points dans le plan ou dans l'espace.
Soit α ; β ; δ ; θ quatre réels tels que : $\alpha+\beta+\delta+\theta\neq 0$.

Le point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}+\theta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ existe et est unique, on l'appelle barycentre du système
$\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\delta);(D;\theta)\}$.

On écrit :

$$G=\mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D\\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta\end{array}$$

2) Existence et unicité

- Le point $G=\mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D\\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta\end{array}$ existe si, et seulement si, $\alpha+\beta+\delta+\theta\neq 0$.
- $G=\mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D\\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta\end{array}$ si, et seulement si,
- $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{AC}+\dfrac{\theta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{BA}+\dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{BC}+\dfrac{\theta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{BD}$
- $\overrightarrow{CG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{CA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{CB}+\dfrac{\theta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{DG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{DA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{DB}+\dfrac{\delta}{\alpha+\beta+\delta+\theta}\overrightarrow{DC}$

3) Isobarycentre

Lorsque $G=\mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D\\ \hline t & t & t & t\end{array}$; $t\in\mathbb{R}^*$

Alors, G est appelé isobarycentre des points A ; B ; C et D.

4) Conservation du barycentre $G=\mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D\\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta\end{array}$

- En multipliant ou en divisant les masses α ; β ; δ ; θ par un même réel non nul, alors G est conservé.

Exemple $G=\mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D\\ \hline 2 & 2 & 2 & 2\end{array}=\mathrm{bar}\begin{array}{c|c|c|c|}A & B & C & D\\ \hline 1 & 1 & 1 & 1\end{array}$

- Si une seulement des masses de G est nulle, alors G est un barycentre de trois points.

Exemple $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & 0 \end{array} = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta \end{array}$

- Si deux seulement des masses de G sont nulles, alors G est un barycentre de deux points.

Exemple $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & 0 & 0 \end{array} = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$

- En remplaçant un groupe de points de G par leur barycentre partiel affecté de la somme non nulle de leurs masses, alors G est conservé.

Exemple $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}$; avec $I = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & C \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ (barycentre partiel de G);

On a : $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} I & B & D \\ \hline 3 & -1 & 3 \end{array}$; Avec $J = \text{bar}\begin{array}{c|c|} B & D \\ \hline -1 & 3 \end{array}$ (barycentre partiel de G)

On a $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} I & J \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

- En augmentant les points du barycentre G, sans changer la somme initiale des masses α ; β ; δ ; θ, alors, G est conservé.

Exemple $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} A & B & B & C & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$

$= \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|c|} A & B & C & D & E \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} A & B & C & D & E & E \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 2 \end{array}$

5) Fonction vectorielle de Leibniz

Soit A ; B ; C ; D quatre points donnés dans le plan (ou dans l'espace)

Soit α ; β ; δ ; θ quatre réels donnés.

A tout point M du plan (ou de l'espace), on associe le vecteur : $\boldsymbol{f}(M) = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \theta\overrightarrow{MD}$.

La fonction f ainsi définie est appelée fonction vectorielle de Leibniz associée au système :

$\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\delta);(D;\theta)\}$.

En plus

Si,	**alors**
$\alpha + \beta + \delta + \theta \neq 0$	$\boldsymbol{f}(M) = (\alpha+\beta+\gamma+\theta)\overrightarrow{MG}$ avec, $G = \text{bar}\begin{array}{c\|c\|c\|c\|} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta \end{array}$ Exemple : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = 5\overrightarrow{MG}$ avec ; $G = \text{bar}\begin{array}{c\|c\|c\|c\|} A & B & C & D \\ \hline 2 & 1 & 3 & -1 \end{array}$
	$\boldsymbol{f}$(M) est un vecteur constant, indépendant de M.

$\alpha+\beta+\delta+\theta=0$	C'est-à -dire : $\forall$ M, N : $\boldsymbol{f}$(M) = $\boldsymbol{f}$(N). Exemple : $\boldsymbol{f}(M) = \boldsymbol{f}(A) = \beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}+\theta\overrightarrow{AD}$

II) Barycentre de trois points

Soit A ; B ; C trois points dans le plan ou l'espace, Soit α ; β ; δ trois réels tels que : $\alpha+\beta+\delta\neq 0$

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{array} \Leftrightarrow \alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC} = 0$$

- Si, l'une seulement des masses de G est nulle, alors G est le barycentre des deux autres points.

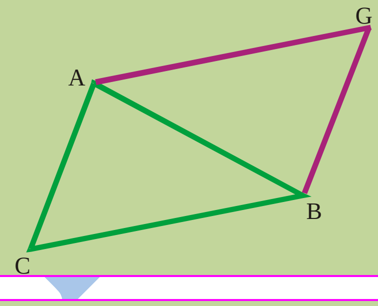
Exemple

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & 0 \end{array} = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$$

- Soit ABC un triangle,

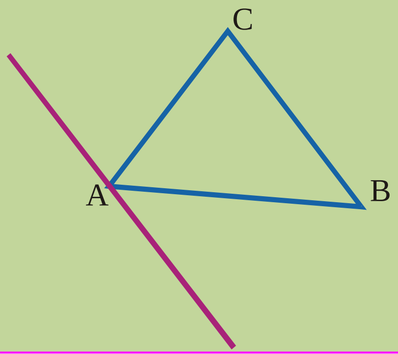
G ; A ; B ; C sont les sommets d'un parallélogramme sur lequel G est opposé à C, si et seulement si,

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & -1 \end{array}$$



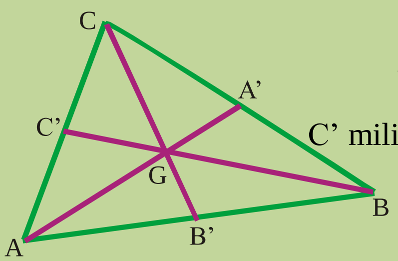
On a : $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & t & -t \end{array}$; $t\in R$

Si et seulement si,
G appartient à la parallèle à (BC) passant par A.



$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

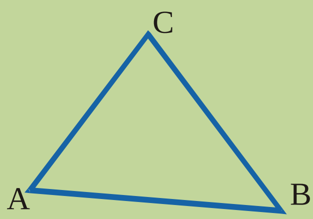
G est le point de concours des médianes (AA') ; 'BB') ; (CC') du triangle ABC ; $\Leftrightarrow$
G est le centre de gravité du triangle ABC.



A' milieu de [BC]
B' milieu de [CA]
C' milieu de [AB]

Soit $\mathscr{P}$ le plan (ABC) dans l'space.

$$\mathscr{P} = \left\{M\in\mathscr{E} \;/\; M = \text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta \end{array} \;;\; \alpha+\beta+\gamma\neq 0\right\}$$



III) Barycentre de deux points

Soit A ; B deux points distincts donnés dans le plan ou dans l'espace,
Soit α ; β deux réels donnés tels que : $\alpha+\beta\neq 0$;

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha & \beta \end{array}$$

; si, et seulement si ;

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0} \\ \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA} \\ G;A;B \text{ sont alignés} \end{cases}$$

Egalités permettant de construire G.

Exemple $G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 2 & 3 \end{array} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

- Un point G est aligné avec deux points A et B si, et seulement si,

$$G = \begin{array}{c|c} A & B \\ \alpha & \beta \end{array} \quad ; \quad \alpha+\beta\neq 0.$$

- [A ; B] est un segment de milieu I.

$\Leftrightarrow I = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow B = \text{bar}\begin{array}{c|c} I & A \\ 2 & -1 \end{array} \Leftrightarrow A = \text{bar}\begin{array}{c|c} I & B \\ 2 & -1 \end{array}$

- Soit A et B deux points distincts dans le plan ou dans l'espace

$(AB) = \left\{M \ / \ M = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \alpha & \beta \end{array} \ ; \ \alpha+\beta\neq 0\right\}$

$[AB] = \left\{M \ / \ M = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \alpha & \beta \end{array} \ : \alpha+\beta\neq 0 \text{ et } \alpha\times\beta\geq 0\right\}$

$[AB] = \left\{M \quad M = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 1-k & k \end{array} \ ; \ k\in[0;1]\right\}$

- (AB) et (CD) sont sécantes en G, si et seulement si,

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 \end{array}$; $\alpha_1+\beta_1\neq 0$ **et** $G = \text{bar}\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 \end{array}$; $\alpha_2+\beta_2\neq 0$

- (AB) ; (CD) et (EF) sont concourantes en G, si et seulement si,

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 \end{array}$; $\alpha_1+\beta_1\neq 0$ **et** $G = \text{bar}\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 \end{array}$; $\alpha_2+\beta_2\neq 0$

et $G = \text{bar}\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline \alpha_3 & \beta_3 \end{array}$; $\alpha_3+\beta_3\neq 0$

IV) Coordonnées d'un barycentre

Soit $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline \alpha & \beta & \delta & \theta \end{array}$; $\alpha+\beta+\delta+\theta\neq 0$,

Dans le plan rapporté à un repère $(o;\vec{i};\vec{j})$	Dans l'espace rapporté à un repère $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \delta x_C + \theta x_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \delta y_C + \theta y_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$	$x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \delta x_C + \theta x_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \delta y_C + \theta y_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$ $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \delta z_C + \theta z_D}{\alpha+\beta+\delta+\theta}$

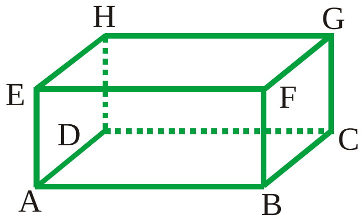
Savoir-faire

A. Applications

Alignement de points

Exercice 1

ABCDEFGH est un pavé.
I est le centre de gravité du triangle BDE.
Montrer que les points A ; I ; G sont alignés.



Solution

Comme EFGH est un parallélogramme.
Donc,

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} E & F & H \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Or, ABFE et ADHE sont des parallélogrammes, d où

$$F = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & E \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{et} \quad H= \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & D & E \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} E & A & B & E & A & D & E \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \;;\; G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & D & E \\ \hline -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Donc

$$\text{Donc, } G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & I \\ \hline -2 & 3 \end{array}$$

Donc, les points A ; I ; G sont alignés.

Concours de droites

Exercice 2

ABCD un tétraèdre. ABPC, ABQD, ACRD sont des parallélogrammes.
1) Montrer que les droites (DP), (CQ) et (BR) sont concourantes.
2) Que peut-on dire des quadrilatères : DCPQ, DBPR, CBQR ?

Solution

Comme ABPC ; ABQD, ACRD sont des parallélogrammes.

$$\text{Donc, } P = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \;;\; Q = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array} \;;\; R = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & C & D \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array}$$

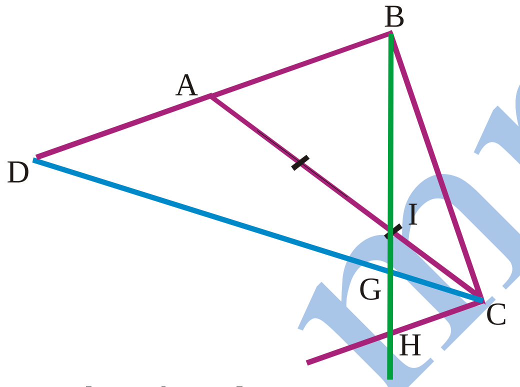
$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} D & P \\ \hline 1 & 1 \end{array} \;;\; G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} C & Q \\ \hline 1 & 1 \end{array} \;;\; G = \text{bar}\begin{array}{c|c|} B & R \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

D'où G $\in$ (DP) ; G $\in$ (CQ) ; G $\in$ (BR).
Donc les droites (DP) ; (CQ) ; (BR) sont concourantes en G.
2) Comme G est le milieu des segments [DP] ; [CQ] et [BR],
Donc, PCQR ; DBPR ; CBQR sont des parallélogrammes.

Détermination des masses d'un barycentre

Exercice 3



ABC un triangle, $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

D est le symétrique de B par rapport à A.
Les droites (BI) et (CD) se coupent en G.
La parallèle à (AB) passant par C, coupe (BI) en H.
1) Déterminer des réels α_1 ; β_1 ; γ_1 tels que :

$$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \hline\end{array}$$

2) Déterminer des réels α_2 ; β_2 ; γ_2 tels que : $H = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \hline\end{array}$

3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| = 5\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\|$$

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

Solution

1) $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, donc, $I = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$

Comme A milieu de [BD], donc $D = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline A & B \\ \hline 2 & -1 \\ \hline\end{array}$

Or, G $\in$ (IB), donc $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline I & B \\ \hline 3 & \beta \\ \hline\end{array}$ donc, $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & \beta & 2 \\ \hline\end{array}$

Or, G$\in$ (CD), donc $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|}\hline C & D \\ \hline \delta & 1 \\ \hline\end{array}$ donc, $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & -1 & \delta \\ \hline\end{array}$

Donc, $\frac{2}{1} = \frac{-1}{\beta} = \frac{\delta}{2}$, donc ; $2\beta = -1$ d'où $\beta = -\frac{1}{2}$.

Donc; $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & -\frac{1}{2} & 2 \\ \hline\end{array}$; Donc $G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 2 & -1 & 4 \\ \hline\end{array}$

2) Comme H $\in$ (BI), Donc; $H = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & t & 2 \\ \hline\end{array}$

Or ; H $\in$ la parallèle à, (AB) passant par C.

Donc ; 1 + t = 0 ; d'où t = -1. Donc; $H = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ \hline\end{array}$

3) $2\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| = 5\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| \Leftrightarrow$

$2\left\|(2-1+4)\overrightarrow{MG}\right\| = 5\left\|(1-1+2)\overrightarrow{MH}\right\| \Leftrightarrow$

$2 \times 5 \times MG = 5 \times 2 \times MH \Leftrightarrow$
$MG = MH$
Donc, l'ensemble demandé est la médiatrice du segment [GH].

4) $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow$

$(2-1+4)\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BB} + 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$

$5\overrightarrow{MG}$ est colinéaire $(1+2)\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{MG}$ est colniéaire $\overrightarrow{BI}$.

Donc l'ensemble demandé est la droite (IB).

B. Exercices

1. (AB) est une droite, I ; J ; K les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

1) Faire une figure.
2) Compléter les tableaux :

$I = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline & \end{array}$; $J = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline & \end{array}$; $K = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline & \end{array}$

2. (AB) une droite, I ; J ; K les points tels que :

$I = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline 2 & 2 \end{array}$; $J = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline 2 & -1 \end{array}$; $K = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline 1 & 3 \end{array}$

$L = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline -1 & 2 \end{array}$

1) Comment sont les points I ; J ; K ; L.
2) Faire une figure.
3) Montrer que I est le milieu de [JL].

3. [AB] un segment de milieu I.

$C = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array}$; $D = \text{bar}\begin{array}{c|c|} A & B \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{array}$

1) Faire une figure.
3) Montrer que I est le milieu de [CD].

4. ABC un triangle. Construire les points :

$G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array}$; $H = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{array}$

$E = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}$; $F = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{array}$

5. ABC un triangle, I, J , K les points tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$;

$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

1) Faire une figure.
2) Compléter les tableaux :

2) Montrer que G est le centre de gravité du triangle ZAH.

7. MEDOU une pyramide de sommet M, de base un parallélogramme EDOU de centre I, J et K les centres de gravités respectifs des triangles MED et MOU.
Montrer que les droites (MI) et (JK) sont sécantes .

8. ABCD un tétraèdre I ; J ; K ; L ; M sont les milieux respectifs de [AB] ; [BD] ; [BC] ; [CD] ; [DA] ; [CA].
Montrer que les droites (IL) ; (JN) ; (KM) sont concourantes.

9. ABC un triangle. G et H les points tels que:
$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BC}$

1) Faire une figure.
2) Montrer que les points A ; G ; H sont alignés.

10 ABCD un carré de centre O, I et J les points tels que :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CD}$.

E le symétrique de C par rapport au milieu de [AB].

1) Déterminer $\text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$

2)Construire $G = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|c|} A & B & C & D \\ \hline 2 & 1 & 1 & 5 \end{array}$

3) Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que :
$9\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 4\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{MD}\right\|$

4) Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|4\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}\right\|$

11 ABCD un carré.
E est le symétrique de C par rapport à D.
1) Déterminer des réels α ; β ; γ tels que :

$E = \text{bar}\begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta \end{array}$

2) Soit F le symétrique de C par rapport à B.

$I = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$; $J = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$; $K = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline & & \\ \hline\end{array}$

6. MED un triangle de centre de gravité G, Z ; A ; H les points tels que :

$$\overrightarrow{MZ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ME} \ ; \ \overrightarrow{EA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED} \ ; \ \overrightarrow{DH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DM}$$

1) Faire une figure.

2) Déterminer des réels α ; β ; γ tels que :

$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta \\ \hline\end{array}$

3) La droite (BG) coupe (AC) en K, déterminer la position de K sur la droite (AC).

13 ABCD un carré de centre O.

Dans chacun des cas suivants, simplifier le vecteur proposé.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$; $-\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

Montrer que A est le milieu de [EF].

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

12 ABC un triangle, I ; J les points tels que

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BL}$.

Les droites (IC) et (JA) se coupent en G.

1) Faire une figure.

15 ABCD un carré. I ; J ; K ; L les milieux respectifs de [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA] ; G est le centre de gravité du triangle ABC.

Préciser chacun des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$;

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}$;

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

15 ABC un triangle. I un point tel que :

$\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

La parallèle à (AB) passant par C coupe (AI) en G.

Faire une figure

Déterminer des réels α ; β ; γ tel que :

$G = \text{bar}\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \alpha & \beta & \delta \\ \hline\end{array}$

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| \leq \frac{3}{4}\left\|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\|$$