Chapitre 5 # Dérivation & primitives

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Dérivation en un point

1) Nombre dérivé d'une fonction en x_0

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in$ I, on dit que f est dérivable en x_0 si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie en x_0.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et notée $f'(x_0)$.

On a , alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Remarque

On peut également poser $h = x - x_0$, lorsque x tend vers x_0, h tend vers 0.

On a, donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Exemple

Soit la f fonction définie par $f(x) = x^2$, étudions la dérivabilité de f en $x_0 = -1$.

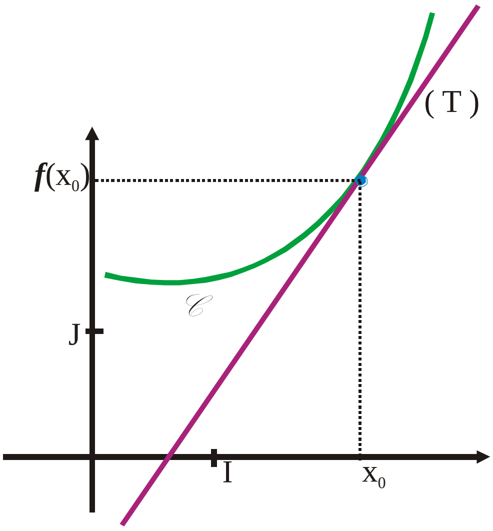
On a : $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} = (x-1)$, d'où $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1}(x-1) = -2$,

La fonction f est donc, dérivable en -1 et $f'(-1) = -2$.

Interprétation graphique

Soit f une fonction, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x_0.
Si f est dérivable en x_0, alors $\mathscr{C}$ admet une tangente (T) en A, dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.
Une équation de (T) est donc :

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.



Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x - 3$.
Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse $x_0 = 2$.

On a : $f(2) = 4 + 2 - 3 = 3$;

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2+x-3)-4-2+3}{x+2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2}(x+3) = 5$;

d'où $f'(2) = 5$.

Donc, l'équation de la tangente est : $y - 3 = 5(x - 2) \Rightarrow y = 5x - 7$.

2) Dérivabilité à gauche, Dérivabilité à droite

Définitions : Soit ***f*** une fonction définie en x_0.

a) On dit que f est dérivable à gauche en x_0, si ***f*** est définie sur un intervalle de la forme] a ; x_0] et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à gauche en x_0.

Cette limite est appelée nombre dérivé de ***f*** à gauche en x_0.

b) On dit que ***f*** est dérivable à droite en x_0, si ***f*** est définie sur un intervalle de la forme] x_0 ;b] et $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie à droite en x_0.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en x_0.

Exemple

Soit ***f*** la fonction définie par $f(x)=\left|x^2-1\right|$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Etudions la dérivabilité de ***f*** en 1.

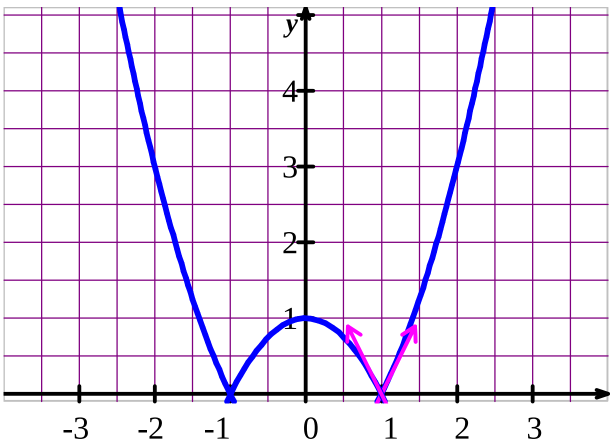
f(1) = 0 ; $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\left|x^2-1\right|}{x-1}$; ce rapport est égal à : $\begin{cases}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} & ;\ \text{si } x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left]1;\infty\right[\\ -\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} & ;\ \text{si } x\in\left[-1;1\right[\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases}(x+1) & ;\ \text{si } x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left]1;\infty\right[\\ -(x+1) & ;\ \text{si } x\in\left[-1;1\right[\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^-}-(x+1)=$ -2 d'où $= f_g'(1)=$ -2 ; $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$, d'où $f_d'(1)=2$.

Donc, ***f*** est dérivable à gauche en 1 et admet -2 pour nombre dérivé à gauche en 1.
Elle est aussi, dérivable à droite en 1 et admet 2 pour nombre dérivé à droite en 1.

$\mathscr{C}$ admet une demi-tangente à gauche au point d'abscisse 1, de coefficient directeur -2.
Elle admet aussi, une demi-tangente à droite au point d'abscisse 1, de coefficient directeur 2.



Propriété

Une fonction ***f*** est dérivable en x_0 si et seulement si, elle est dérivable à gauche en x_0 et les nombres dérivés à gauche et à droite sont égaux.

Exemple

Soit ***g*** la fonction définie par : $\begin{cases}(x+1) & ;\ \text{si } x\in\left]-\infty;-1\right]\cup\left]1;\infty\right[\\ -(x+1) & ;\ \text{si } x\in\left[-1;1\right[\end{cases}$

- A gauche de 1 ; $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=(x+1)\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2$;

  d'où $g_g'(1)=2$.

- A droite de 1 ; $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\dfrac{2-\frac{2}{x}}{x-1}=\dfrac{2x(x-1)}{(x-1)}=2x \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}2x=2$;

  d'où $g_d'(1)=2$;

L'égalité des deux nombres dérivés prouve la dérivabilité de g en 1.

Demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme] a ; x_0] ou [x_0 ; b[.
Si , $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite infinie à gauche ou à droite en x_0, alors la courbe représentative de f admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse x_0.

Exemple

Le repère (O ; I ; J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative :

On a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; d'où $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

$\mathscr{C}$ admet une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées au point d'abscisse 0.

3. Fonction dérivées

Définition

On dit qu'une fonction f est dérivable, sur un intervalle I, lorsqu'elle est dérivable en tout point de cet intervalle.
La fonction de I dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée dérivée de f est notée f '.

Exemples

- Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$, soit x_0 un nombre réel quelconque.
  Etudions la dérivabilité de f en x_0.

  $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\dfrac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)}=(x+x_0)$; $\lim\limits_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$

  Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est : $f'(x) = 2x$
- Soit la fonction g définie sur [0 ; +∞[par $g(x) = \sqrt{x}$, soit x_0 élément de]0 ; +∞[.

  $\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\dfrac{(x-x_0)}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \Rightarrow$

  $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$; donc g est dérivable sur]0 ; +∞[et sa fonction dérivée est $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

II. Calculs des dérivées

1. Dérivées des fonctions usuelles

- Fonction : $f\ x \longmapsto k\ (k \in \mathbb{R})$,

  Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; pour tout $x \neq x_0$; $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{k-k}{x-x_0} = \dfrac{0}{x-x_0} = 0$; d'où $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$,

- La fonction $f\ x \longmapsto k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 0$

- Fonction : $f\ x \longmapsto x$

  Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout réel $x \neq x_0$; $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1$; $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$,

La fonction $f\ x \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 1$

- Fonction : $f\ x \longmapsto x^2$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout réel $x \neq x_0$; $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \dfrac{(x-x_0)(x+x_0)}{(x-x_0)} = (x+x_0)$; $\lim\limits_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0$

La fonction $f\ x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = 2x$

- Fonction : $f\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^* /\ x \neq x_0$; $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \dfrac{-(x-x_0)}{(x-x_0)xx_0} = -\dfrac{1}{xx_0}$; $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{-1}{xx_0} = \dfrac{-1}{x_0^2}$

La fonction $f\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

- Fonction : $f\ x \longmapsto \sqrt{x}$

  Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* /\ x \neq x_0$;

  $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}\ ;\ \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

La fonction $f\ x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- Fonctions : $f\ x \longmapsto \sin x$ et $f\ x \longmapsto \cos x$

La fonction $f : x \longmapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto \cos x$
La fonction $f : x \longmapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto -\sin x$

II.2 Dérivées et opérations sur les fonctions

Dérivée de la somme de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, f' et g' leurs dérivées respectives.

La fonction $f + g$ est dérivable sur I et on a : $(f + g)' = f' + g'$

Exemples

Soit la fonction U définie par : $U(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

Posons $\boldsymbol{f}(x) = x^2$; et $\boldsymbol{g}(x) = \frac{1}{x}$, on a $\boldsymbol{f}'(x) = 2x$; $\boldsymbol{g}'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

U est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $U'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

Dérivée du produit de deux fonctions

Soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I, $\boldsymbol{f}'$ et $\boldsymbol{g}'$ leurs dérivées respectives.

> La fonction $\boldsymbol{f} . \boldsymbol{g}$ est dérivable sur I et on a : $(\boldsymbol{f} . \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'.\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}.\boldsymbol{g}'$

Cas particuliers

- Si, $\boldsymbol{g}$ est la fonction définie par $\boldsymbol{g}(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$), on $\boldsymbol{g}'(x) = 0$;
  On en déduit que $(k\boldsymbol{f})' = k . \boldsymbol{f}'$
- Si, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$ on a : $\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{g}'$, on en déduit que $(\boldsymbol{f}^2)' = 2\boldsymbol{f}' .\boldsymbol{f}$.

Exemple

Soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions définies par $\boldsymbol{f}(x) = x^2\cos x$ et $\boldsymbol{g}(x) = 5x^2$.

$\boldsymbol{f}'(x) = (x^2)'.\cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cos x - x^2\sin x$;

$\boldsymbol{g}'(x) = 5(x^2)' = 5 \times 2x = 10x$.

Dérivée de la puissance d'une fonction

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et n un entier supérieur ou égal à 2.

> La fonction $\boldsymbol{f}^n$ est dérivable sur I et on a $(\boldsymbol{f}^n)' = n. \boldsymbol{f}'.\boldsymbol{f}^{n-1}$.

Exemple

- Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par $f(x) = x^n$ (n entier et $n \geq 2$),
  $\boldsymbol{f}'(x) = (x^n)' = n(x)'.x^{n-1} = n(1)\, x^{n-1}$.
- Soit $\boldsymbol{g}$ la fonction définie par $\boldsymbol{g}(x) = \cos^3 x$
  $\boldsymbol{g}'(x) = (\cos^3 x)' = 3(\cos x)'(\cos^2 x) \Rightarrow \boldsymbol{g}'(x) = -3\sin x \cos^2 x$.

Dérivée de l'inverse d'une fonction

Soit $\boldsymbol{g}$ une fonction dérivable sur un intervalle I tel que, pour $x \in I$, $\boldsymbol{g}(x) \neq 0$.

> La fonction $\frac{1}{\boldsymbol{g}}$ est dérivable sur I et on a $\left(\frac{1}{\boldsymbol{g}}\right)' = \frac{-\boldsymbol{g}'}{\boldsymbol{g}^2}$.

Exemple

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par : $\boldsymbol{f}(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $\boldsymbol{f}'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Dérivée du quotient de deux fonctions

Soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I tel que, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$.

> La fonction $\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ est dérivable sur I et on a $\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)' = \frac{\boldsymbol{f}'\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}'}{\boldsymbol{g}^2}$.

Exemple

f est une fonction définie par ***f***(x) = $\dfrac{1-x}{2x^2+1}$,

f ’(x) = $\dfrac{(1-x)'(2x^2+1)-(1-x)(2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2} = \dfrac{-1(2x^2+1)-(1-x)(4x)}{(2x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2-4x-1}{(2x^2+1)^2}$.

Dérivée de la racine carrée d’une fonction

Soit ***f*** une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, tel que, pour x $\in$I, ***f***(x) > 0.

> La fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a : $(\sqrt{f})' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Exemple

Soit la fonction ***f*** définie par ***f***(x) = $\sqrt{x^2+1}$.

Pour tout x $\in \mathbb{R}$, x^2 + 1 > 0 ; ***f*** est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

f ’(x) = $\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Dérivée de la fonction *f*(ax + b)

Soit ***f*** une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, ***f* :** x $\longmapsto$ ax + b (a $\neq$ 0)

Une fonction affine et J l’image réciproque de I par cette fonction.

> La fonction : x $\longmapsto$ ax + b ; est dérivable sur J et on a (f(ax +b))’ = a ***f*** ’(ax +b)).

Exemple

Soit la fonction ***f*** définie par ***f***(x) = cos(2x - $\dfrac{\pi}{3}$) ;

f ’(x) = 2 × (-)sin(2x - $\dfrac{\pi}{3}$) = -2 sin(2x - $\dfrac{\pi}{3}$).

3 .Tableau récapitulatif

f	***f*** ‘	Ensemble de dérivabilité
$x \longmapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^*_+$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \tan x$	$x \longmapsto 1+\tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi ; k \in \mathbf{Z}\right\}$

f	***f*** ‘
U + V	U’ + V’
kU	kU’
UV	U’V + UV’
$\dfrac{1}{V}$	$\dfrac{-V'}{V^2}$
$\dfrac{U}{V}$	$\dfrac{U'V-UV'}{V^2}$
U^n	$nU'U^{n-1}$
$\sqrt{U}$	$\dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$
$x \longmapsto U(ax+b)$	$x \longmapsto aU'(ax+b)$

III. Applications de la dérivation

1. Sens de variation

Théorème (admis)

Soit ***f*** une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

- ***f*** est croissante sur I, si, et seulement si, ***f*** ' est positive sur I,
- ***f*** est décroissante sur I, si, et seulement si, ***f*** ' est négative sur I,
- ***f*** est constante sur I, si, et seulement si, ***f*** ' est nulle sur I,

Exemple

Soit f la fonction définie par : f(x) = x3 -3x -1, ***f*** est dérivable sur□ et
f'(x) = $3x^2$ -3= $3(x^2$ -1)= 3(x – 1) (x +1).

∀ x ∈]-∞ ; -1[∪]1 ; +∞[, ***f***'(x) > 0, donc ***f*** est croissante, ∀ x ∈[-1 ; 1], donc ***f*** est décroissante, on en déduit le tableau de ***f*** que l'on complète en calculant ***f*** (1)= 1 et ***f*** (-1)= -3

x	-∞		-1		1		+∞
f '(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		↗	1	↘	-3	↗	

2. Extremum relatif d'une fonction

Propriété (admise)

Soit ***f*** une fonction dérivable sur un intervalle] a ; b[et x_0 ∈] a ; b[, si ***f*** 's'annule et change de signe en x_0, alors ***f*** admet un extremum relatif en x_0.

x	a		x_0		b
f '(x)		+		-	
f(x)		↗	M	↘	

f admet un maximum relatif M en x_0

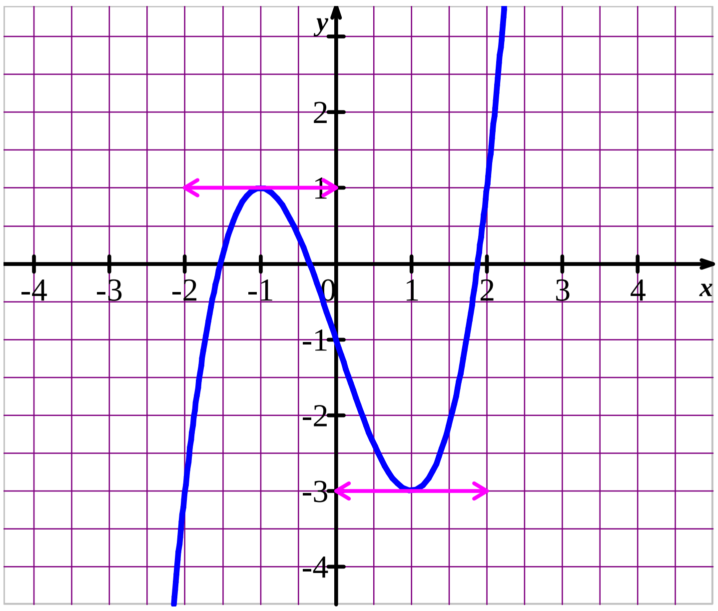
x	a		x_0		b
f '(x)		-		+	
f(x)		↘	m	↗	

f admet un minimum relatif m en x_0

Exemple

la courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction ***f*** de l'exemple précédent :
f (x) = x^3 -3x -1.

- ***f*** ' s'annule et change de signe en (-1) et en (1).
- ***f*** admet un maximum relatif (1) en (-1) et un minimum relatif (-3) en (1).



VI. Primitive d'une fonction

1. Définition

Soit deux fonctions f et F dérivables sur un intervalle I.
La fonction F est une primitive de f sur I si pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$.

Exemples

- La fonction $F : x \longmapsto 3x + 4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto 3$.
- La fonction $F : x \longmapsto x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto 2x$
- La fonction $F : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une primitive sur $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{-1}{x^2}$
- La fonction $F : x \longmapsto \sqrt{x}$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Ensemble de primitives d'une fonction sur un intervalle

Soit F une primitive sur l'intervalle I de la fonction f,
pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
Si k est un réel, la fonction G définie sur I par :
$G(x) = F(x) + k$ est dérivable sur I et $G'(x) = F'(x) = f(x)$.
Donc G est une primitive de f sur I.

Réciproquement,

Si F et G sont deux primitives de f sur I, la fonction $H = G - F$ est dérivable sur I ;
$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$; il existe donc un réel k tel que :
$H(x) = k \Leftrightarrow G(x) - F(x) = k \Leftrightarrow G(x) = F(x) + k$.

D'où le théorème suivant :

Si F est primitive de f sur un intervalle I, toute autre primitive G de f est telle que pour tout x de I :
$G(x) = F(x) + k$ où k est une constante.
Ainsi, toute les primitives de $x \longmapsto 2x$ sont les fonctions : $x \longmapsto x^2 + k$.

3. Tableau de primitives usuelles

Fonction f	Primitive F	Sur I
a	$ax + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$;	$\tan x + k$	$\cos x \neq 0$
$\sin(ax + b)$; $a \neq 0$; $\cos(ax + b)$; $a \neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b)$ $\frac{1}{a}\sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\frac{U'(x)}{(U(x))^2}$	$\frac{-1}{U(x)}$	$U(x) \neq 0$
$\frac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$	$2\sqrt{U(x)}$	$U(x) > 0$

Savoir-faire

A. Application

Dérivation en un point

Exercice 1.

Dans chacun des cas suivants, calculer le nombre dérivé de la fonction ***f*** en x_0, puis donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse x_0.

a) $f(x) = x^2 - x$; $x_0 = 1$; b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $x_0 = 2$

Solution

a) $f(1) = 0$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-x}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to1} x = 1$; donc, $f'(1) = 1$, d'où l'équation de la tangente cherchée est : $y - 0 = 1(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1$;

b) $f(2) = 3$;

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{\frac{x-1}{x-1}-3}{x-2} = \frac{x+1-3x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2x+4}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{(x-1)} \ ;$$

$f'(2) = \lim\limits_{x\to2}\dfrac{-2}{x-1} = -2$; d'où l'équation de la tangente cherchée est : $y - 3 = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 7$;

Exercice2.

On considère la fonction ***f*** définie par $f(x) = |x-2|$.

a) Donner l'expression de la fonction ***f*** sans le signe de la valeur absolue ; b) Etudier la dérivabilité de ***f*** en 2.

Solution

a) $\begin{cases} f(x) = -x+2 & ;\ \text{si } x < 2 \\ f(x) = x-2 & ;\ \text{si } x \geq 2 \end{cases}$; $f(2) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-x+2}{x-2} = -1$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x-2}{x-2} = 1$.

f est dérivable à gauche en 2 et $f_g(2) = -1$; ***f*** est dérivable à droite en 2 et $f_d(2) = 1$.

Calcul de dérivées

Exercice3.

Déterminer la dérivée de la fonction ***f*** dans chacun des cas suivants : a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$;

b) $f(x) = x\cos x$; c) $\dfrac{2-3x}{x^2-1}$; d) $f(x) = \sqrt{x(3-x)}$; e) $f(x) = \sin(3x - \dfrac{\pi}{2})$;f) $\dfrac{2x^2+7x+4}{x+3}$; ***g)*** $(2x^2 + 3x)^2$

Solution

Fonction	Dérivée
$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2$	$f'(x) = 12x^2 - 10x$
$f(x) = x\cos x$	$f'(x) = (x)'.\cos x + x \times (-\sin x) = \cos x - x\sin x$
$f(x) = \dfrac{2-3x}{x^2-1}$	$f'(x) = \dfrac{-3(x^2-1)-2x(2-3x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-3x^2+3-4x+6x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^2-4x+3}{(x^2-1)^2}$
$f(x) = \sqrt{x(3-x)}$	$f'(x) = \dfrac{(3x-x^2)'}{2\sqrt{3x-x^2}} = \dfrac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$
$f(x) = \sin(3x - \dfrac{\pi}{2})$	$f'(x) = 3\cos(3x - \dfrac{\pi}{2})$
$f(x) = \dfrac{2x^2+7x+4}{x+3}$	$f'(x) = \dfrac{(4x+7)(x+3)-1(2x^2+7x+4)}{(x+3)^2} = \dfrac{4x^2+19x+21-2x^2-7x-4}{(x+3)^2}$
$f(x) = \dfrac{2x^2+7x+4}{x+3}$	$f'(x) = \dfrac{2x^2+12x+17}{(x+3)^2}$
$f(x) = (2x^2 + 3x)^4$	$f'(x) = 4(4x + 3)(2x^2 + 3x)^3$

Applications de la dérivation

Exercice 4.

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par $\boldsymbol{f}(x) = 2x^4 - x^2 - 1$.

Calculer la dérivée de $\boldsymbol{f}$ et dresser son tableau de variation, citer les extremums relatifs de $\boldsymbol{f}$

Solution

$f\,'(x) = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 2x(2x-1)(2x+1)$; $f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

$f(0) = -1$; $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{-9}{8}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f\,'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		↘	$\frac{-9}{8}$	↗	-1	↘	$\frac{-9}{8}$	↗	

- $\boldsymbol{f}$ ' s'annule et change de signe en $-\frac{1}{2}$; 0 ; $\frac{1}{2}$.
- $\boldsymbol{f}$ admet un maximum relatif (-1) en 0 et en minimum relatif $(\frac{-9}{8})$ en $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Primitives d'une fonction

Exercice 5.

Déterminer sur l'intervalle I une primitive $\boldsymbol{F}$ de la fonction $\boldsymbol{f}$ dans chacun des cas suivants

a) $f(x) = 3x - 4$; $I = ;$ ℝ b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 4$; $I =$ ℝ c) $f(x) = \frac{-2}{x^2}$; $I =]0; +\infty[$;

d) $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$; $I =$ ℝ e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; $I =]1; +\infty[$ f) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)}}$; $I =$ ℝ .

Solution

Fonction	Primitive
$f(x) = 3x - 4$	$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$
$f(x) = -2x^2 + 3x + 4$	$F(x) = \frac{-2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x$
$f(x) = \frac{-2}{x^2}$	$F(x) = \frac{2}{x}$
$f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x^2+1}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$;	$F(x) = 2\sqrt{x-1}$
$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)}}$;	$F(x) = 2\sqrt{x^2+3}$

B. Exercices

1. Dans chacun des cas suivants, calculer, en utilisant la définition, le nombre dérivé de la fonction f en x_0.

a) $f(x) = -3x^2 +4x +5$; $x_0 = 2$

b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$; $x_0 = \dfrac{-1}{2}$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$; $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sqrt{2x+5}$; $x_0 = -\dfrac{1}{2}$

e) $f(x) = 3 + 2x - 4x^2$; $x_0 = 0$;

f) $f(x) = x^3 +1$; $x_0 = -1$

2. Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x_0.

a) $f(x) = x^2 -3x -1$; $x_0 = -2$

b) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$; $x_0 = \dfrac{1}{3}$;

c) $f(x) = \dfrac{2-3x}{x-2}$; $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \sqrt{2x-3}$; $x_0 = 2$;

e) $f(x) = x^3$; $x_0 = \dfrac{1}{2}$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x_0 = -2$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{x}$.
$\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Calculer le nombre dérivé de f en en 2.

c) Calculer le nombre dérivé de f en 0 et donner une équation de la demi-tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. Soit f la fonction définie par $f(x) = x|x - 3|$

a) Calculer le nombre dérivé de f à droite et à gauche en 3.
f est-elle dérivable en 3.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

5. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \ ; \text{ si } \quad x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{x+1} \ ; \text{ si } \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Démontrer que f est continue en 1.
Etudier la dérivabilité de f en 1.
Déterminer une équation de la demi-tangente à droite et une équation de la demi-tangente à gauche à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Dans les exercices 6 à 15, déterminer le (ou les) intervalle(s) :de sur le(s)quel(s) chacune des fonctions suivantes est dérivable, et expliciter la dérivée

6. a) $f(x) = -x^2 +3x +1$; b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} +2x^2+3x$;
c) $f(x) = 4x^2 -3x +1$; d) $f(x) = -2x^3 +x^2$;
e) $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x}$; f) $f(x) = x - 1+\sqrt{x}$;

7. a) $f(x) = (2x+3)(3x-7)$; b) $f(x) =(5x-4)(1-\dfrac{x}{2})$
c) $f(x) = (2x^2+1)(3x-1)$; d) $f(x) =(2x^2+5)^3$
e) $f(x) =(x^2 + x)\cos^2 x$.

8. a) $f(x) = (x^3-x)(x-9)$; b) $f(x) = \sqrt{x}\ (3 - 4x)$
c) $f(x) = -x + (1-x)(3- x)$; d) $f(x) =(2x+\dfrac{1}{x})(3x -1)$

9. a) $f(x) = (0{,}5 - \dfrac{x}{10})^2$; b) $f(x) = (3x - 1)^5$
c) $f(x) = x^2 (1- \sqrt{x}\ )$; d) $f(x) =(\dfrac{1}{x} +2)(\sqrt{x} +1)$

10 a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$; b) $f(x) = \dfrac{3x-7}{2-5x}$
c) $f(x)\ \dfrac{1}{x+1}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

11 a) $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$; b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$
c) $f(x)\ 2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

12 a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-2}$; b) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{x-3}$
c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x(x+1)}$

13 a) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)^2$; b) $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$
c) $f(x) = \dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$; d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^3$

14 a) $f(x) = -\cos x + \sin x$; b) $f(x) = \sin^2 x$
c) $f(x) = \cos^2 x$; d) $f(x) = \cos x \sin x$.

15 a) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$; b) $f(x) = \dfrac{1}{2-\cos x}$

c) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$

16 Soit f la fonction définie par :
$f(x) = ax^2 + bx + c$ / ; a ; b ; c des réels donnés avec $a \neq 0$.
Déterminer a ; b et c sachant que : $f(0) = 4$;
$f'(0) = 3$ et $f(1) = 3$.

17 Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \dfrac{1}{3-x}$.

a) Calculer les valeurs de a et b sachant que : $f(2) = 2$; $f'(2) = 0$.
b) Donner une équation cartésienne de la tangente au point d'abscisse 2 à la courbe représentative de f.

18 Dans chacun des cas suivants, préciser sur quel intervalle (ou réunion d'intervalles) la fonction f est dérivable et exprimer sa dérivée ;

a) $f(x) = \sqrt{2x-5}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

c) $f(x) = \sin 2x$; d) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$.

e) $f(x) = \sin(-\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3})$; f) $f(x) = c\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})$.

g) $f(x) = \sin\cos 3x$; h) $f(x) = 2\cos^2(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{4})$.

19 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f, calculer sa dérivée et dresser son tableau de variation.
a) $f(x) = x^2 + 1$; b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{2x+5}{2-x}$; d) $f(x) = \dfrac{4x^2-11x-2}{x-3}$

20 Soit ABCD un rectangle de périmètre P.
on désigne par x la longueur du côté [AB].
1 a) Calculer, en fonction de x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ du rectangle ABCD.
c) Etudier les variations de la fonction :
$x : \mapsto \mathscr{A}(x)$
2) En déduire que l'aire d'un rectangle de périmètre constant est maximale lorsque ce rectangle est un carré.

21 Déterminer une primitive de la fonction f dans les cas suivants et préciser sur quel intervalle.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 1$; b) $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$; d) $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{3x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^4+4x^2-2}{x^2}$; f) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$.

22 Même consigne que pour l'exercice précèdent.

a) $f(x) = 2x(x^2+9)$; b) $f(x) = \dfrac{1}{2x^5}$

c) $f(x) = x(x^2+1)^2$; d) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^3-1)^2}$

e) $f(x) = (3x-1)(\dfrac{3}{2}x^2-x+4)^5$;

f) $f(x) = (\dfrac{1}{x}+x)^7(\dfrac{1}{x^2}-1)$.

23 Même consigne que pour l'exercice précèdent.

a) $f(x) = \sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$; b) $f(x) = \cos(\dfrac{\pi}{4}-3x)$

c) $f(x) = \sin^3 x \cos x$; d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$;

e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$; f) $f(x) = \tan x + \tan^3 x$.

24 f est la fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

a) Déterminer des réels a et b tels que pour tout
$x \in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$; $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

b) Déduisez- en une primitive de f sur. $\in \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$

25 Soit $f(x) = (x+4)\sqrt{x+4}$.
Donner la dérivée de cette fonction, puis déduire une primitive sur]-4 ; +∞[de la fonction :
$x : \longmapsto \sqrt{x+4}$