Chapitre 6 Produit scalaire

Faire savoir

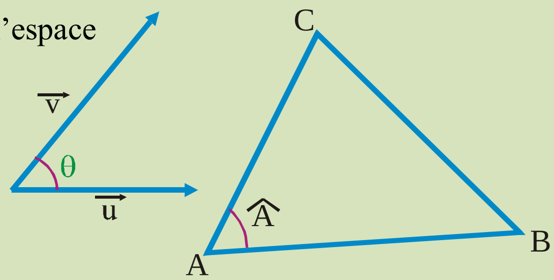
L'essentiel du chapitre

I. Expression dans le plan ou dans l'espace

1) Expression à l'aide des normes et de l'angle géométrique de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan ou dans l'espace

- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u} ; \vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$



Avec un triangle du plan ou de l'espace

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos A$

2) Expression dans un repère orthonormal

Dans le plan	Dans l'espace
Si : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i} ; \vec{j})$, alors $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$	Si : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$, alors $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$

II- Propriétés

1) Calcul

Pour tout vecteur $\vec{u}$ dans le plan ou dans l'espace ;

- $\vec{u}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{u} = 0$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le plan ou dans l'espace ;

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$ du plan ou de l'espace, et pour tout réel α et β

- $(\alpha\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$ **Par exemple** : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
- $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}\,\vec{v})$ **Par exemple** : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = \left(-\overrightarrow{AB}\right).\left(-\overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}\right)$
- $\vec{u}(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(\vec{u}.\vec{v}) + \beta(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

2) Carré scalaire d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan ou de l'espace,

- $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$ (carré scalaire de $\vec{u}$) ; pour tout point A et B du plan ou de l'espace, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$;

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan ou de l'espace,

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$; $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ du plan ou de l'espace et pour tout réel α,

- $(\alpha\vec{u})^2 = \alpha^2\|\vec{u}\|^2$; $(-\vec{u})^2 = \vec{u}^2$,

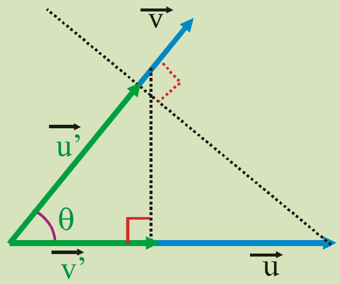
Pour tout point A et B du plan ou de l'espace,

- $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{BA}^2 = AB^2 = BA^2$

3) Une opération qui conserve $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ dans le plan des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

En remplaçant l'un des vecteurs de $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ par son projeté orthogonal sur la droite portant l'autre,

alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ est conservé.



- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{u}\,.\,\vec{v}'$ (avec $\vec{v}'$ projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la droite portant $\vec{u}$),
- $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{u}'\,.\,\vec{v}$ (avec $\vec{u}'$ projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur la droite portant $\vec{v}$),

Exemple

ABCD un rectangle dans le plan ou dans l'espace.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AB}$

$= -AB^2$.

III- Vecteurs colinéaires

Soiti $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan ou dans l'espace ;

On a	Si, et seulement si ,	Illustration
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens	$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$	$\vec{u}$ $\vec{v}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires	$\vec{u}\,.\,\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$	$\vec{u}$ $\vec{v}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	$\lvert\vec{u}.\vec{v}\rvert = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$	

Exemple

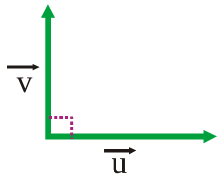
[AB] un segment de milieu I,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AI}\| = AB \times AI = \frac{1}{2}AB^2 = 2AI^2$;

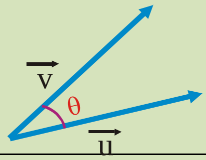
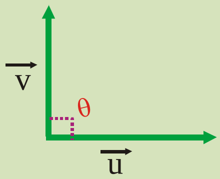
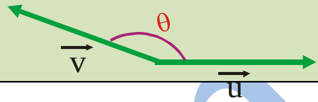
$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = -\|\overrightarrow{IA}\|\|\overrightarrow{IB}\| = -IA \times IB = -IA^2 = -IB^2 = -\frac{AB^2}{4}$.

IV- Vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls dans le plan ou dans l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.



En plus

On a	Si, et seulement si ,
$\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$	θ est aigu $\theta \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ 
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$	θ est droit $\theta = \frac{\pi}{2}$ 
$\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$	θ est obtus $\theta \in]\,\frac{\pi}{2}\,;\,\pi]$ 

- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans le plan ou dans l'espace

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \\ \text{ou} \\ \vec{v} = \vec{0} \\ \text{ou} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \end{cases}$$

IV- Des applications analytiques

Dans cette partie, le plan est rapporté au repère othonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$, (l'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

1) Droite définie par l'un de ses points et l'un de ses vecteurs normaux dans le plan

(d) est la droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ $(\vec{n} \neq 0)$ $\Leftrightarrow$
(d) = $\left\{M \in \mathscr{P} \,/\, \overrightarrow{AM}.\vec{n} = \vec{0}\right\}$.

(d) est droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(\vec{n} \neq 0)$ $\Leftrightarrow$

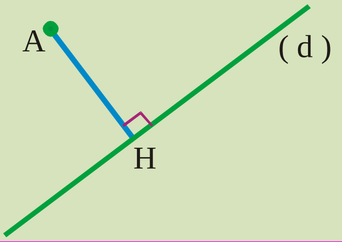
(d) a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + c = 0$; avec $c \in \mathbf{R}$.

(d_1) droite de vecteur normal $\vec{n}_1$
(d_2) droite de vecteur normal $\vec{n}_2$
$(d_1) \,//\, (d_2)$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ colinéaire à $\vec{n}_2$.
$(d_1) \perp (d_2)$ $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

2) Distance d'un point à une droite dans le plan

Si, (d) est une droite dont l'équation cartésienne est :
$ax + by + c = 0$. A un point de coordonnées (x_0 ; y_0),
alors, la distance de A à (d) est AH,
avec H projeté orthogonal de A sur (d).

Cette distance est égale à : $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



3) Représentation paramétrique d'un cercle dans le plan

Soit $\mathscr{C}_1$ un cercle de centre O et de rayon R (R< 0),
$\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que :

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \; ; \; t \in [0 \; ; \; 2\pi[$$

Ce système est la représentation paramétrique de $\mathscr{C}_1$.

Soit $\mathscr{C}_2$ un cercle de centre $\Omega(x_0 \; ; \; y_0)$ et de rayon R(R> 0).
$\mathscr{C}_2$ est l'ensemble des points M(x ; y) dans le plan tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases} \; ; \; t \in [0 \; ; \; 2\pi[.$$

Ce système est la représentation paramétrique de $\mathscr{C}_2$.

4) Plan défini par l'un de ses points et l'un de ses vecteurs normaux dans l'espace $\mathscr{E}$

$\mathscr{P}$ est le plan contenant le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ ($\vec{n} \neq 0$) $\Leftrightarrow$
$\mathscr{P} = \{M \in \mathscr{E} \,/\, \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0\}$.

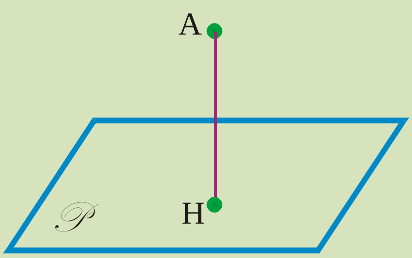
$\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; ($\vec{n} \neq 0$) $\Leftrightarrow$
$\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme : $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in$ **R** .

$\mathscr{P}_1$ plan dont de vecteur normal $\vec{n}_1$;
$\mathscr{P}_2$ plan dont de vecteur normal $\vec{n}_2$;

- $\mathscr{P}_1 \,//\, \mathscr{P}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_1$ colinéaire à $\vec{n}_2$.
- $\mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

5) Distance d'un point à un plan dans l'espace

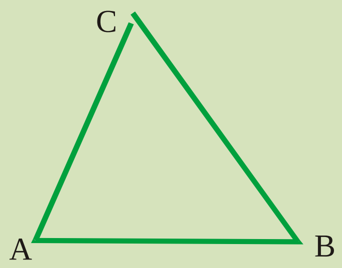
Si $\mathscr{P}$ est un plan d'équation cartésienne
$ax + by + cz + d = 0$.
A un point de coordonnées (x_0 ; y_0 ; z_0) ,
alors ; la distance de A à $\mathscr{P}$ est AH
avec H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$,
et elle est égale à : $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



V- Des relations métriques dans un triangle dans le plan ou dans l'espace

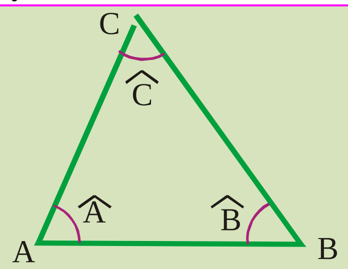
1) Des produits scalaires

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$
- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2}$
- $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2}$



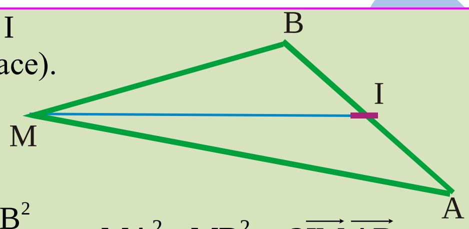
2) Relations généralisées de Pythagore ou d'Alkachy

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$;
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos B$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos C$



3) Relations de la médiane

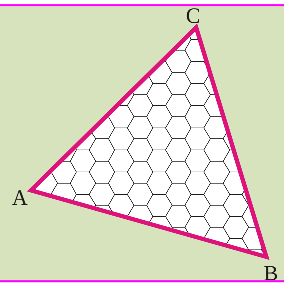
[AB] un segment de milieu I
dans le plan (ou dans l'espace).
Pour tout point M dans
le plan ou dans l'espace :



- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$; $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$;
- Aire (MIA) = Aire (MIB) = $\dfrac{1}{2}$ Aire(MAB).

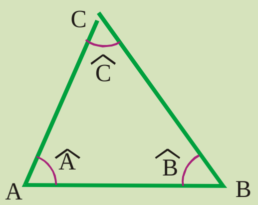
4) Aire d'un triangle

$$\text{Aire (ABC)} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin B = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin C$$



4) Formule des sinus

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB}$$



VII- Lignes de niveau dans le plan $\mathscr{P}$ & surface de niveau dans l'espace $\mathscr{E}$

$f \quad \mathscr{P} \longrightarrow \mathbf{R}$ Ou $f \quad \mathscr{E} \longrightarrow \mathbf{R}$

$\quad M \longmapsto f(M)$ $\qquad\qquad M \longmapsto f(M)$

❖ Soit k un réel donné

- On désigne par L_k l'ensemble des points M du <u>plan</u> tels que :
  $f(M) = k$; L_k est appelé la ligne de niveau k de la fonction f .
- On désigne par S_k l'ensemble des points M de <u>l'espace</u> tels que :
  $f(M) = k$; S_k est appelé la surface de niveau k de la fonction f .

❖ **<u>Des fonctions usuelles</u>**

1) $f(M) = \Omega M$ avec Ω un point donné

Si	alors
$k < 0$	$L_k = \phi$ et $S_k = \phi$
$k = 0$	$L_k = \{\Omega\}$ ϕ et $S_k = \{\Omega\}$
$k > 0$	L_k = est le cercle de centre Ω et de rayon k. S_k = est la sphère de centre Ω et de rayon k.

2) $f(M) = \overrightarrow{AM}.\vec{u}$ avec A un point donné et $\vec{u}$ un vecteur donné non nul

$\forall\, k \in \mathbb{R}$; L_k est une droite de vecteur normal $\vec{u}$;
S_k est plan de vecteur normal $\vec{u}$;

En plus, avec, $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$, L_k est une droite perpendiculaire à (BC).
S_k est plan orthogonal à (BC).

3) $f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ avec A et B deux points distincts données de milieu I.

- Soit $L_k = \phi$
- Soit $L_k = \{I\}$
- Soit L_k est un cercle de centre I
- Soit $S_k = \phi$
- Soit $S_k = \{I\}$,
- Soit Sk est une sphère de centre I.

En plus : L_0 est le cercle de diamètre [AB].
S_0 est la sphère de diamètre [AB].

4) $f(M) = \dfrac{MA}{MB}$ avec A et B deux points distincts données

Si	alors
$k < 0$	$L_k = \phi$ et $Sk = \phi$
$k = 0$	$L_k = \{A\}$ ϕ et $S_k = \{A\}$
$k = 1$	L_k = est la médiatrice de [AB]. S_k = est le plan médiateur de [AB].
$k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	L_k est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$. S_k est la sphère de diamètre $[G_1G_2]$. Avec $G_1 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} A & B \\ \hline 1 & k \end{array}$; $G_2 = \text{bar}\begin{array}{c\|c} A & B \\ \hline 1 & -k \end{array}$

VIII- Fonction scalaire de Leibniz

- $\boldsymbol{f}$ **(M) =** $\alpha MA^2 + \beta MB^2$; avec A et B deux points donnés et α ; β deux réels donnés, est appelée **fonction scalaire de Leibniz** associée au système de points pondérés $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\}$;
- $\boldsymbol{f}$ **(M) =** $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ avec A ; B ; C ; trois points donnés et α ; β ; γ ; trois réels donnés est appelée **fonction scalaire de Leibniz** associée au système de points pondérés $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\ ;\ (C;\delta)\}$.
- $\boldsymbol{f}$ **(M) =** $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 + \theta MD^2$; A ; B ; C ; D quatre points donnés et α ; β ; γ ; θ ; quatre réels donnés est appelée **fonction scalaire de Leibniz** associée au système de points pondérés $\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\ ;\ (C;\delta)\ ;\ (D;\theta)\}$.

En plus

Si	alors	
La somme des masses du système est différente de zéro et G est le barycentre du système	• Soit $L_k = \phi$ • Soit $L_k = \{G\}$ • Soit L_k un cercle de centre G	• $S_k = \phi$ • $S_k = \{\Omega\}$ • Soit S_k une sphère de centre G
	En plus, avec (m) somme des masses du système on a : pour tout point M : $\boldsymbol{f}(M) = mMG^2 + \boldsymbol{f}(G)$	
La somme des masses du système est égale à zéro.	$\forall$ k $\in$ ℝ ; L_k est une droite et S_k est un plan ; chacun de vecteur normal $\vec{u}$: avec $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$; si $\boldsymbol{f}(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2$; $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC}$; si $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \delta MC^2$ $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC} + \theta\overrightarrow{MD}$; si $f(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \delta MC^2 + \theta MD^2$ En plus, avec I un point donné Pour tout point M : $\boldsymbol{f}(M) = 2\overrightarrow{MI}.\vec{u} + \boldsymbol{f}(I)$.	

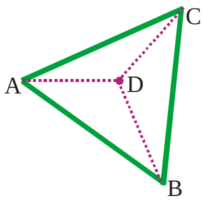
Savoir- faire

A . Applications

Orthogonalité de droites

Exercice 1

1. ABCD un tétraèdre régulier d'arête a.



1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$

et donner trois résultats similaires.
2) Montrer que les droites (AC) et (BD).
sont orthogonales, donner deux résultats similaires.

Solution

a) Dans le triangle équilatéral ABC, on a $A=\frac{\pi}{3}$,

<table>
<tr><td>• donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{3}=(a)(a)(\frac{1}{2})=\frac{a^2}{2}$.
Dans le triangle équilatéral ABD, on a $A=\frac{\pi}{3}$,
• donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB\times AD\times\cos\frac{\pi}{3}=(a)(a)(\frac{1}{2})=\frac{a^2}{2}$.</td><td>Dans le triangle équilatéral ACD, on a $A=\frac{\pi}{3}$,
• donc : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=AC\times AD\times\cos\frac{\pi}{3}$
$=(a)(a)(\frac{1}{2})=\frac{a^2}{2}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">d'où ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$.</td></tr>
</table>

Les résultats similaires sont :

- $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=\frac{a^2}{2}$
- $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}=\frac{a^2}{2}$
- $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\frac{a^2}{2}$

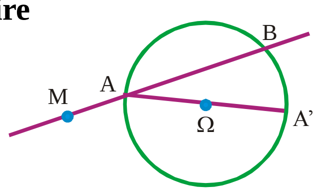
b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=\frac{-a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$.

Donc, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux ⇔ les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.
Les résultats similaires sont :

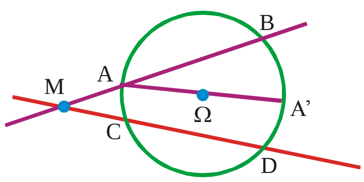
- les droites (AB) et (CD) sont orthogonales,
- les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

Projection orthogonale et conservation d'un produit scalaire

Exercice 2



Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon R. Soit M un point
Une droite passant par M coupe $\mathscr{C}$ en A et B.
Soit A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$.



1) Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$
ne dépend pas des points A et B.
(c'est la puissance du point M par rapport au cercle $\mathscr{C}$).
2) En déduire que lorsqu'une autre droite passant par M
coupe $\mathscr{C}$ en C et D, alors : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{ML}.\overrightarrow{MD}$.

Solution

Comme [AA’] est un diamètre de $\mathscr{C}$ et B $\in \mathscr{C}$, donc BAA’ est rectangle en B.
Or, M, A , B sont alignés.
Donc le triangle BMA’ est rectangle en B.
Donc ; $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$ (car MB est le projeté orthogonal de MA' sur la droite (MA)) .

Or, Ω est le milieu de [AA’], d’où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = M\Omega^2 - \frac{AA'^2}{4} = -M\Omega^2 - \frac{(2R)^2}{4} = \Omega M^2 - R^2$.

Donc, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \Omega M^2 - R^2$.
D’où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est indépendant des points A et B.
b) Comme $\overrightarrow{ML}.\overrightarrow{MD} = \Omega M^2 - R^2$ (d’après a), donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ML}.\overrightarrow{MD}$.

Distance d’un point à un plan dan l’espace

Exercice 3

L’espace est rapporté à un repère orthonormal $((O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.
$\mathscr{P}$ le plan d’équation cartésienne x + y + 2z +1 = 0,
$\mathscr{P}$ ’ le plan d’équation cartésienne x + y - z = 0,
1) Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ ’ sont orthogonaux.
2) Soit (d) la droite d’intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ ’. Donner une représentation paramétrique de (d).
En déduire des éléments caractéristiques de (d).
3) Soit A le point de coordonnées (1 ; 1 ; 1).
a) Vérifier que A$\notin \mathscr{P}$ et A$\notin \mathscr{P}$ ’ .
b) Voit H le projeté orthogoonal de A sur $\mathscr{P}$ et H’ le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ ’. Montrer que le triangle AHA’ est rectangle.
c) Calculer AH et Ah’, puis en déduire HH’.

Solution

1) Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; Un vecteur normal de $\mathscr{P}$ ’ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Or, $\vec{n}.\vec{n}' = (1)\,(1) + (1)\,(1) + (2)\,(-1) = 1 + 1 - 2 = 0$; donc, $\vec{n} \perp \vec{n}' = 0$, d’où $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}$ ’.

2) M(x ; y ; z) $\in$ (d) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z+1=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$; avec x = t ; $t \in \mathbb{R}$; on a : $\begin{cases} y+2z=-t-1 \\ y-z=-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3z=-1 \\ 3y=-3t-1 \end{cases}$;

donc ; (d) $\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{1}{3}-t \\ z=-\frac{1}{3} \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$; c'est la représentation paramétrique de la droite (d) . D’où un point de (d) est B$(0\,; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$; un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

3) a) Comme 1 + 1 +2(1) + 1 = 5 $\neq$ 0 ; donc A $\notin \mathscr{P}$; Comme 1 + 1 -1 = 1 $\neq$ 0 ; donc A $\notin \mathscr{P}$ ’ ;
b) on a $\overrightarrow{AH}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$; $\overrightarrow{AH'}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$ ’ .

Or, $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}'$; donc, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{AH'}$ d'où AHH' est rectangle en A.

c) AH = distance (A ; $\mathscr{P}$) = $\dfrac{|1+1+2(1)+1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(2)^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6} =$

AH' = distance (A ; $\mathscr{P}'$) = $\dfrac{|1+1+-1|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; or, AHH' est rectangle en A,

d'où $HH'^2 = AH^2 + AH'^2 = \dfrac{25}{6} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{27}{6} = \dfrac{9}{2}$; donc, $HH' = \sqrt{\dfrac{9}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lignes de niveau

Exercice 4

ABC un triangle de centre de gravité G. On pose AB = c ; BC = a ; CA = b.

1) Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}c^2$.

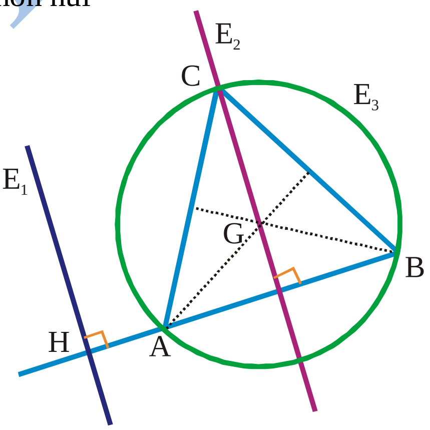
2) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = b^2 - a^2$.
Que représente E_2 pour le triangle ABC

3) a) Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = b^2 + a^2$.

b) Lorsque E_3 contient les sommets du triangle ABC, quelle est la nature de ce triangle ?

Solution

1) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}c^2$.Comme A est un point donné, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul donné ; $\dfrac{1}{3}c^2$ est un réel donné. Donc ; E_1 est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$



E_1 est une droite perpendiculaire à (AB). Soit $H = E_1 \cap (AB)$,

On a : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = \dfrac{1}{3}c^2$ et $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB}$; $t \in \mathbb{R}$. Donc

$-t\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{3}c^2 \Leftrightarrow -tc^2 = \dfrac{1}{3}c^2 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{3}$. D'où, $\overrightarrow{AH} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,

Donc E_1 est la droite perpendiculaire à (AB) en H.

2) On a : $MA^2 - MB^2 = b^2 - a^2$. Comme : 1 – 1 = 0 ; Donc E_2 est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{AB}$; d'où E_2 est une droite perpendiculaire à (AB). Or, $CA^2 - CB^2 = b^2 - a^2$, d'où $C \in E_2$.

Donc ; E_2 est la perpendiculaire à (AB) passant par C

Donc ; E_2 est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

3) a) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = b^2 + a^2$.

On a : $\text{bar}\begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} = G$. Or ; $CA^2 + CB^2 + CC^2 = b^2 + a^2$; Donc ; $C \in E_3$.

Donc ; E_3 est le cercle de centre G passant parC.

b) Si ; E_3 contient les sommets de ABC, alors GA = GB = GC, d'où G est le centre du cercle circonscrit à (ABC).
Or, G est aussi centre de gravité de (ABC), Donc, ABC est un triangle équilatéral.

B. Exercices

1. ABC D est un rectangle de centre O, tel que : AB = 4 ; AD = 3.
Calculer les produits scalaires suivants :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}$;
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$.

2. ABC un triangle équilatéral de centre O, on pose : AB = a ;
Calculer en fonction de a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$;
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$.

3. 1) Montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2+\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=2(\vec{u}^2+\vec{v}^2)$
2) ABCD un parallélogramme, on pose :
$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.
a) Déterminer : $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$.
b) En déduire que :
$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

4. ABC un triangle tel que: AB = 3 ; AC = 5 ; $A=\frac{\pi}{3}$.
Calculer BC ;
2) I milieu de [AB] ; D est le symétrique de B par rapport à A. Calculer IC et CD.

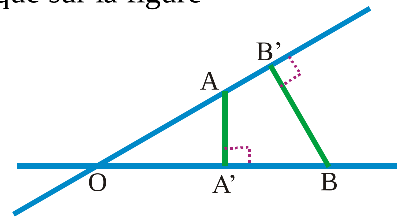
5. Montrer qu'un triangle ABC est rectangle en C, si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AC^2$.
2) soit ABC un triangle rectangle en C. Montrer que : $\cos A=\frac{AC}{AB}$.

6. 1) ABC un triangle tel que :
$\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $B=\frac{\pi}{4}$.
Montrer que : ABC est un triangle rectangle en A.
2) ABC est un triangle tel que :
$\frac{AB}{BC}=\sqrt{2}$ et $B=\frac{\pi}{4}$
Montrer que : ABC est rectangle en C.

7. ABCD un carré de côté a (a > 0).
I ; J les milieux respectifs de [AB] et [BC].
Montrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

8. Montrer que sur la figure ci-contre on a :

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}$$

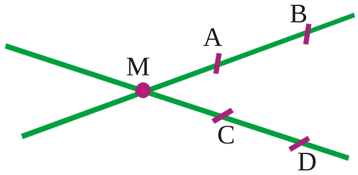


9. [AB] un segment de longueur a.
f : $M \longmapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$
Déterminer et construire L_k (ligne de niveau k de f)
Dans chacun des cas :
1) $k=\frac{1}{2}a^2$; 2) $k=-\frac{1}{3}a^2$; 3) $k=a^2$;4)$k=-a^2$;5) k = 0.

10 L'espace est rapporté au repère orthnormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
1) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant le point A(1 ; 2 ;-1) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
2) Soit $\mathcal{P}$ ' le plan d'équation cartésienne :
x + y + 2z + 3 = 0.
a) Quelle est la position relative des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ '.
b) Déterminer la distance (A ; $\mathcal{P}$ '). Que représente cette distance pour les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ '.
3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.
b) Quelle est la position de (d) par rapport au plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ '.

11 L'espace est rapporté au repère orthnormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.
1) Soit (d) la droite définie pa : $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-2+3t\end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$
Donner une caractérisation de (d).
2) Soit $\mathcal{P}$ le plan orthogonal à (d) et contenant le point A(1 ; 0 ; 1).
Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

12 (AB) et (CD) deux droites distincts passant par un point M, tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$,
et $M \neq C$.



Montrer que : les points A ; B ; C ; D sont cocycliques (appartiennent à un même cercle).

13 Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

Soit (d) la droite d'équation $y = \frac{-1}{4}$ et

F le point de coordonnées (0 ; $\frac{1}{4}$).

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des points M du plan équidistant de (d) et F.

1) Donner une équation cartésienne simplifiée de $\mathscr{P}$.

2) Etudier et représenter $\mathscr{P}$.

14 ABC un triangle tel que : AB = 2 ; AC = 3 ; BC = 4.

$G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array}$

1) Faire une figure.

2) Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

3) Calculer : GA^2 ; GB^2 ; GC^2.

4) Pour tout point P du plan, on pose :
$\boldsymbol{f}(M) = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$.

a) Calculer $\boldsymbol{f}(G)$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $\boldsymbol{f}(M) = 41$.

15. ABC un triangle tel que : AB = 2 ; AC = 3 ; BC= 4.

$G = \text{bar} \begin{array}{c|c|c|} A & B & C \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}$

D est le symétrique de B par rapport à C.
I milieu de [AB].

1) Faire une figure.

2) Calculer : $\cos A$; $\cos B$; $\cos C$.

3) Calculer IC ; AD.

4) On pose : $\boldsymbol{f}(M) = MA^2 + MB^2 + 2MC^2$.
$\boldsymbol{g}(M) = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$.

a) Calculer : $\boldsymbol{f}(A)$; $\boldsymbol{f}(B)$; $\boldsymbol{f}(C)$; $\boldsymbol{f}(D)$; $\boldsymbol{g}(A)$; $\boldsymbol{g}(B)$; $\boldsymbol{g}(C)$; $\boldsymbol{g}(D)$.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\boldsymbol{f}(M) = 25$.

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\boldsymbol{g}(M) = 25$.

5) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC}\right\|$.