Chapitre 8 Etude de fonctions

Faire savoir

L'essentiel du chapitre

I. Généralités sur les fonctions

Soit f une fonction, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O. I ; J).

1) Domaine de définition

On appelle domaine de définition de f l'ensemble : $\{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \text{ existe}\}$ noté D_f.

Exemple

$f: \ x \mapsto \dfrac{4}{x(x-1)}$; $D_f = \mathbb{R} - \{0 ; 1\}$.

2) Parité

On dit que la fonction f est paire si , • D_f est symétrique par rapport à zéro • Pour tout $x \in D_f$; on a $f(-x) = f(x)$ **Exemple** $f: \ x \mapsto x^2$; $D_f =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$; $\forall x \in D_f$; $(-x)^2 = (x)^2 = x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x)$; Donc; f est paire	On dit que la fonction f est impaire si • D_f est symétrique par rapport à zéro • Pour tout $x \in D_f$; on a $f(-x) = -f(x)$ **Exemple** $f: \ x \mapsto x^3$; $D_f =]-\infty ; 0] \cup [0 ; +\infty[$; $\forall x \in D_f$; $(-x)^3 = -x^3 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$; Donc; f est impaire

3) Eléments de symétries

Axe de symétrie

Soit f une fonction numérique ; D_f son domaine de définition $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O. I ; J). Pour démontrer que l'axe Δ d'équation : $x = a$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 Démontrer que : $\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à a} \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$ **Exemple** Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$; La droite d'équation Δ : $x = 2$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f, car $f(4-x) = \dfrac{4}{(4-x)(4-x-4)}$ $= \dfrac{4}{(4-x)(4-x-4)} = \dfrac{4}{-x(4-x)} = f(x)$	***Méthode 2*** Démontrer que f est paire dans le repère (O' ; $\vec{OI}$; $\vec{OJ}$) tel que **O'(a ; 0).** **Exemple** Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \dfrac{4}{x(x-4)}$; On a : $y = \dfrac{4}{x(x-4)}$; soit : $X = x - 2$ et $Y = y$. Donc ; $Y = \dfrac{4}{(X-2)(X+2)}$. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $X \mapsto \dfrac{4}{(X+2)(X-2)}$ La fonction f est paire..

Centre de symétrie

Pour démontrer que le point Ω(a ; b) est centre de symétrie de $\mathscr{C}$, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1

Démontrer que :

$$\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à a} \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Exemple

Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$;

Le point Ω (1 ; 2) est centre de symétrie, car

$$\left.\begin{array}{l} f(2-x) = 2 + \dfrac{3}{2-x-1} = 2 - \dfrac{3}{x-1} \\ 4 - f(x) = 4 - (2 + \dfrac{3}{x-1}) = 2 - \dfrac{3}{x-1} \end{array}\right\} f(2-x) = 4 - f(x)$$

Méthode 2

Démontrer que f est impaire dans le repère (O' ; $\vec{OI}$; $\vec{OJ}$) tel que **O'(a ; b).**

Exemple

Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2 + \dfrac{3}{x-1}$

Soit : X = x – 1 ; Y = y -2 ;

Donc l'expression de f dans ce nouveau repère est :

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $X \mapsto \dfrac{3}{X}$; c'est une fonction impaire.

3) Asymptotes

Asymptotes parallèles aux axes de repères :

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite x = x_0 est asymptote à $\mathscr{C}$; c'est une droite parallèle à (Oy),

Exemple

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; donc x = 0 est une asymptote à $\mathscr{C}$ parallèle à (Oy),

- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$, on dit que la droite y = ℓ est asymptote à $\mathscr{C}$; c'est une droite parallèle à (Ox).

Exemple

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto 2 - \dfrac{1}{x}$;

- On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (2 - \dfrac{1}{x}) = 2$; donc y = 2 est une asymptote à $\mathscr{C}$, c'est une droite parallèle à (Ox).

Asymptotes obliques

Lorsqu'il existe une fonction affine : $x \mapsto ax + b$; telle que: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$, on dit que la droite d'équation : y = ax + b est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

Exemple

$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $x \mapsto x + 1 - \dfrac{1}{x-3}$;

On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0$; donc la droite d'équation y = x + 1 est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$.

II. Plan d'étude d'une fonction donnée

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction à étudier, s'il n'est pas précisé,
- Etudier la parité de la fonction donnée,
- Etudier la dérivabilité sur D_f, calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f,
- A partir du signe de $f'(x)$, déduire le sens de variation de la fonction,
- Etudier les limites aux bornes de D_f,
- Dresser le tableau de variation,
- Représenter, les asymptotes s'ils existent et les tangentes pour une représentation nette et soigneuse.

Exemples d'études de fonctions

Etude d'une fonction polynôme Soit $f : x \mapsto -x^3 + 6x^2 - 9x + 4.$

- Domaine de définition : la fonction f est un polynôme ; donc $D_f = \mathbb{R}$;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = -\infty$
- Dérivabilité : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par définition, sa dérivée $f' : x \mapsto -3x^2 + 12x - 9.$
- Sens de variation de $f(x)$; soit $f'(x) = 0$; $-3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow -3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -3(x-3)(x-1) = 0$

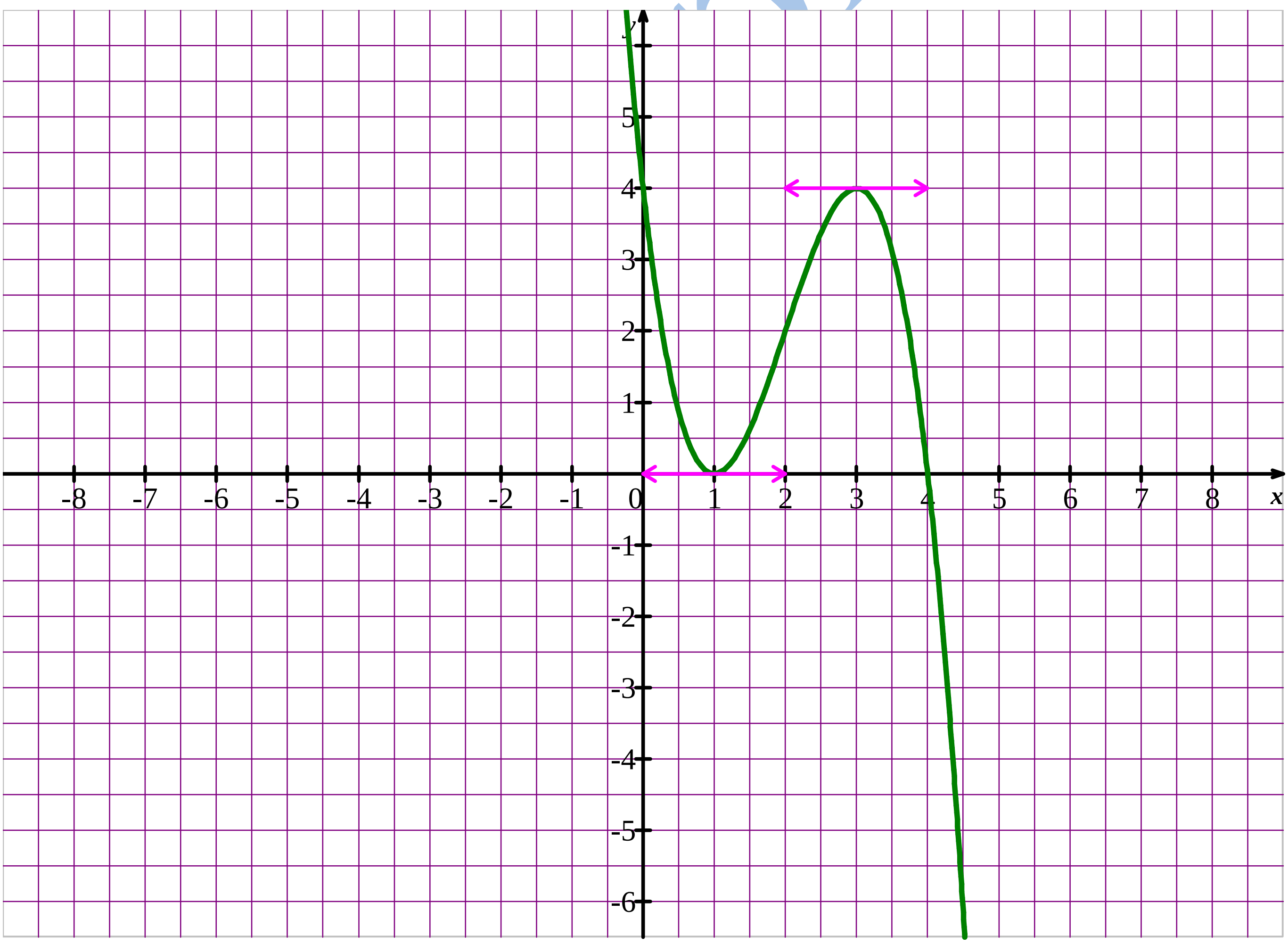
  $\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$

  $\forall x \in]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$; : $f'(x) \leq 0$; d'où f est décroissante sur cet intervalle,

  $\forall x \in [1 ; 3]$; $f'(x) \geq 0$; d'où f est croissante sur cet intervalle.
- Calcul de l'image de certains points : $f(1) = -1^3 + 6\times 1^2 - 9\times 1 + 4 = 10 - 10 = 0$; $f(3) = 4$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$



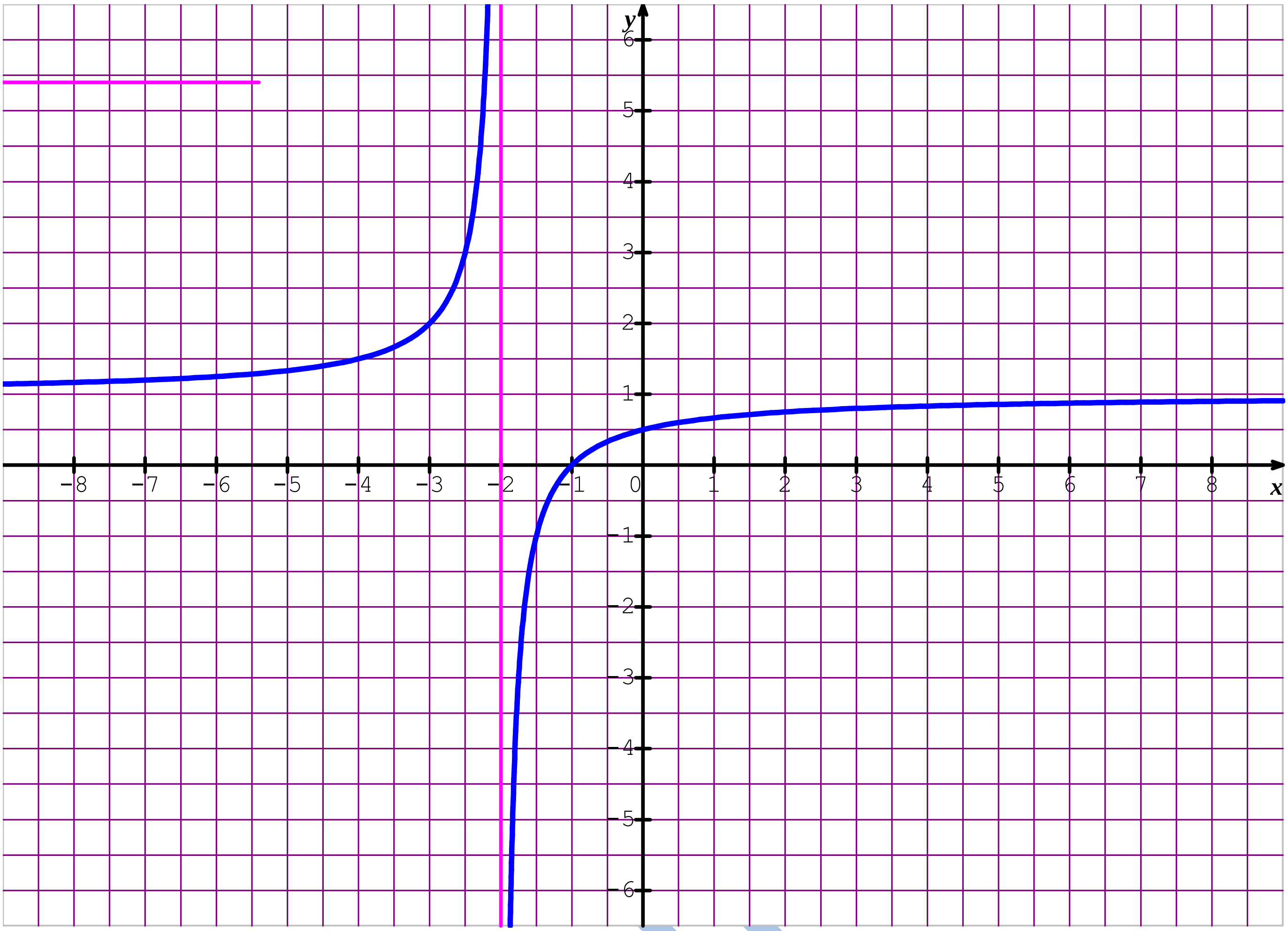
Etude d'une fonction homographique : Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$

- Domaine de définition : la fonction f est une fonction homographique (rationnelle) ; donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. ;
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$;
- Asymptotes : il y a deux asymptotes : x= -2 (A.V) ; y = 1 (A.H)
- Dérivabilité : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par définition, sa dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
- Sens de variation de $f(x)$; $\forall x \in D_f$; $f'(x) > 0$; donc f est strictement croissante sur D_f .
- Calcul de l'image de certains points : $f(0) =$ $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

Représentation graphique



Etude de la fonction $\boldsymbol{g} : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$

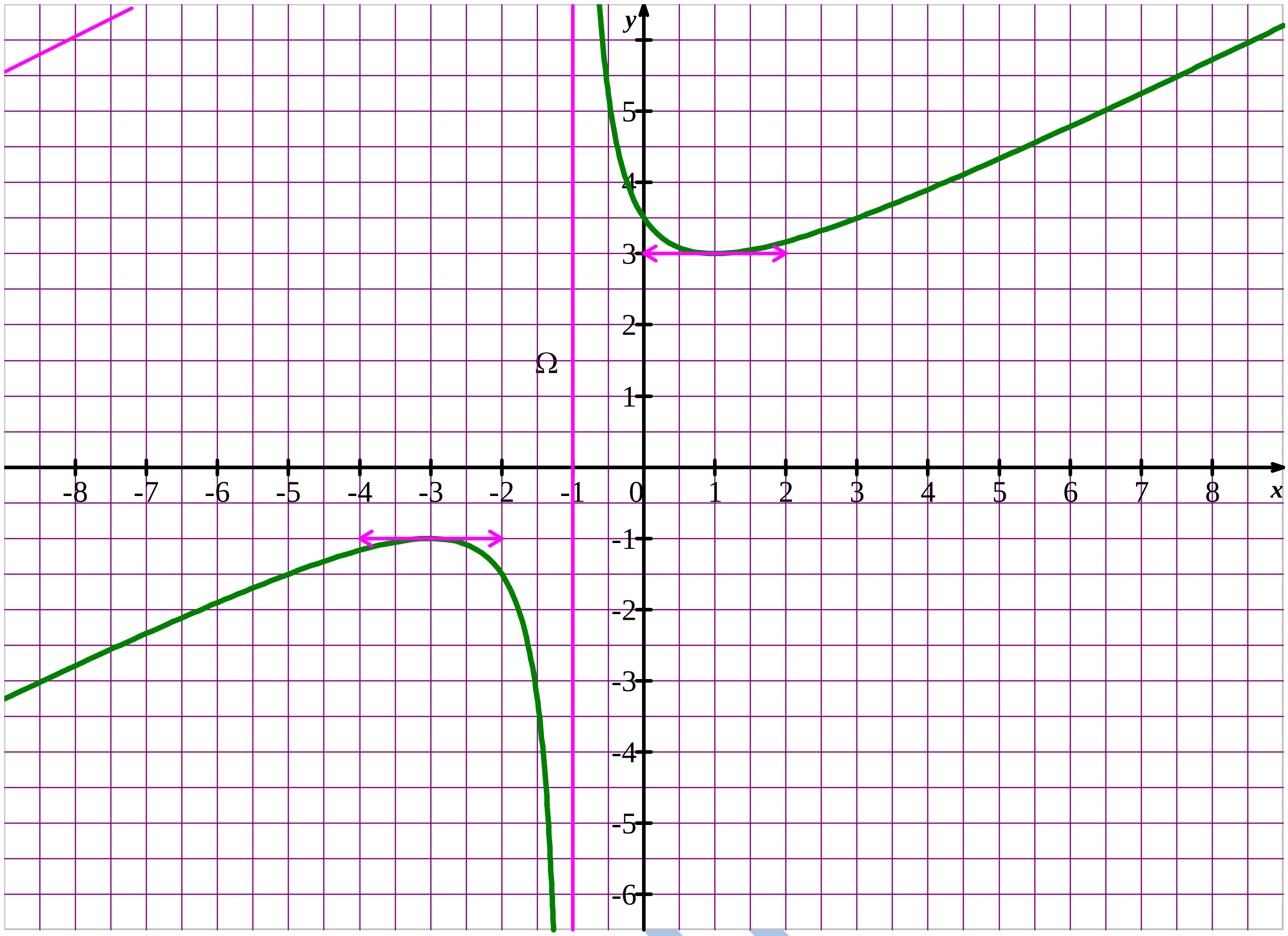
- Domaine de définition : D_g= $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$.
- Limites aux bornes : $\lim_{x \to (-1)^-} \boldsymbol{g}(x) = -\infty$; $\lim_{x \to (-1)^+} \boldsymbol{g}(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{g}(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \boldsymbol{g}(x) = +\infty$.
- Asymptotes : il y a deux asymptotes : x = -1 et $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (asymptote oblique), (car $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x+1} = 0$)
- Dérivabilité : comme ***g*** est une fonction rationnelle ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.

  La dérivée est la fonction : $\boldsymbol{g'} : x \mapsto \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$;
- Sens de variation : Soit ***g***'(x) = 0 ; donc x = -3 ou x = 1, d'où ∀ x ∈]- ∞ ; -3 [∪ [1 ; +∞[; ***g***'(x) ≥ 0 ; donc ***g*** est croissante sur cet intervalle ; ∀ x ∈ [-3 ; 1] ; ***g***'(x) ≤ 0 ; d'où ***g*** est décroissante sur cet intervalle.
- Calcul de l'image de certains points : ***g***(-3) = $\frac{1}{2}(-3) + \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = -1$; ***g***(1) = 3.

Tableau de variation

x	-∞		-3		-1		1		+∞
f '(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	-1	↘	-∞ ‖ +∞	↘	0 / 3	↗	+∞

Représentation graphique



III. Fonctions associées

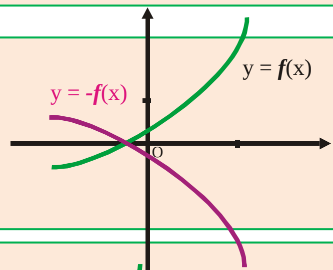
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J).

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction **f**, a et b deux réels.

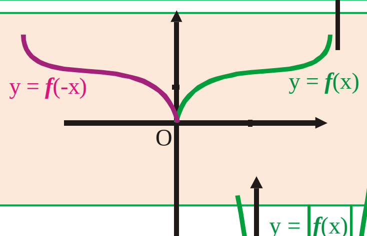
Les fonctions : $x \mapsto -\boldsymbol{f}(x)$; $x \mapsto \boldsymbol{f}(-x)$; $x \mapsto |f(x)|$; $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)$; $x \mapsto \boldsymbol{f}(x)+b$.
sont dites fonctions associées à ***f*** .

- **Fonction :** $x \mapsto -\boldsymbol{f}(x)$ et $x \mapsto \boldsymbol{f}(-x)$

La courbe de la fonction $x \mapsto -\boldsymbol{f}(x)$ se déduit de celle de la fonction ***f*** par la symétrie orthogonale d'axe (OI).

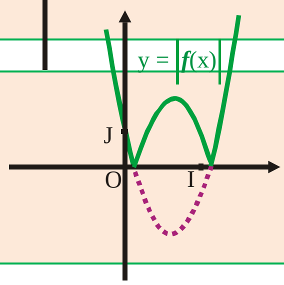


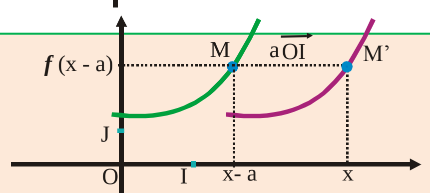
La courbe de la fonction $x \mapsto \boldsymbol{f}(-x)$ se déduit de celle de la fonction ***f*** par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).



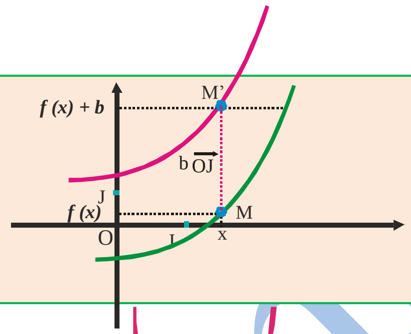
- **Fonction :** $x \mapsto |\boldsymbol{f}(x)|$

La courbe de cette fonction est
la réunion des deux parties des courbes
d'équations respectives y = *f*(x) et y = -*f*(x).

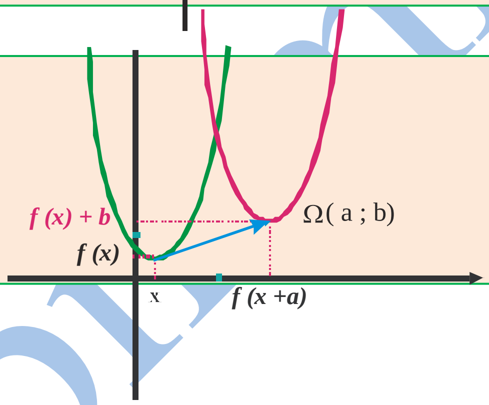




- **Fonction :** $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)$.
  La courbe de la fonction $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)$ se déduit
  de celle de la fonction $\boldsymbol{f}$ par la translation
  de vecteur $a\overrightarrow{OI}$.



- **Fonction :** $x \mapsto \boldsymbol{f}(x)+b$
  La courbe de la fonction $x \mapsto \boldsymbol{f}(x)+b$ se
  déduit de celle de la fonction $\boldsymbol{f}$ par la
  translation de vecteur $b\overrightarrow{OJ}$



- **Fonction :** $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)+b$
  La courbe de la fonction $x \mapsto \boldsymbol{f}(x-a)+b$
  se déduit de celle de la fonction $\boldsymbol{f}$
  par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

IV. Fonctions trigonométriques

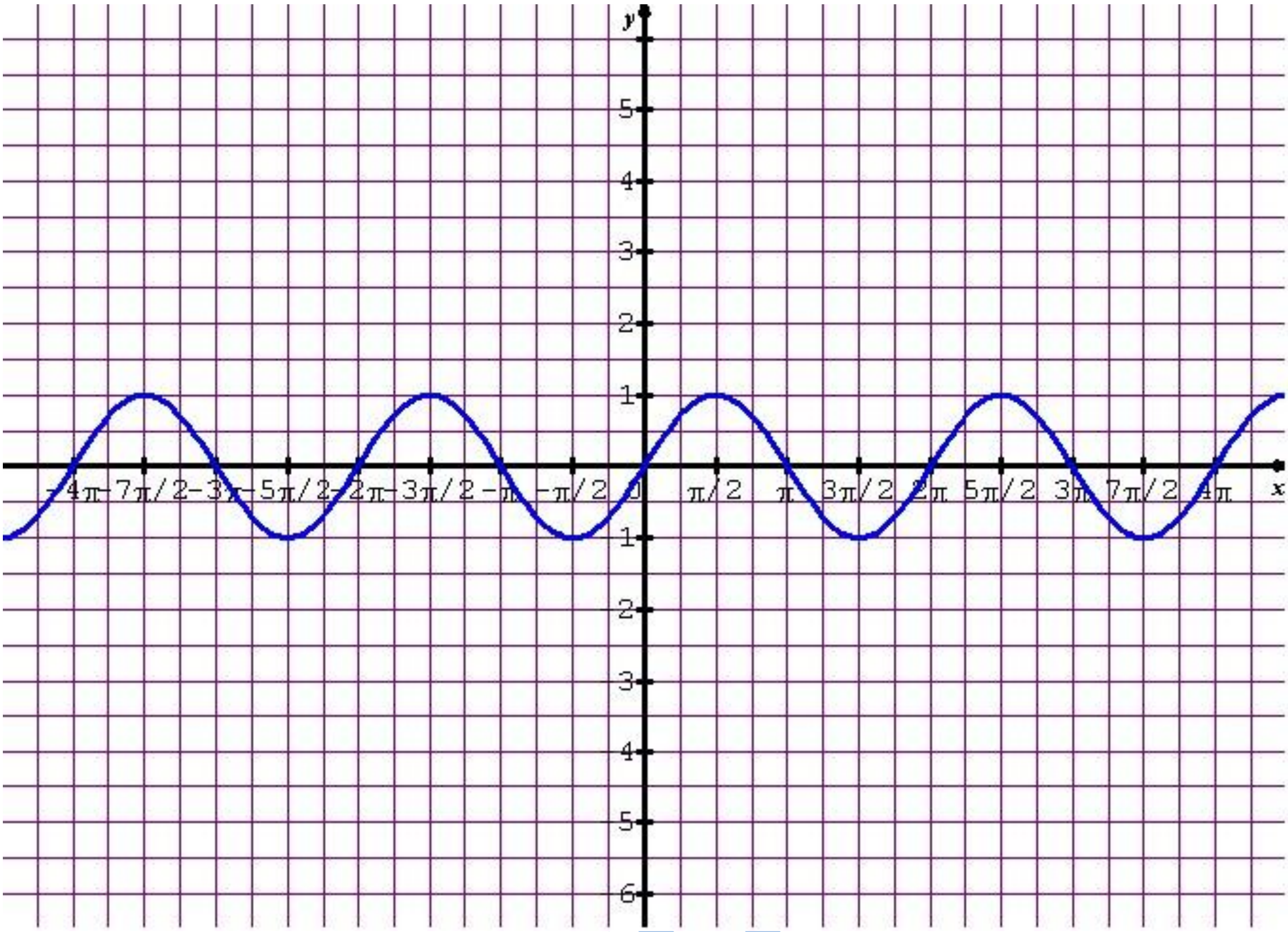
Etude de la fonction $\boldsymbol{f} : x \mapsto \sin x$

- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 2π
- Parité : elle est impaire.
  Donc, il suffit de réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \pi]$.
- Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet ensemble.
  Sa dérivée est la fonction $\boldsymbol{f}' : x \mapsto \cos x$
- Sens de variation ; $\forall$ x $\in$ $[0 ; \frac{\pi}{2}]$; $\cos x \geq 0$; d'où $\boldsymbol{f}'(x) \geq 0$; donc $\boldsymbol{f}$ est croissante sur cet intervalle ; $\forall$ x $\in$ $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$; $\cos x \leq 0$; d'où $\boldsymbol{f}'(x) \geq 0$, donc $\boldsymbol{f}$ est décroissante sur cet intervalle.

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\boldsymbol{f}'(x)$		+	0	-	
$\boldsymbol{f}(x)$	0	↗	1	↘	0

Représentation graphique



Etude de la fonction $f : x \mapsto \cos x$

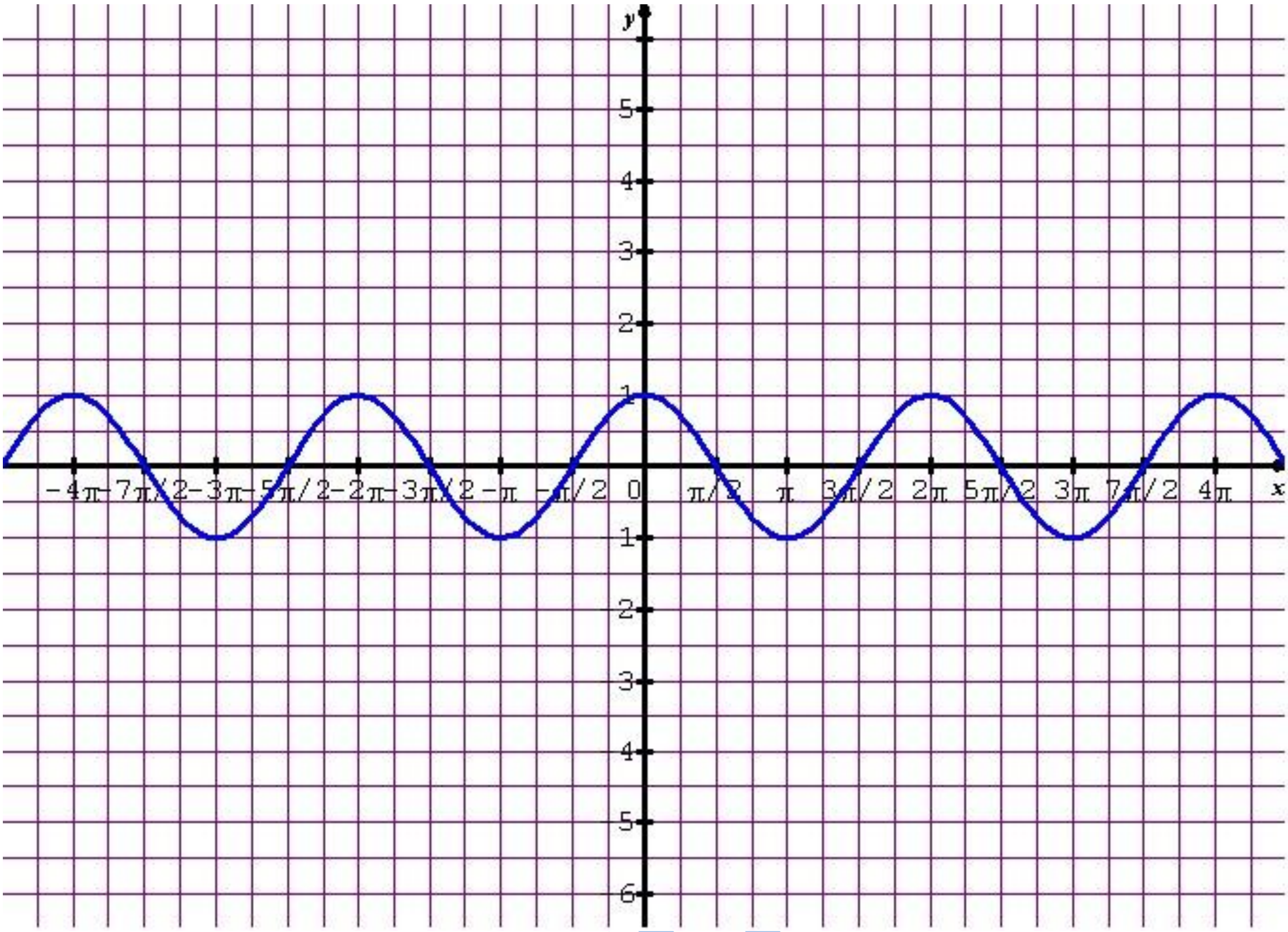
- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 2π
- Parité : elle est paire.
  Donc, il suffit de réduire l'intervalle d'étude à $[0 ; \pi]$.

- Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle .
  Sa dérivée est la fonction $f ' : x \mapsto -\sin x$
- Sens de variation ; $\forall$ x $\in$ $[0 ; \pi]$; $- \sin x \leq 0$; d'où $f '(x) \leq 0$; donc f est décroissante sur cet intervalle.

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
- sinx	-	1	-
cosx	1 ↘	0	↘ -1

Représentation graphique



Etude de la fonction tanx

- Domaine de définition est $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période π ;
- Parité : elle est impaire.

Donc il suffit de réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle : $[0 \;;\; \frac{\pi}{2}[$.

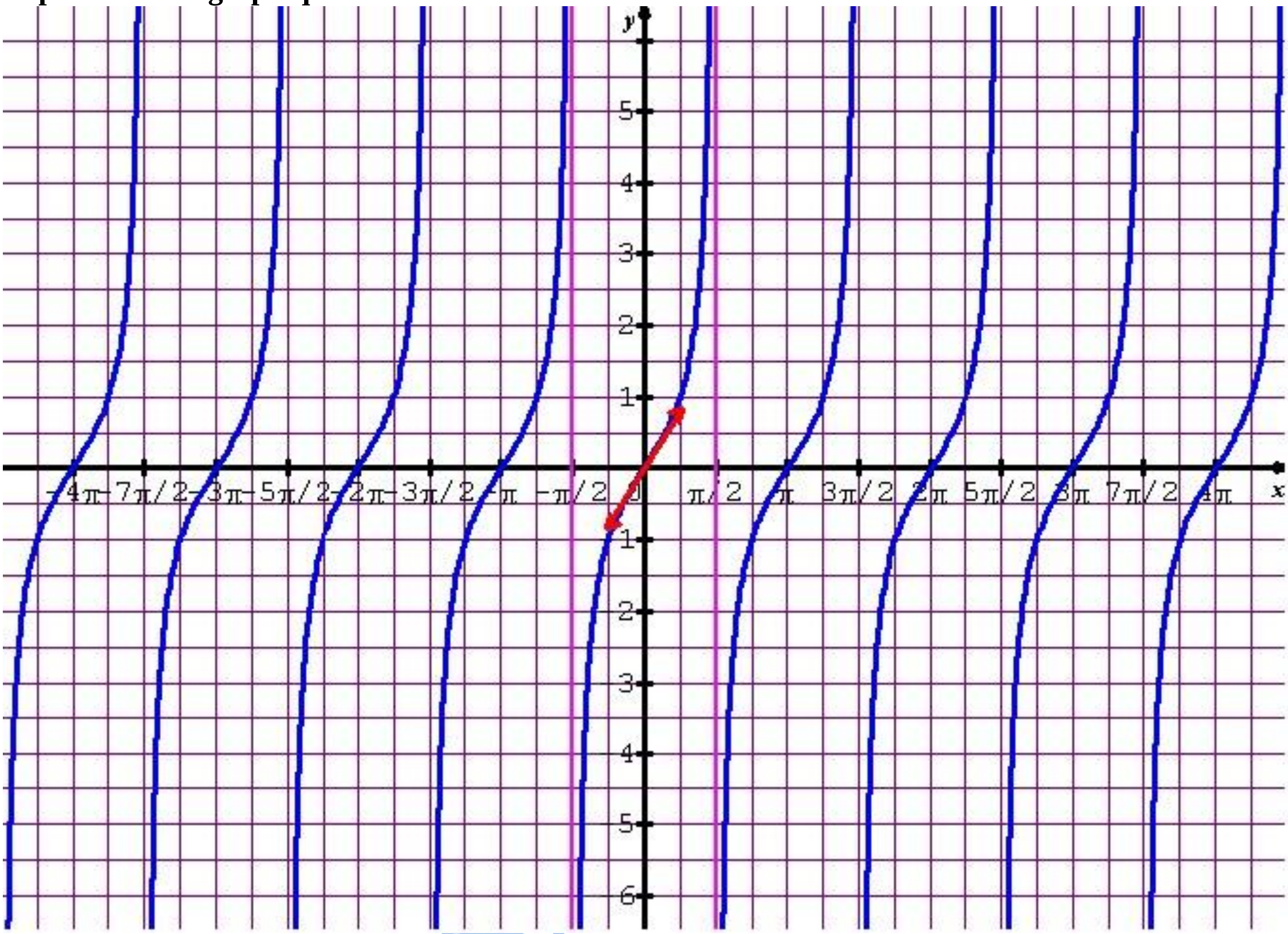
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$
- Dérivée : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.
  Sa dérivée est la fonction $1 + \tan^2 x$.
- Sens de variation ; $\forall\, x \in [0 \;;\; \frac{\pi}{2}[$; $1 + \tan^2 x \geq 0$; d'où $\boldsymbol{f}\,'(x) \geq 0$; donc $\boldsymbol{f}$ est croissante sur cet intervalle.

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$

$1 + \tan^2 x$	+	
tanx	$0 \nearrow +\infty$	

Représentation graphique



Etude de la fonction $\boldsymbol{f : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

- Domaine de définition est $\mathbb{R}$;
- Périodicité ; elle est périodique de période 4π ; car $f(x + 4\pi) = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$;
- On peut réduire l'étude à l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$
- Dérivée et sens de variation : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.

  Sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

  Soit $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$; ou $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$.

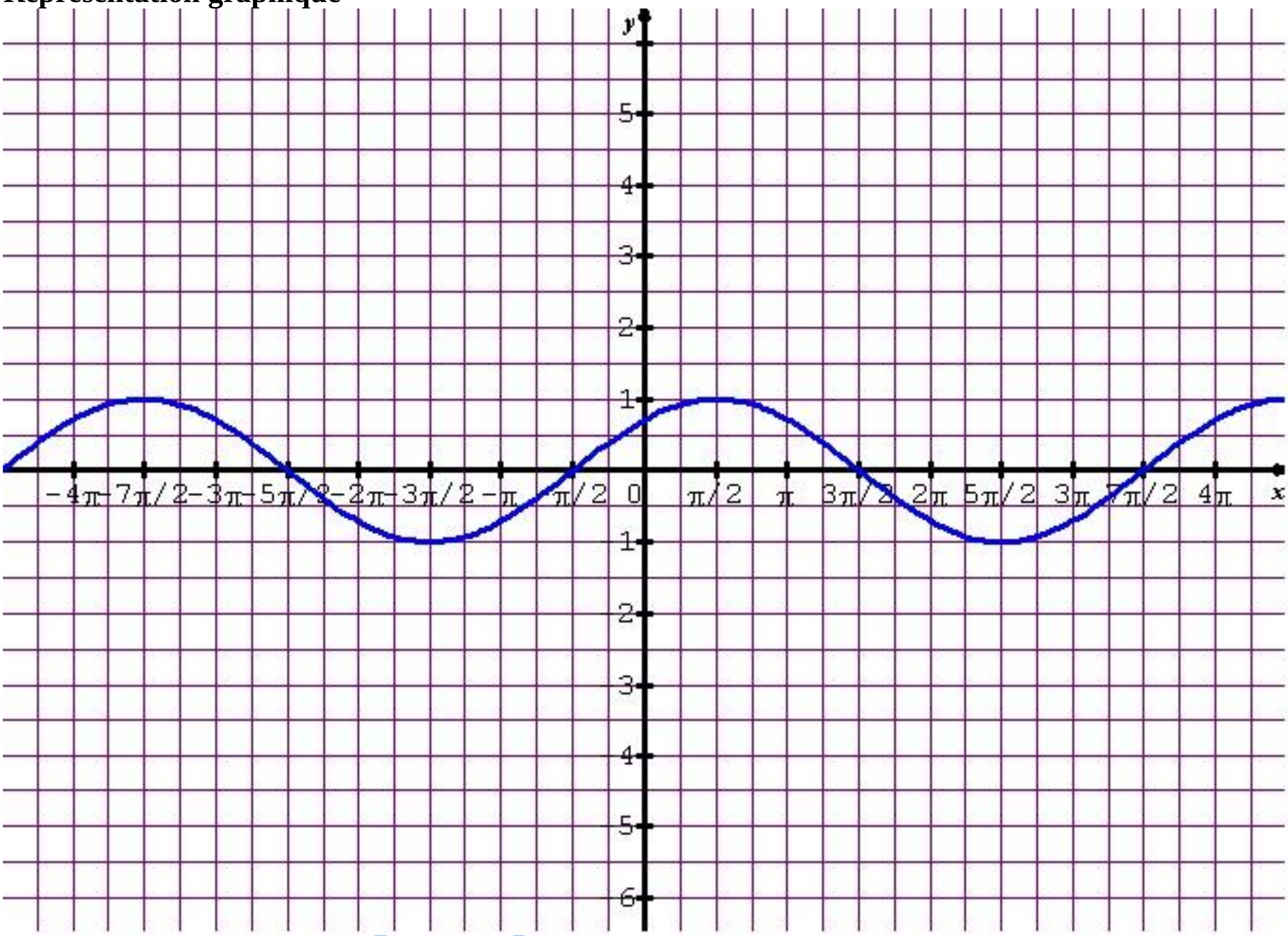
  La fonction f est croissante sur $[\frac{-3\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$; décroissante sur $[-2\pi ; \frac{-3\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2} ; 2\pi]$.

Tableau de variation

x	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	2π

x									
f '(x)		-	0	+	0	-	
f (x)	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représentation graphique



Etude de la fonction $\boldsymbol{f : x \mapsto 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

- Domaine de définition est ℝ ;
- Périodicité ; elle est périodique de période 4π ; car $f(x + 4\pi) = 2\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi+\frac{\pi}{4}\right) = f(x)$;

  On peut réduire l'étude à l'intervalle [-2π ; 2π]

- Dérivée et sens de variation : cette fonction est dérivable et par conséquent continue, sur cet intervalle.

  Sa dérivée est la fonction $\boldsymbol{f' : x \mapsto -\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$; Soit $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$

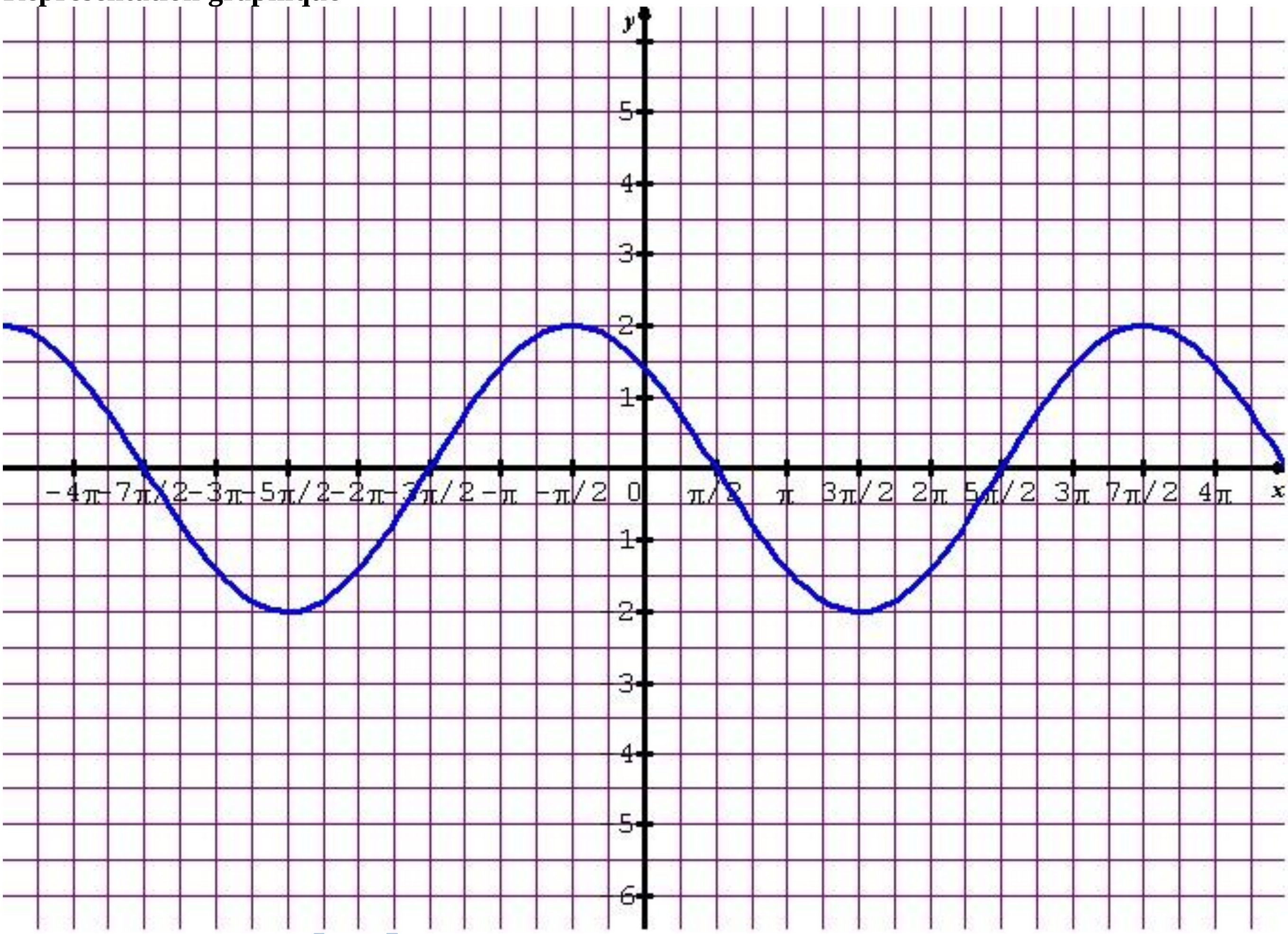
  $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} = 0$ ou $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} = \pi$; donc ; les valeurs de x dans l'intervalle d'étude sont : $\left\{-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right\}$.

  La fonction ***f*** est donc, croissante sur [-2π ; $\frac{-\pi}{2}$] ∪ [$\frac{3\pi}{2}$; 2π] ; décroissante sur [-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$] ;

Tableau de variation

x	-2π		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

Représentation graphique



Savoir-faire

Eléments de symétrie d'une courbe

Exercice .1

Soit f la fonction définie par $f: x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$. Démontrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de cette fonction.

Solution

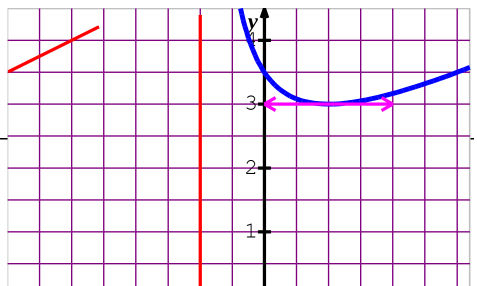
Il suffit de démontrer que : $f(1-x) = f(x)$. On a : $f(1-x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = f(x)$;

donc la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe représentative de la fonction

$f: x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$.

Exercice .2

Voici une partie de la courbe représentative de la fonction



$g : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$.Cette courbe admet-elle un centre de symétrie ? si oui, lequel ?, démontrer.

Solution

D'après la courbe, le point de concours des asymptotes est un centre de symétrie pour cette courbe**,** il s'agit du point de coordonnées (-1 ; 1).Il suffit de démontrer que : ***g***(-2- x) = 2 - ***g***(x). On a :

$\forall x \in D_g ; g(-2-x) = \frac{-2-x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{-2-x+1} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{2}{x+1} = 2 - (\frac{x}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}) = 2 - g(x).$, d'où le point de coordonnées (-1 ; 1) est un centre de symétrie pour la courbe donnée.

Etude de fonctions

Exercice .2

Etudier la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 3x + 1$.

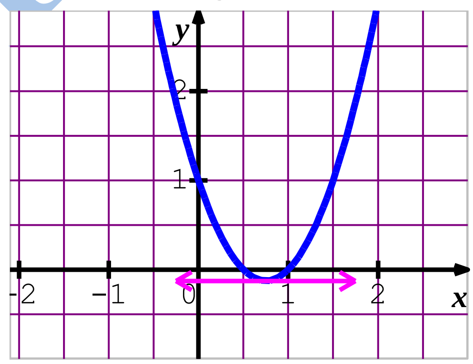
Solution

- Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$; limites bornes : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$;
- Dérivabilité : comme ***f*** est une fonction polynôme ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition. La dérivée est la fonction : $f' : x \mapsto 4x - 3$; Soit *f* '(x) = 0 ⇔ x = $\frac{3}{4}$
- Sens de variation: ∀ x ∈] -∞ ; $\frac{3}{4}$] ; *f* '(x) ≤ 0 d'où *f* **est** décroissante ; ∀ x ∈ [$\frac{3}{4}$; +∞ [; *f* '(x) ≥ 0 d'où *f* est croissante ;
- Calcul de l'image de certains points : $f(\frac{3}{4}) = 2(\frac{3}{4})^2 - 3\frac{3}{4} + 1 = \frac{-1}{8} = -0,125$

Tableau de variation

x	+∞	$\frac{3}{4}$	+∞
f '(x)	-	0	+
f(x)	+∞ ↘	-0,125	↗ +∞

Représentation graphique



Exercice .3

Soit ***g*** la fonction définie par ***g***(x) = $\frac{2x^2 + 2x - 1}{2x - 1}$; a) Déterminer les nombres réels a' ; b' et c' tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$; ***g***(x) = a'x + b' + $\frac{c'}{2x-1}$. b) Etudier la fonction ***g*** et tracer sa courbe représentative.

Solution

$$g(x) = a'x + b' = \frac{c'}{2x-1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{(a'x+b')(2x-1)+c'}{(2x-1)} = \frac{2a'x^2 - a'x + 2b'x - b' + c'}{(2x-1)} = \frac{2a'x^2 - (a'-2b')x - (b'-c')}{(2x-1)}$$

Par identification des deux écritures, on trouve : $\begin{cases} 2a' = 2 \\ 2b' - a' = 2 \\ c' - b' = -1 \end{cases}$; l'équation (1) donne a' = 1 ; l'équation (2) donne b’ = $\frac{3}{2}$; l’équation (3) donne $c = \frac{1}{2}$. Donc, les réels cherchés sont : a’ = 1; b’ = $\frac{3}{2}$; c’ = $\frac{1}{2}$, et par conséquent, $\boldsymbol{g}(x) = x + \frac{3}{2} + \frac{1}{2(2x-1)}$.

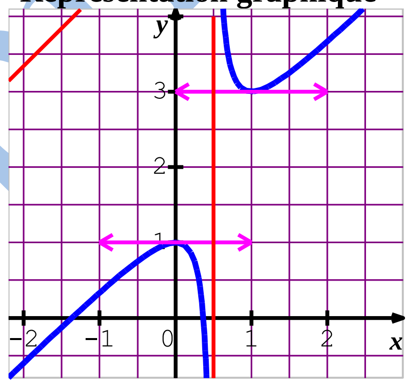
- Domaine de définition : $D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{g}(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{g}(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} \boldsymbol{g}(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+} \boldsymbol{g}(x) = +\infty$.
- Il y a deux asymptotes : x= $\frac{1}{2}$ (A.V) ; $y = x + \frac{3}{2}$ (A.O) (car $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty} \frac{1}{2(2x-1)} = 0$).
- Dérivabilité : comme $\boldsymbol{g}$ est une fonction rationnelle ; elle est continue et dérivable sur son domaine de définition. La dérivée est la fonction : $\boldsymbol{g}' : x \mapsto 1 + \frac{-2}{2(2x-1)^2}$ d’où $\boldsymbol{g}' : x \mapsto \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$;

  Soit g ’(x) = 0 ⇔ x = 0 ou x = 1.
- Sens de variation : ∀ x ∈]- ∞ ; 0] ∪[1 ; +∞[; $\boldsymbol{g}$ ’(x) ≥ 0 d’où $\boldsymbol{g}$ est croissante ;
  ∀ x ∈ [0 ; 1] ; $\boldsymbol{g}$’(x) ≤ 0 d’où $\boldsymbol{g}$ est décroissante.
- Calcul de l’image de certains points : $\boldsymbol{g}(0) = 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2(-1)} = 1$; $\boldsymbol{g}(1) = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2(+1)} = 3$

Tableau de variation

x	+∞		0		$\frac{1}{2}$		1		+∞
g ’(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
g(x)	-∞	↗	1	↘	-∞ ‖ +∞	↘	3	↗	+∞

Représentation graphique



Fonction associées

Exercice .4

Déduire de la courbe représentative de la fonction sinus, la courbe représentative des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \sin(x + \frac{5\pi}{3})$; b) $x \mapsto \cos(-x + \frac{5\pi}{6})$.

Solution

a) $x \mapsto \sin(x + \frac{5\pi}{3})$; la courbe cherchée est l’image de la courbe de : $x \mapsto \sin x$; par : $t_{-\frac{5\pi}{3}\vec{i}}$.

b) $x \mapsto \cos(-x + \frac{5\pi}{6})$; la courbe cherchée est l’image de la courbe de : $x \mapsto \sin x$; par : $t_{\frac{\pi}{3}\vec{i}}$.

B. Exercices

1. Le repère (O ; I ; J) est orthogonal.
a) Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2 - 6x + 5$.
b) En déduire la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \left|x^2 - 6x + 5\right|$

2. Etudier et représenter les fonctions suivantes
a) $\boldsymbol{f}(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$; b) $\boldsymbol{f}(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$;

2) Montrer que le point $A(\frac{1}{2};0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
3)Tracer $\mathscr{C}_f$.

8. Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ -{0 ; 4} par $\boldsymbol{f}(x) = \frac{4}{x(x-4)}$.
Etudier, puis tracer la coure représentative de $\boldsymbol{f}$.

c) $f(x) = x - 2 - \dfrac{2}{x+3}$

3. Le repère (O ; I ; J) est orthonormé.
Soit la fonction $f : x \mapsto \cos 2x$.
Etudier f et construire sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
b) Déduire de $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto \cos(2x + \dfrac{\pi}{4})$; b) $f_2 : x \mapsto \cos(2x + \dfrac{\pi}{4}) + 1$

4. Déterminer les réels a ; b et c pour que la courbe d'équation $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$.
ait le point Ω(-1 ; 2) comme centre de symétrie ;
admet , au point d'abscisse 1, une tangente parallèle à la droite d'équation y = -x.
Construire cette courbe.

5. Soit f la fonction définie sur [1 ; +∞[par ;
$f(x) = \dfrac{x}{2} - 1 + \dfrac{2}{x}$.
$\mathscr{C}_f$ désignera la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
1) a) Déterminer la limite de f en + ∞ .
b) Etudier le sens de variation de f .
c) Dresser le tableau de variation de f.
2) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 1$.
3) Tracer $_f$ et Δ

6. Soit f la fonction définie sur [-3 ; 4[par ;
$f(x) = \dfrac{x(2x-1)}{2x2 - 2x + 5}$.
$\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
Déterminer le sens de variation de

9. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par
$h(x) = \dfrac{3x+1}{-x+1}$.
On pose $\mathscr{H}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
1) Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.
Préciser les asymptotes à $\mathscr{H}$.
2) Etudier les variations de h et faire le tableau de variation.
3) Représenter ($\mathscr{H}$) et ses asymptotes
Démontrer que le point A(1 ;-3) est centre de symétrie pour ($\mathscr{H}$).

10 Soit f la fonction définie sur par $\mathbb{R}^*$ par
$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
On note Γ sa courbe représentative dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
1) Démontrer que f est impaire.
2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter, graphiquement le résultat.
b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, démontrer que la droite Δ : d'équation y = x est asymptote à Γ au voisinage de +∞.
3) Etudier les variations de f sur]0 ; +∞[et faire son tableau de variation. Représenter Δ et Γ .

11 Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞ [par
$f(x) = \dfrac{4}{x^2+3}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).
1) Démontrer que l'axe des abscisses est asymptote à ($\mathscr{C}$), étudier les variations de f et faire son tableau de variation.